ÜNİTE 2

AKIŞKANLAR STATİĞİ

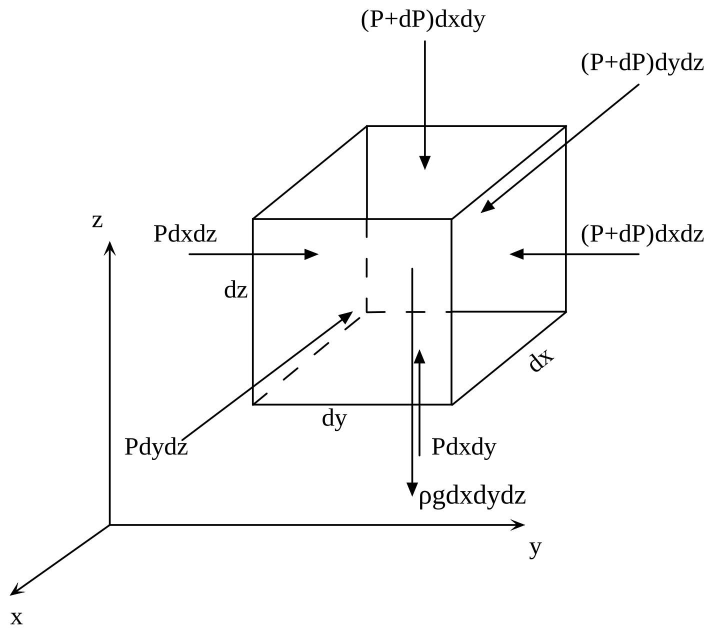
2.1 Giriş

Akışkanlar statiği durgun haldeki akışkanlarla ilgili problemleri ele alır. Eğer akışkan sıvıysa akışkan statiği hidrostatik adını alır. Durgun bir akışkan ortamı içinde komşu akışkan tabakaları arasında bağıl bir hareket söz konusu olmadığından akışkan içerisinde onun şeklini değiştirmeye çalışan kayma gerilmeleri yoktur, yani teğetsel kuvvetler altında değillerdir. Akışkanlar statiğinde ilgileneceğimiz tek gerilme, basınca eşdeğer olan normal gerilmedir. Hidrostatik basınç yalnızca akışkanın ağırlığından meydana gelen bir etkidir.

Akışkanlar statiği, barajlar, depolama tankları, hidrolik presler, kriko gibi pek çok mühendislik sistem ve elemanlarının tasarımında yüzeyler üzerine gelen kuvvetlerin, ayrıca, yüzen ya da dalmış halde bulunan cisimler üzerine etki eden kuvvetlerin belirlenmesi ile ilgilenir.

2.2 Basınç Değişimi

Akışkanın durgun olması halinde, basınç sadece akışkanın ağırlığından dolayı meydana gelir. Durgun akışkan üzerinde kayma gerilmeleri oluşmaz ve dolayısıyla kayma gerilmelerini meydana getiren hız değişimleri görülmez. Bu durumda akışkan sadece normal (yüzeye dik) gerilmelerin etkisi altındadır. Duran bir akışkan içinde herhangi bir yüzeye etki eden normal gerilmelerin değeri, akışkan basıncı, P, olarak adlandırılan tek bir değere eşittir ve işareti yüzeyin normalinin tersi yönünde, yani yüzeye dik ve yüzeye doğrudur. Basınç, skaler bir büyüklüktür ve durgun akışkan ortamı içinde belli bir noktaya tüm yönlerde eşit değerde etki eder. Durgun akışkan ortamı içinde sabit bir nokta etrafında basınç her doğrultuda aynıdır, ancak noktanın yeri değiştirildiğinde, yani noktadan noktaya değişebilir. Bunu görmek için durgun bir akışkan ortamında kartezyen koordinatlarda diferansiyel bir akışkan elemanı ele alalım (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

Akışkan ortamı içindeki iki nokta arasındaki basınç farkı zincir kuralı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \qquad (2.1)$$

Bu eleman üzerinde etki eden iki tür kuvvet vardır, bunlar basınç kuvvetleri ve kendi ağırlığıdır. Akışkan elemanına ayrı ayrı x, y ve z yönlerinde Newton'un ikinci kanununu uyguladığımızda,

<u>x yönünde</u>

$\Sigma F_x = ma_x$

$Pdydz-(P+dP)dydz = (\rho dxdydz)a_x$

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a_x$$

<u>y yönünde</u>

$\Sigma F_y = ma_y$

$Pdxdz-(P+dP)dxdz = (\rho dxdydz)a_y$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho a_y$$

<u>z yönünde</u>

$\Sigma F_z = ma_z$

$Pdxdy-(P+dP)dxdy- (\rho dxdydz)g = (\rho dxdydz)a_z$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z)$$

Herhangi bir yöndeki basınç farkı Denklem 2.1'den aşağıdaki gibi olur.

$$dP = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(g + a_z)dz \qquad (2.2)$$

Akışkanın durgun olduğu durumda, ivmesi, dolayısıyla tüm ivme bileşenleri sıfırdır. Bu durumda, akışkan elemanı üzerine etki eden net kuvvet, yani kuvvetler toplamı da sıfır olur, $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$. Neticede,

$$\frac{dP}{dx} = 0 \qquad \frac{dP}{dy} = 0 \qquad \frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (2.3)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılardan, x ve y doğrultularında basınç gradyenlerinin sıfıra eşit olduğu, yani x ve y yönlerinde, bu demek oluyor ki yatay düzlemde basınç değişimi yoktur. Bir başka ifadeyle, x ve y yönlerinde basınç sabittir. z doğrultusunda ise basınç gradyeninin yoğunluk ile yerçekimi ivmesinin çarpımına, yani akışkanın özgül ağırlığına eşit olduğu görülüyor. Bu demek oluyor ki, basınç değişimi sadece düşey doğrultuda akışkanın özgül ağırlığıyla meydana geliyor.

