CHAPTER 1

Diferansiyel denklemler ve onların çözümleri

3. Diferansiyel denklemlerin sınıflandırması

Tanım 3.1. *Bilinmeyen fonksiyon ile onun türevleri arasındaki bağıntıya diferansiyel denklem denir.*

Tanım 3.2. *Bilinmeyen fonksiyon bir değişkenli ise denkleme adi diferansiyel (ADD) (ordinary differential equation ODE) denklem denir, eğer fonksiyon çok değişkenli ise kısmi diferansiyel (KDD) (partial differential equation PDE) denklem denir.*

Tanım 3.3. *n tane bilinmeyen fonksiyonu içeren m adet diferensiyel denkleme kısaca diferansiyel denklem sistemi denir. Burada m ile n eşit olmak zorunda değildir.*

Tanım 3.4. *Denklemin mertebesi, denklemdeki en yüksek mertebedeki türevdir. Benzer şekilde sitemin mertebesi, sistemdeki en yüksek mertebeli türevdir.*

Tanım 3.5. *Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin* üssüne, *bu diferansiyel denklemin derecesi denir.*

Tanım 3.6. *Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise,diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir.n. mertebeden adi lineer diferansiyel, bağımlı değişken y ve bağımsız değişken x olmak üzere, aşağıdaki formda gösterilir.*

$$\begin{aligned} a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y &= b(x) \ \text{ veya} \\ a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y\prime+a_n(x)y &= b(x) \end{aligned}$$

Dolayısıyla içerisinde y^3 ,$(y\prime\prime)^2, yy\prime, y\prime y\prime\prime\prime, siny, \exp(y)$ gibi terimler bulunan denklemler lineer değildir. Bunun yanında denklem $x^2, xy\prime\prime, sinx, \exp\left(-\sin x^3\right), \ln x$ türünden ifadeler içerebilir.

Örnek 3.7. $y\prime\prime+xy\prime-\exp(y)=0,$ *2. mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemdir.*

Örnek 3.8. $\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=x\exp(x)\,,$ *4. mertebeden lineer adi defreansiyel denklemdir.*

Örnek 3.9. $u_t=k(x)u_{xx}$ *veya* $\frac{\partial u}{\partial t}=k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *2. mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemdir.*

Örnek 3.10. $\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}-\frac{\partial u_2}{\partial x}=0,$ *3. mertebeden kısmi diferansiyel denklemler sistemidir.*

4. Temel Kavramlar

Tanım 4.1. *Birinci mertebeden ADD ile*

$$F(x,y,y\prime)=0\Leftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{4.1}$$

veya

$$y\prime=f(x,y)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{4.2}$$

formlarını düşüneceğiz.

Tanım 4.2. *n. mertebden ADD ile*

$$F\left(x,y,y\prime,y\prime\prime,\ldots,y^{(n)}\right)=0\Leftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{4.3}$$

ya da

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n-1)}\right) \Leftrightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \tag{4.4}$$

Tanım 4.3. *Keyfi $g(x)$ fonksiyonu özdeş olarak (4.3).denklemini sağlıyorsa $g(x)$ fonksiyonuna (4.3) denkleminin integrali ya da çözümü denir. (bkz Uyarı 4.6)*

Uyarı 4.4. *ADD genelde bir I aralığında tanımlanır. Böylece $g(x)$ fonksiyonu n mertebeye kadar türevi olan bir fonksiyon ve (4.3) denkleminde y yerine $g(x)$, $y\prime$ yerine $g\prime(x)$,..., $y^{(n)}$ yerine $g^{(n)}(x)$ yazdığımızda (4.3) denklemi sağlanıyorsa, $y = g(x)$ fonksiyonuna I aralığında (4.3) denleminin bir çözümü denir.*

Örnek 4.5. *$y = \sin x$ fonksiyonu $y\prime\prime + y = 0$ denkleminin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir genel çözümüdür.*