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (2.4)$$

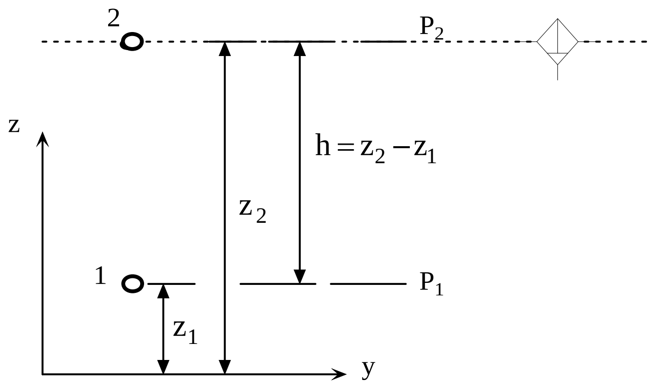
ilişkisi durgun akışkanlar için temel bir bağıntıdır ve basıncın düşey doğrultuda nasıl değiştiğini verir. Ayrıca bu denklem, z yönünde basınç gradyeninin negatif olduğunu gösteriyor, yani durgun akışkan ortamı içinde yukarı doğru basıncın düştüğünü. Bu denklem sabit özgül ağırlıklı akışkanlar, örneğin sıvılar için geçerli olduğu gibi özgül ağırlığı yükseklikle değişen, örneğin hava ve diğer gazlar için de geçerlidir. Fakat, gazların özgül ağırlığı sıvılara nazaran çok küçük olduğundan, düşey doğrultuda akışkanın özgül ağırlığının meydana getirdiği bu basınç değişimi de sıvılara nazaran çok küçük olduğundan genellikle ihmal edilir. Sıkıştırılamaz bir akışkan için sabit yerçekimi ivmesinde Denklem 2.4'de verilen bağıntı, her iki tarafının integrali alınarak açıldığında ve serbest yüzeyde basıncın sıfır olduğu sınır şartı kullanıldığında integral sabiti de sıfır olur, ve neticede,

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

$$\Delta P = \rho g \Delta z \qquad (2.5)$$

bağıntısı elde edilir. Buna göre sabit yoğunluklu bir akışkan içerisinde iki nokta arasındaki basınç farkının, bu iki nokta arasındaki düşey mesafe Δz ve akışkanın özgül ağırlığı ρg ile doğru orantılı olduğu sonucu çıkar. Şekil 2.2'de gösterildiği gibi, 1 ve 2 noktaları arasındaki yukardan aşağıya doğru düşey doğrultudaki mesafe (z_2-z_1), derinlik h olarak tanımlandığında sıvı serbest yüzeyinden herhangi bir derinlikteki manometrik ölçekte basınç, yani gösterge basıncı

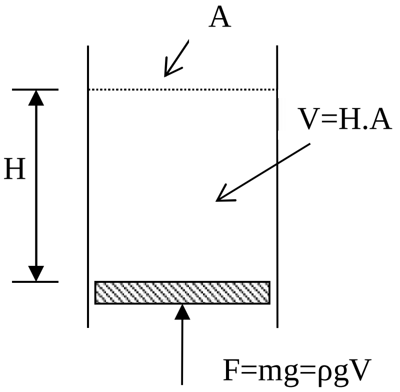
$$\boxed{P = \rho g h} \qquad (2.6)$$



Şekil 2.2

olarak elde edilir ve hidrostatik basınç dağılımı denklemi olarak anılır. Sonuç olarak hidrostatik basınç, sabit özgül ağırlıklı akışkanlar için yatayda değişmez, derinlikle doğru orantılı olarak artar.

Hidrostatik basıncı bir başka yaklaşımla şu şekilde açıklayabiliriz: Şekil 2.?'de görüldüğü gibi düşey bir piston- silindir düzeneğinde belli bir hacimde, dolayısıyla belli bir yükseklikte sıvı bir akışkan olsun. Pistonu sabit tutmak için gerekli kuvvet, pistonun ağırlığı ihmal edildiği durumda üzerindeki akışkanın ağırlığı kadardır. Bu yaklaşımla hidrostatik basınç tanımını aşağıda verildiği gibi daha kolay ve anlaşılır bir şekilde de yapabiliriz.



$F = mg = \rho g V$
$P.A = \rho g V$
$P.A = \rho g H.A$
$P = \rho g H$

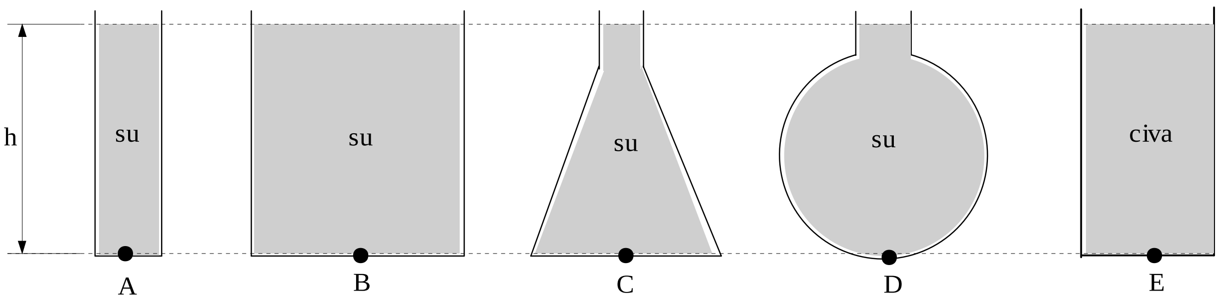
Sıvılar sıkıştırılamaz akışkanlar olarak kabul edildiğinden yoğunluğun derinlikle değişimi ihmal edilir. Yükseklik farkı çok fazla değilse bu durum gazlar için de geçerlidir. Öte yandan sıvılar ve gazlar için yoğunluğun sıcaklıkla değişimi önemli olabilir ve yüksek doğruluğun arandığı hallerde bunun dikkate alınması gerekir. Benzer şekilde, yerçekimi ivmesi deniz seviyesinde 9.81 m/s^2'den 14000 m yükseklikte 9.762 m/s^2 değerine kadar değişiklik gösterir. Bu uç örnekte yerçekimi ivmesindeki değişim yalnızca %0.4'tür. Dolayısıyla, ihmal edilebilir bir hatayla sabit kabul edilebilir.