Uyarı 4.6. *(4.3) denkleminin çözümü $y = g(x)$ açık formunda olmak zorunda değildir. Aynı zamanda $h(x, y) = 0$ kapalı formu ile de verilebilir. Buna göre türevleri kapalı fonksiyonlar için türev formülü kullanılarak bulunur. Böylece benzer şekilde (4.3).denklemi özdeş olarak $h(x, y) = 0$ fonksiyonunun her noktasında özdeş olarak sağlanıyorsa $h(x, y) = 0$ fonksiyonu (4.3) denkleminin integrali ya da çözümüdür.,$y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}$ (Bkz. Örnek 4.34)*

Örnek 4.7. *$x^2 + y^2 = 4$ fonksiyonu*

$$y\prime = -\frac{x}{y} \tag{4.5}$$

denkleminin kapalı formda çözümüdür. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ çemberinde kapalı fonksiyonlar için türev bağıntısını kullanırsak $2x + 2yy\prime = 0$ elde ederiz, böylece (4.5) denklemi sağlanır. $(-2, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında $y = 0$ olduğundan bu noktaları hariç tutmalıyız.(Bkz. Örnek Örnek 4.34).

Uyarı 4.8. *(4.2) denkleminin geometrik yorumu: $f(x, y)$, Q bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. (4.2) denklemine göre her $(x, y) \in Q$ noktasında bu noktadan geçen ve eğimi $y\prime$ olan bir doğru (doğrusal eleman) vardır. Böylece bu doğruların oluşturmuş olduğu alana kısaca doğrultu alanı denir. Buna göre Q bölgesindeki eğriyi bulmak, doğruların herbir noktasındaki tanjantı bulmaktır.*

Buna göre 2. mertebeden

$$y\prime\prime = f(x, y, y\prime)$$

denklemi için $y\prime\prime$ yani çözüm eğrisinin eğriliği bulunmalıdır. 3 ve daha yüksek mertebeden ADD için benzeri geomtrik yorumlar yoktur.

Tanım 4.9.

$$y_1 = g_1(x), \ y_2 = g_2(x), \ldots, y_n = g_n(x) \tag{4.6}$$

fonksiyonları

$$\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \tag{4.7}$$

sistemini özdeş olarak sağlıyorsa, (4.6) fonksiyonlarına sistemin çözümü (integrali) denir.

Bu durumda da çözümleri kapalı fonkiyon gibi düşünebiliriz. (Bkz Uyarı 4.6).

Uyarı 4.10. *$n = 2$ durumu için y_1, y_2 fonksiyonları yerine bilinmeyen y, z fonksiyonlarını ele alalım. Buna göre (4.6) fonksiyonları*

$$y = g_1(x), \ z = g_2(x)$$

geometriksel olarak bir eğri tanımlar (3 boyutlu uzayda). Bu sebepten ötürü (4.6) fonksiyonları (4.7) sisteminin integral eğrisi diye adlandırılır.

Uyarı 4.11. *Genel olarak (4.7) sisteminde bilinmeyen fonksiyon sayısı ile denklem sayısı eşit olmak zorunda değildir. Fakat çözüm tanımı aynıdır. Yine de çözümün varlığı ve tekliği hakkında bir genelleme yapmalıyız.*

Teorem 4.12. *(4.7) sistemi ve*

$$P\left(a, b_1, b_2, \ldots, b_n\right) \tag{4.8}$$

noktasını ele alalım. (4.7) sistemindeki $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $n+1$ değişkenli ve değişkenleri $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ olmak üzere, P noktasının bir O komşuluğunda, sürekli ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ değişkenlerine göre sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. O komşuluğunda (4.7) sistemini ve

$$g_1\left(a\right) = b_1,\ \ g_2\left(a\right) = b_2, \ldots, g_n\left(a\right) = b_n \tag{4.9}$$

koşulunu (başlangıç koşulu) sağlayan $g_1\left(x\right), g_2\left(x\right), \ldots, g_n\left(x\right)$ fonksiyonları vardır ve bu fonksiyonlar tektir.