Denklem 2.6'da verilen bağıntı, ayrıca, basıncın yükselti veya akışkan sütunu yüksekliği olarak ifadesinde de büyük önem taşımaktadır. N/m^2, yani Pa birimindeki basıncın akışkanın özgül ağırlığına bölünerek elde edilen uzunluk ölçüsü birimindeki değer, Pa birimindeki basıncın akışkanın sütun yüksekliği olarak karşılığıdır ve basınç yükseltisi veya basınç yükü olarak tanımlanır. Basınç yükseltisi veya yükü genellikle düşü olarak adlandırılır, akışkan olarak da genellikle sıvılar kullanılır. Basınç değeri düşü olarak verildiğinde, basınç olarak ifade edilebilir, fakat birimi uzunluk ölçüsü birimi olduğundan, basıncın düşü olarak verildiği anlaşılmalıdır ve uzunluk ölçüsü biriminin yanında, hangi akışkana dair olduğunu simgeleyen akışkan sütunu ibaresi belirtilmelidir. Basınç ile düşü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$h = P/\rho g \tag{2.7}$$

Örneğin standart atmosfer basıncı, 101325 Pa, su kullanıldığında 101325/1000*9.81=10.3 mSS (metre su sütunu), civa kullanıldığında ise 101325/13600*9.81=0.76 m = 760 mm Hg (milimetre civa) sütunu yüksekliğine karşılık gelir.

Durgun bir akışkan içerisindeki basınç kabın şeklinden ve kesitinden bağımsızdır. Basınç düşey doğrultuda yani derinlikle değişir ancak yatay bir düzlemde her noktada aynıdır. Aynı derinlikte bulunduklarından ve aynı akışkan içinde olduklarından A, B, C ve D noktalarındaki basınçların aynı olduğuna dikkat ediniz (Şekil 2.3). Bununla beraber aynı derinlikte olmasına karşın E noktasındaki basınç, bu noktanın diğerlerinin içinde bulundukları akışkandan farklı bir akışkan ortamı içinde olmasından dolayı diğerlerinden farklıdır.



Şekil 2.3

Bir akışkan içerisinde basıncın yatay doğrultuda aynı kalmasının bir sonucu da kapalı bir sistemdeki akışkana uygulanan basıncın, akışkan içerisindeki her yerde aynı miktarda etkimesidir. Blaise Pascal'ın onuruna buna Pascal yasası denmiştir. Pascal ayrıca, bir akışkan tarafından uygulanan kuvvetin yüzeyin alanıyla orantılı olduğunu da biliyordu. Böylece, hidrolik silindirlerin birbirlerine bağlanıp, büyük silindirin, küçük olana uygulanan kuvvetten oransal olarak daha büyük bir kuvvet elde etmek için kullanılabileceğini ortaya koydu. Hidrolik frenler ve kaldırma sistemleri gibi bir çok sistemin teorisini oluşturan Pascal makinesi bir arabayı tek bir kolumuzu kullanarak kaldırabilmemizi sağlar (Şekil 2.4). Her iki piston da aynı seviyede olduğundan $P_1 = P_2$'dir. Bu nedenle uygulanan kuvvetin üretilen kuvvete oranı,

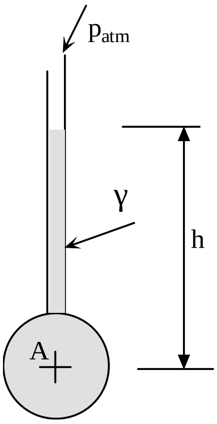
$$P_1 = P_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

olarak belirlenir. Örneğin piston oranları $A_2/A_1 = 10$ olan bir hidrolik kriko ile 100 kgf (981 N) kuvvet uygulayan bir kimse 1000 kg'lık bir arabayı kaldırabilir.

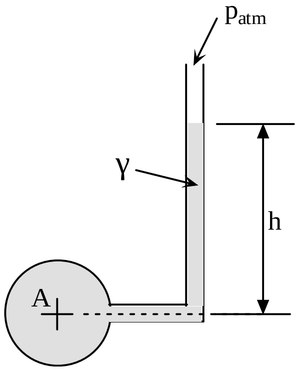
2.3 Manometreler

P = ρgh bağıntısı durgun bir akışkan içerisinde h kadar bir akışkan yüksekliği, ΔP/ρg kadar basınç yükseltisine yani basınç yüküne karşılık gelmektedir. Bu da bir akışkan sütununun basınç ve basınç farklarını ölçmede kullanılabileceğini göstermektedir. Bu ilkeye göre çalışan basınç ve farklarını ölçmeye yarayan düzeneklere manometre denir. Manometreler, basıncı dik veya eğimli tüpler içinde sıvı sütunu olarak ölçen aletlerdir. Manometreler küçük ve orta ölçekli basınç ve basınç farklarını ölçmede yaygın olarak kullanılırlar. Manometre sıvısı olarak genellikle su, alkol, yağ ve cıva kullanılır. Eğer yüksek basınçlar öngörülüyorsa, manometre boyutunu kullanışlı bir seviyede tutmak için cıva gibi ağır akışkanlar kullanılmalıdır. Bir akışkan ortamı içerisinde basınç yatay doğrultuda değişmediği için aynı seviyedeki noktalarda basınç da aynıdır. Ölçülen basınçlar bu ilkeye göre hesaplanır.

Basit tip bir manometre üst ucu atmosfere açık, basıncı ölçülmek istenen noktaya bağlı dik bir tüpten oluşur (Şekil 2.5).

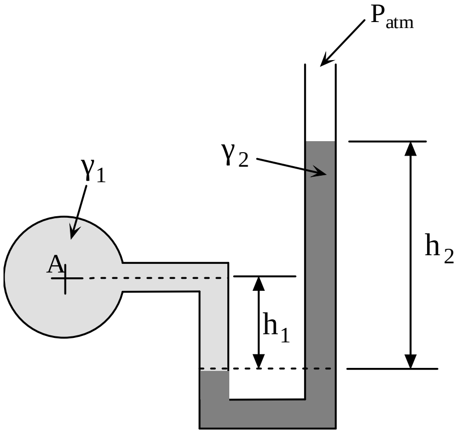


$P_A = \gamma h$

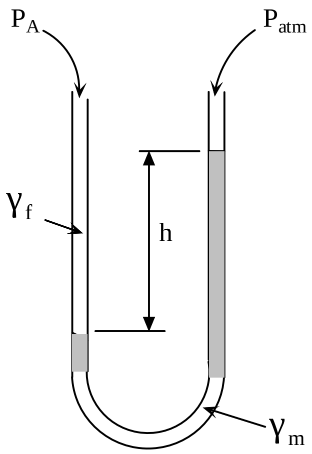


Şekil 2.4

Daha yaygın bir şekilde kullanılan bir diğer manometre tipi U şekline getirilmiş bir tüpten oluşan U-tüp manometrelerdir, Şekil 2.6'da görüldüğü gibi.



Şekil 2.5



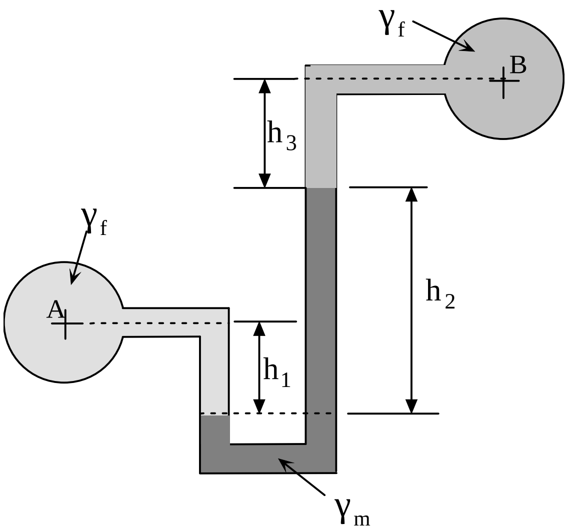
Şekil 2.6

$P_A + \gamma_f h_1 = \gamma_m h_2$
$P_A = \gamma_m h_2 - \gamma_f h_1$

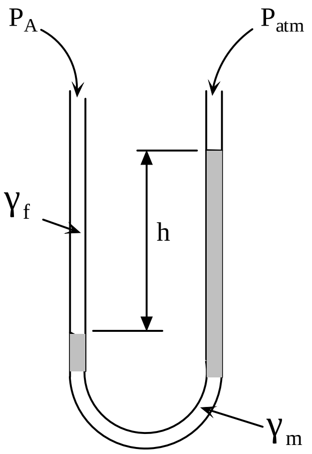
$P_A + \gamma_f h = P_B + \gamma_m h$
$P_A = gh(\rho_m - \rho_f)$

Genellikle U-tüp manometrelerde kullanılan sıvı basıncı ölçülmek istenen akışkandan farklı olur ve manometre sıvısı olarak adlandırılır. Gazların basıncı ölçülmek istendiğinde manometre tüplerinde meydana gelen gaz yükseltileri dikkate alınmaz, gazların hidrostatik basınçları genellikle ihmal edilir, dolayısıyla yukarıdaki manometre bağıntılarındaki basıncı ölçülecek gaz akışkanın yoğunluğu, dolayısıyla özgül ağırlığı, ρ_f ve γ_f, sıfır olur.

Manometre sıvıları ölçülmek istenen basınç aralığına göre seçilir. Örneğin 20 kPa değerinde bir basınç ölçümü için manometre sıvısı su kullanıldığında 20000/9.81*1000 = 2.04 m SS, civa kullanıldığında ise 20000/9.81*13600 = 0.15 m = 15 cm Hg yüksekliğinde ölçeğe sahip bir manometre kullanılmalıdır. Buradan da anlaşıldığı gibi manometreler genellikle düşük basınç ölçümü ihtiyacı olan yerlerde kullanılır. Ayrıca, ölçüm aralığı ve hassasiyeti, kullanılan manometre sıvısının özgül ağırlığı ile belirlenir. U-tüp manometreler ayrıca yaygın olarak iki nokta arasındaki basınç farkını ölçmek için de kullanılır, Şekil 2.6'da görüldüğü gibi.



Şekil 2.7

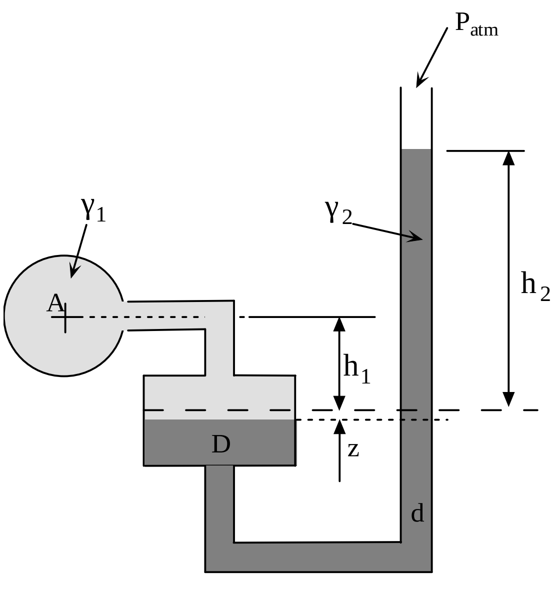


Şekil 2.8

$$P_A + \gamma_f h_1 = P_B + \gamma_m h_2 + \gamma_f h_3$$
$$P_A - P_B = \gamma_m h_2 + \gamma_f (h_3 - h_1)$$

$$P_A + \gamma_f h = P_B + \gamma_m h$$
$$P_A - P_B = h(\gamma_m - \gamma_f)$$
$$P_A - P_B = gh(\rho_m - \rho_f)$$

Bir hayli küçük basınç değişikliklerini ölçmek için rezerv tip U-tüp manometreler kullanılır, Şekil 2.9'da görüldüğü gibi.