Tanım 4.13. *Bir problem diferansiyel denklemi ve belirli koşulları içerir. Problemdeki koşullar x in bir değeriyle ilgili ise bu durumda probleme başlangıç değer problemi, x in 2 değeri ile ilgili ise sınır değer problemi denir.*

Örnek 4.14.

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, \\ y\left(1\right) &= 3 \\ y'\left(1\right) &= -4 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemidir (BDP)- (initial value problem IVP).

Örnek 4.15.

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, \\ y\left(0\right) &= 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 5 \end{aligned}$$

sınır değer problemidir (SDP)- (boundary value problem BVP).

Uyarı 4.16. *Uyarı 4.10'e göre $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları O komşuluğunda yukarıdaki koşuları sağlıyorsa (4.7) sisteminin P noktasından geçen bir tek integral eğrisi vardır.*

Özel durumda

$$f\left(x, y\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) \tag{4.10}$$

fonksiyonları P noktasının O komşuluğunda sürekli ise

$$y' = f\left(x, y\right)$$

denkleminin bir tek integral eğrisi mevcuttur ve bu eğri P noktasından geçer.

Uyarı 4.17. *Eğer her $x \in [a, b]$, $y_1, y_2 \in [c, d]$ için*

$$\left|f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \leq K \left|y_1 - y_2\right| \tag{4.11}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir K sayısı bulunabilirse $f\left(x, y\right)$.fonksiyonu y değişkenine göre R $(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ bölgesinde Lipchitz koşulunu sağlar denir. Özel olarak $f\left(x, y\right)$.fonksiyonu y değişkenine göre R bölgesinde türevi mevcut ve

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K \tag{4.12}$$

koşulu sağlanıyor ise (4.11) koşulu sağlanır. Fakat tersi doğru değildir. Yani y değişkenine göre türevi mevcut olmayabilir fakat (4.11) koşulunu sağlayan fonksiyonlar da vardır. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 4.18. *$f\left(x, y\right) = |y|$ fonksiyonu y değişkenine göre kısmi türevi yoktur ancak Lipschitz koşulunu sağlar. Gerçekten*

$$\left|\left|y_1\right| - \left|y_2\right|\right| \leq \left|y_1 - y_2\right|, \ \ K = 1$$

sağlanır.

Teorem 4.19. *$f(x,y)$ fonksiyonu $Q(a-h \le x \le a+h,\ b-k \le y \le b+k)$ bölgesinde sürekli olsun (Sürekli fonksiyon kapalı aralıkta sınırlıdır yani Q bölgesinde $|f(x,y)| \le M$ koşulunu sağlayan pozitif M sabiti mevcuttur.) ve (4.11) koşulunu sağlasın.*

$$d = \min\left(h, \frac{k}{M}\right)$$

olmak üzere $[a-d, a+d]$ aralığında

$$y\prime = f(x,y)$$

denklemini sağlayan $y = g(x)$ bir tek çözümü vardır.

Uyarı 4.20. *Lipschitz koşulu ve Teorem 4.19'ye benzer teorem (4.7) sistemi içi de formüle edilebilir.*

Uyarı 4.21. *Çözümün varlığı için $f(x,y)$ fonksiyonun sürekliliği yeterli bir koşulken teklik için yeterli değildir.*

Örnek 4.22.

$$y = 0 \text{ ve } y = \frac{1}{27}(x-2)^3$$

fonksşyonları $y\prime = \sqrt[3]{y^2}$ denkleminin integral eğrisidir.

Teorem 4.23.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{4.13}$$

diferansiyel denklemini ve $P(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ noktasını ele alalım.

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y\prime}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

fonksiyonları sürekli olsun. Bu durumda P noktasının bir komşuluğunda (4.13) denklemini ve

$$g(a) = b_1,\ g\prime(a) = b_2, \dots, g^{(n-1)}(x) = b_n \tag{4.14}$$

koşulunu sağlayan $y = g(x)$ tek çözümü mevcuttur.