Şekil 2.9

$$P_A + \gamma_f (h_1 + z) = \gamma_m (h_2 + z)$$

Ayrıca manometrenin sol kolundaki rezerv içindeki z kadar akışkanın seviyesindeki düşüş, sağ kolda h_2 kadar manometre sıvısı yükseltisinde artışa sebep olur, dolayısıyla sol kolda değişen hacmin sağ koldaki değişen hacme eşit olması gerekir, dolayısıyla:

$$z = \frac{d}{D} h_2$$

olur. Bu durumda,

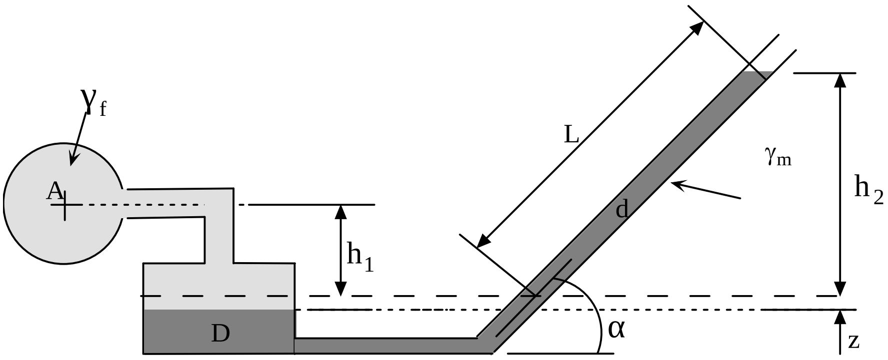
$$P_A = \gamma_m h_2 \left(1 + \frac{d}{D}\right) - \gamma_f \left(h_1 + \frac{d}{D} h_2\right)$$

Basıncı ölçülmek istenen akışkan gaz ise, özgül ağırlığı γ_f ile gösterilen, gazların basınç yükleri ihmal edildiğinden

$$P_A = \gamma_m h_2 \left(1 + \frac{d}{D}\right)$$

Burada $\left(1 + \dfrac{d}{D}\right)$ düzeltme faktörüdür. Çünkü manometre rezervi içindeki sıvı seviyesi basınç uygulandığında referans kabul edilen çizgiden z kadar düşer. Bu da sol kolda manometre sıvısının yükseltisini ölçerken referans kabul edilen çizgiden z kadar bir yükselti hatası yapılmasına sebep oluyor. Bunun önüne geçmek için, ya her ölçülen h_2 yükseltisine z kadar yükselti ilave edilecek, ya düzeltme faktörünü içeren bağıntı kullanılacaktır ya da ölçüm skalası bu faktörü içerecek şekilde düzenlenecektir.

Aynı zamanda ölçüm hassasiyetini artırmak için manometrelerin ölçüm tüpü eğimlendirilir, Şekil 2.10'da görüldüğü gibi.



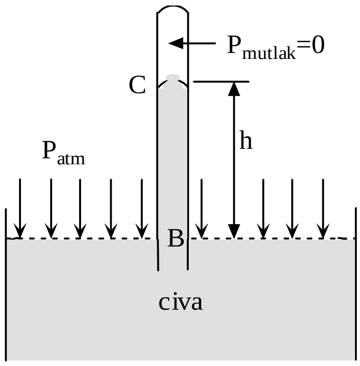
Şekil 2.10

<u>Barometre ve Atmosferik Basınç</u>

Barometre atmosferik basıncı ölçmek için kullanılır ve bu yüzden atmosferik basınç için genellikle barometrik basınç deyimi de kullanılır. Atmosferik basınç, Şekil 2.9'da gösterildiği gibi, bir ucu kapalı içi cıva dolu cam tüp ters çevrilerek atmosfere açık içinde cıva bulunan bir kaba daldırılması suretiyle ölçülebilir. B noktasındaki basınç atmosferik basınca eşittir. C noktasındaki basınç ise bu noktanın üzerinde sadece cıva buharının bulunması ve cıvanın oda sıcaklığında çok küçük bir buharlaşma basıncına sahip olması ve buradaki basıncın atmosferik basınca oranla çok küçük olmasından ötürü ideal bir yaklaşıklıkla boşluk olarak değerlendirilir ve ihmal edilerek, sıfırdır. Bu durumda kap içindeki cıva serbest yüzeyine etki eden sıfır basınç, cıvayı tüp içinde h kadar yükselmeye zorlar. Atmosferik basıncı ölçmek için kap içindeki cıva serbest yüzeyi ile tüp içindeki B noktası arasında basınç dengesi kurduğumuzda,

$$P_{atm} = P_B = ggh$$

sonucu ortaya çıkar. Burada, ρ cıvanın yoğunluğu, g yerçekimi ivmesi ve h serbest yüzeyden itibaren cıva sütunu yüksekliğidir.



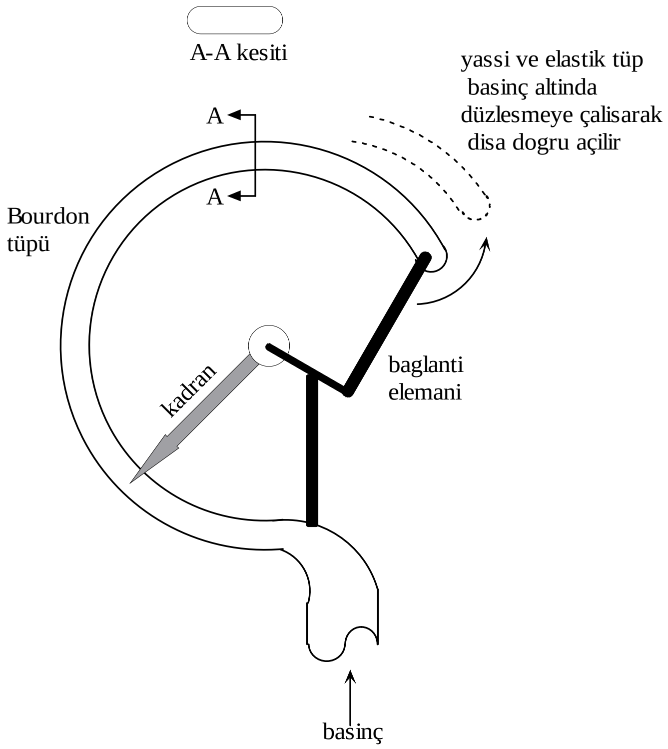
Şekil 2.11

Deniz seviyesindeki 101.325 kPa değerindeki standart atmosferik basınç 1000, 2000, 5000, 10000 ve 20000 m yüksekliklerde sırasıyla yaklaşık 90, 80, 54, 26.5 ve 5.5 kPa değerlerini alır. Bir yerdeki atmosferik basınç, basit olarak yüzey alanı başına düşen bu yerin üzerindeki hava ağırlığıdır. Fakat, atmosferik basınç yalnızca yükseklik ile değil aynı zamanda hava koşullarına bağlı olarak da değişir.