Uyarı 4.24. *Lipschitz koşulunu kullanarak (4.13) denklemi için Teorem 4.19'ye benzer bir teorem formüle etmek mümkündür.*

Teorem 4.23 lokal karakterlidir. Yani

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y\prime + a_0(x)\, y = b(x) \tag{4.15}$$

denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği I aralığında mevcuttur.

Uyarı 4.25. *(4.13) denklemi için (4.14) koşulları sağlansın. $(n+1)$ boyutlu $P(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ noktası verilsin. Q bölgesi P noktasını içeren bölge ve (4.13) denkleminin bu noktada Teorem 4.23'e göre tek bir çözümü olsun. Buna göre aşağıda bu tarz denklemler için genel çözüm kavramını tanımlayacağız.*

Tanım 4.26. *(4.13) denkleminin çözümü n tane bağımsız keyfi sabit içeriyorsa bu çözüme Q bölgesinde (4.13) denkleminin genel çözümü (integrali) denir.*

Uyarı 4.27. *Eğer sabitlerden herhangi birisini, diğerleriyle yer değiştirmek mümkün değil ise bu durumda bu sabitlere bağımsız denir. Yani hiç biri gereksiz değil ise.*

Örnek 4.28.

$$y = c_1 \exp 2x + c_2 \exp(-x)$$

fonksiyonu

$$y\prime\prime - y\prime - 2y = 0$$

denkleminin genel çözümüdür.

$$c_1 \exp(x + c_2)$$

fonksiyonu

$$y\prime\prime - y = 0$$

denkleminin genel çözümü değildir. Çünkü

$$c_1 \exp(x+c_2) = c_1 \exp(x) \exp(c_2) = K \exp x$$

olarak yazabiliriz.

Uyarı 4.29. *Genel durumda*

$$F\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.16}$$

denklemi için genel integralden bahsetmek çok mümkün değildir. Çünkü çözümün tekliği sorusunun öncelikle cevaplanması gerekmektedir. Örneğin

$$y\prime^2 - x^4 y^2 = 0 \tag{4.17}$$

denklemi aşağıdaki değerler için sağlanır:

$$y\prime = x^2 y, \;\; y\prime = -x^2 y$$

Eğer belli bir bölgeden ve ya başlangıç koşullarından bahsediyorsak, (4.16) denkleminin genel çözümünden bahsetmek mümkündür.

Tanım 4.30. *Eğer her noktada çözümün tekliği koşulu sağlanmıyorsa bu durumda $y\prime = f(x,y)$ denkleminin çözümüne tekil çözüm (integral) denir.*

Örnek 4.31. *$y = 0$ integral eğrisi*

$$y\prime = \sqrt[3]{y^2}$$

ADD nin tekil çözümüdür çünkü $(2,0)$ noktası boyunca

$$y = \frac{1}{27}(x-2)^3$$

fonksiyonu da diğer bir integral eğrisidir.

Uyarı 4.32. *$y\prime = f(x,y)$ denklemi bir parametreli genel çözüme sahiptir. Eğer çözüm mevcut ise verilen denklemin tekil integraline eşittir.*

Uyarı 4.33. *$f(x,y) \neq 0$ için*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{4.18}$$

denklemi ile

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y) \tag{4.19}$$

denklemi denktir. $f(x,y) = 0$ durumunda (4.18) denklemi tanımsız iken (4.19) denklemi tanımlıdır. Böylece genelde (4.18) denklemine (4.19) denklemini ekleriz ve (4.18) denkleminin integral eğrisi ile hem (4.19) denkleminin hem de (4.18) denkleminin integral eğrilerinin düşüneceğiz.

Örnek 4.34.

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{4.20}$$

çemberi

$$y\prime = -\frac{x}{y}$$

$(-2,0), (2,0)$ noktalarında bile ADD nin integral eğrisidir. Çünkü bu noktalarda (4.20) fonksiyonu

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

ADD yi sağlar.