Atmosferik basıncın yükseklik ile değişiminin günlük hayatta yakından bilinen ve yaşanan etkileri vardır. Örneğin, düşük atmosferik basınçlarda su daha düşük sıcaklıklarda kaynar ve bu yüzden pişirme süresi uzar. Verilen bir sıcaklık için yüksek yerlerdeki hava yoğunluğu daha düşüktür. Dolayısıyla belirli bir hacim içerisinde daha az hava ve oksijen bulunur. Bu yüzden yüksek yerlerde daha çabuk yorulmamız ve solunum problemleriyle karşılaşmamız olağandır. Benzer şekilde 2 L silindir hacimli bir otomobil motoru, 1500 m yükseklikte sanki 1.7 L hacimli bir motor gibi çalışacaktır. Bunun nedeni basıncın %15 oranında düşmesi ve buna bağlı olarak hava yoğunluğunun da aynı oranda düşmesidir. Bu yükseklikte aynı hacimsel debide çalışan bir fan ya da kompresör %15 oranında daha az hava kütlesi basacaktır. Dolayısıyla, yüksek yerlerde belirlenen kütlesel debiyi sağlamak için daha büyük soğutma fanlarının seçilmesi gerekebilir. Yine benzer şekilde, yüksek rakımlı yerlerde yakıt alırken istasyondaki pompa hacimsel debi ölçerek yakıt pompaladığından daha düşük basınç ve dolayısıyla yoğunluktan dolayı aynı paraya daha az kütlede yakıt almış oluruz. Düşük basınç ve buna bağlı olarak düşük yoğunluk, kaldırma ve direnç kuvvetlerini de etkiler. Uçaklar, gerekli kaldırma kuvvetini oluşturmak için yüksek yerlerde daha uzun kalkış pistlerine ihtiyaç duyarlar. Ayrıca, hava direncini azaltmak ve böylece yakıt tasarrufu sağlamak için yüksek irtifalarda seyrederler.

Bourdon Tüplü Manometre

Endüstride yaygın olarak kullanılan Bourdon tüplü manometre mekanik bir basınç ölçme cihazıdır ve elastik şekil değiştirme esasına göre çalışır (Şekil 2.10). Bu cihaz, bir ucu kapalı ve kapalı olan ucu bir gösterge iğnesine (kadran) bağlı kanca (C) şeklinde eğrisel, kesit alanı yassılaştırılmış elastik bir tüpten oluşmaktadır (Şekil 2.11). Bourdon tüpü, basınca maruz kaldığında, boru gerilerek uzar, yani dışarı doğru açılarak düzleşmeye çalışır ve bu açılma miktarı bir aktarma elemanı ile göstergeye iletilir, yani uygulanan basınçla orantılı olarak gösterge kadranı hareket eder. Tüp atmosfere açık olduğunda, yani atmosferik basınca maruz kaldığında şekil değiştirmemiş haldedir ve bu durumda kadran sıfırı gösterecek şekilde cihaz kalibre edilir ve bu cihazlar gösterge basınçları ölçmek için kullanılırlar, ayrıca pozitif gösterge basınçlar yanında negatif gösterge basınçlar, yani vakum basıncını ölçmek için de kullanılırlar. Piyasada çok farklı basınç aralıklarında ve farklı birimlere göre basınç ölçen Bourdon tüplü manometreler mevcuttur, ayrıca ucuz ve güvenilirdirler. Yüksek basınçları ölçmek için ise C şekli yerine yay gibi sarımlı tüpler kullanılır.



Şekil 2.12

Şekil 2.13

2.3 Hidrostatik Kuvvetler

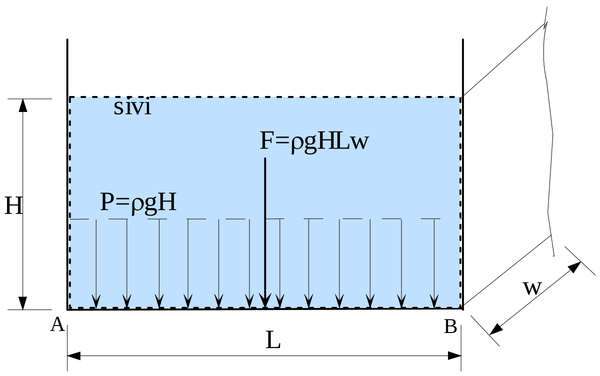
Durgun akışkan temas ettiği katı yüzeylerde hidrostatik kuvvetler meydana gelmesine sebep olur. Durgun akışkanın temas ettiği diferansiyel bir yüzey ele alalım. Bu diferansiyel yüzeye etki eden diferansiyel hidrostatik kuvvetin büyüklüğü basınç ile etki ettiği diferansiyel yüzey alanının çarpımına eşittir, yönü ise yüzeye dik ve pozitif basınç için yüzeye doğrudur. Tüm yüzeye etkiyen hidrostatik kuvvet ise bu diferansiyel kuvvetlerin toplamıdır.

$$F = \int_A P dA \tag{2.8}$$

Durgun sıkıştırılamaz bir akışkan ortamında, yani sıvıların hidrostatik şartlarında basınç derinlikle doğru orantılı değişir, yatay düzlemde ise hidrostatik basınç sabittir. Bu yüzden, yatay konumdaki düzlemsel bir yüzeye, örneğin Şekil 2.14'de verilen AB yüzeyine etki eden hidrostatik kuvvet basıncın kabın tabanında, yani yatay AB yüzeyi boyunca sabit olduğundan dolayı F = PA bağıntısı ile bulunur. Burada P basınç, Pa, A ise basınç etki yüzeyinin alanıdır, m^2.

$$F = PA = \rho gHLw$$

Kuvvetin yönü yüzeye dik ve yüzeye doğrudur, etki noktası ise basınç diyagramının kütle merkezidir. Basınç yatay düzlemde değişmediğinden dolayı düzenli bir dağılıma sahip, dolayısıyla basınç diyagramının ağırlık merkezi yüzeyin ağırlık merkezi ile aynıdır. Bu yüzden AB yüzeyine etki eden hidrostatik kuvvetin etki noktası yüzeyin ağırlık merkezidir.



Şekil 2.14

Şekil 2.15 bir tankın dik düzlemsel BC yan yüzeyine etki eden basıncın değişimini göstermektedir. Sıkıştırılamaz akışkanın basıncı durgun haldeyken derinlikle doğru orantılı olarak değiştiğinden basınç akışkan serbest yüzeyinde sıfırdan başlayarak doğrusal artarak, tabanda P=ρgH değerine ulaşır. BC yüzeyine etki eden toplam hidrostatik kuvvet, basıncın derinlikle doğru orantılı değişmesinden dolayı tüm yüzey alanı boyunca integrali alınarak bulunur.

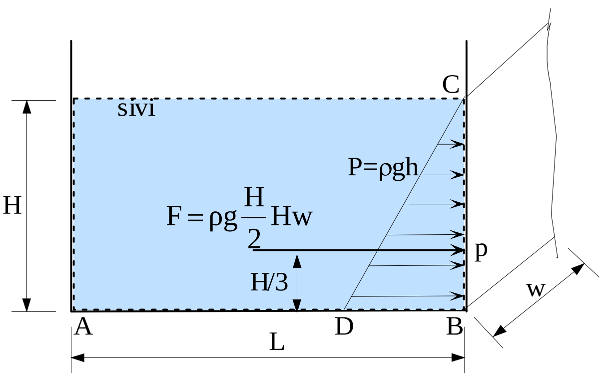
$$F = \int_A PA = \int_A \rho ghdA = \rho g \int_A hdA = \rho gw \int_0^H hdh = \rho g \frac{H^2}{2} w$$

Burada, $\int_A hdA$ alan birinci momentidir ve yüzeyin kütle merkezinin derinliği h_c ile

$$\int_A hdA = h_c A, \qquad h_c = H/2,$$

şeklinde ilişkilidir. Burada, h_c yüzeyin kütle merkezinin derinliğidir, yani kütle merkezinden sıvı serbest yüzeyine olan düşey mesafedir. Dolayısıyla, BC yan yüzeyine etki eden hidrostatik kuvvet, yüzeyin kütle merkezindeki basınç ile alanının çarpımıdır.

$$F = \rho g h_c A = P_c A \tag{2.9}$$

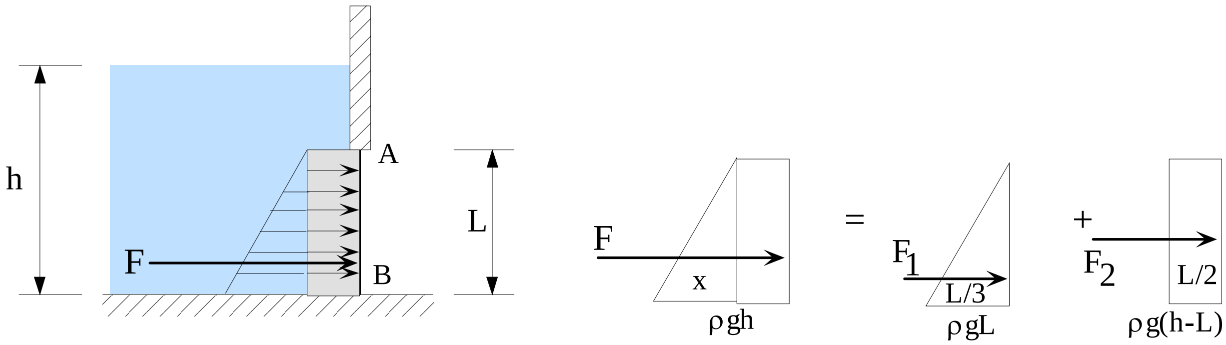


Şekil 2.15

Hidrostatik kuvvet basınç dağılım diyagramı kullanılarak da bulunabilir. Basınç diyagramının alanı birim genişliğe düşen hidrostatik kuvvetin büyüklüğünü verir, yani bu hayali basınç prizmasının hacmi yüzey üzerine etki eden toplam hidrostatik kuvvetin büyüklüğüne eşit olup kuvvetin etki noktası bu prizmanın kütle merkezidir. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, BC yan yüzeyine etki eden basıncın dağılımı üçgen prizma oluşturur.

$$F = \rho g H \frac{H}{2} w$$

Kuvvetin etki noktası, h_p, de basınç prizmasının kütle merkezidir, dolayısıyla etki noktasının düşey doğrultuda tabandan mesafesi $x_p = H/3$’dür.



Şekil 2.16

Şekil 2.16'da gösterilen AB yüzeyine etki eden hidrostatik kuvveti ve etki noktasını yine basınç diyagramını kullanarak bulalım. Hidrostatik kuvvet,

$$F=\rho g h_c A=\rho g[(h-L/2]Lw$$

Hidrostatik kuvvetin etki noktası ise daha önce de bahsedildiği gibi basınç diyagramının kütle merkezidir. Fakat bu örnekte problemin kolay çözümü için basınç diyagramını basit geometrik şekiller (dikdörtgen ve üçgen) oluşturacak şekilde 2 bileşene ayırmamız çözümü kolaylaştıracaktır. Bu durumda toplam hidrostatik kuvveti de 2 bileşene ayırmamız gerekiyor, F_1 ve F_2.

$$F=F_1+F_2=\rho g\frac{L}{2}Lw+\rho g(h-L)Lw$$

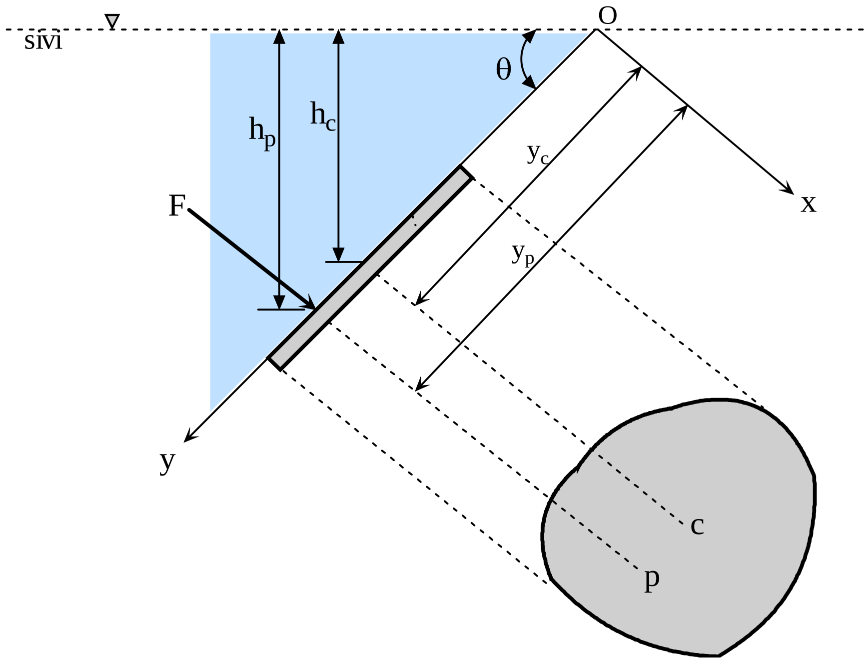
Üçgen prizmatik basınç diyagramının kütle merkezi tabandan L/3 mesafededir, dikdörtgen prizmatik basınç diyagramının kütle merkezi ise orta noktası, yani tabandan L/2 mesafededir. Toplam hidrostatik kuvvetin etki noktası, yani basınç diyagramının kütle merkezi tabandan x mesafede olsun, etki noktasının yani basınç merkezinin tabandan olan mesafesi tabana göre toplam moment eşitliği kullanılarak bulunabilir.

$$F.x=F_1\frac{L}{3}+F_2\frac{L}{2}$$

$$\rho g[(h-L).x+\frac{L}{2}]Lw = \rho g\frac{L}{2}Lw\frac{L}{3}+\rho g(h-L)Lw\frac{L}{2}$$

Basınç merkezinin derinliği ise $h_p = h-x$

Şekil 2.11'de gösterilen sıvı ortamı içinde herhangi bir derinlikte gelişigüzel şekilli eğimli düz bir yüzey üzerindeki herhangi bir noktadaki hidrostatik basınç $P = \rho gh = \rho gy\mathrm{Sin}\theta$ olur. Burada, h göz önüne alınan noktanın serbest yüzeyden olan düşey mesafesi yani derinliğidir, y ise bu noktanın x-eksenine (yani o noktasına) olan y- doğrultusundaki uzaklığıdır. Yüzey üzerindeki herhangi bir diferansiyel alana etki eden hidrostatik kuvvet ise $dF = PdA = \rho ghdA$ ve yönü yüzeye dik ve yüzeye doğrudur. Tüm yüzeye etki eden toplam hidrostatik kuvvet ise yüzey üzerinde diferansiyel alanlara etki eden hidrostatik kuvvetlerin toplamıdır, ve diferansiyel dA alanına etki eden PdA kuvvetinin tüm yüzey alanı boyunca integre edilmesiyle bulunur, yönü yine etki yüzeyine dik ve yüzeye doğrudur.



Şekil 2.17

$$F = \int_A PdA \qquad (2.9)$$

$$F = \int_A \rho ghdA = \int_A \rho gySin\theta dA$$

burada, h=ySinθ, ve sabit ρg ve θ için

$$F = \rho gSin\theta \int_A ydA$$

Yukarıdaki denklemde görülen integral, alanın x eksenine göre ilk momenti, yani alan birinci momentidir, ve yüzeyin ağırlık merkezinin y koordinatı ile,

$$\int_A ydA = y_c A \qquad (2.10)$$

şeklinde ilişkilidir. Burada, y_c yüzeyin ağırlık merkezinin sıvı serbest yüzeyi üzerindeki O noktasından geçen x-eksenine mesafesidir, yani eğik düzlemdeki derinliğidir. Dolayısıyla denklem ? aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$F = \rho gAy_c Sin\theta \qquad (2.11)$$

ve $h_c = y_c Sin\theta$ eşitliğini kullanarak,

$$\boxed{F = \rho gh_c A = P_c A} \qquad (2.12)$$

elde edilir. Burada, h_c yüzeyin ağırlık merkezinden sıvı serbest yüzeyine olan düşey mesafedir, yani yüzeyin ağırlık merkezinin derinliğidir, P_c ise yüzeyin ağırlık merkezindeki basınçtır.

Sonuç olarak, düzlemsel bir yüzeye etki eden toplam hidrostatik kuvvetin büyüklüğü ağırlık merkezindeki basınç ile yüzey alanının çarpımıdır. Dikkat edilecek olursa, kuvvetin büyüklüğü θ açısı ile bağımsız, sadece akışkanın özgül ağırlığı, etki yüzey alanı ve alanın ağırlık merkezinin derinliğine bağlıdır. Fakat toplam hidrostatik kuvvetin etki noktası basıncın derinlikle artmasından dolayı basınç dağılımı düşey doğrultuda düzenli olmadığından genellikle yüzeyin ağırlık merkezi değildir, daha aşağısındadır. Etki noktasını bulmak için, yüzey üzerindeki diferansiyel kuvvetlerin momentlerinin toplam kuvvetin momentine eşitliğinden yararlanabiliriz. Toplam kuvvet $p(x_p,y_p)$ noktasında etki ediyor olsun, x ekseni etrafında momentleri eşitlediğimizde,

$$y_p F = \int_A P y dA \tag{2.13}$$

$$y_p F = \int_A \rho g h y dA$$
$$= \rho g \mathrm{Sin}\theta \int_A y^2 dA = \rho g I_x \mathrm{Sin}\theta$$

sonucu elde edilir. Burada, y_p basınç merkezinin x-ekseninden uzaklığı ve

$$I_x = \int_A y^2 dA \tag{2.14}$$

x-eksenine göre alan ikinci momentidir, alan atalet momenti olarak da adlandırılır. Alan ikinci momentleri genellikle alanın ağırlık merkezinden geçen bir eksene göre verilir. Paralel iki eksene göre olan alan ikinci momentleri, paralel eksen teorisine göre

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

şeklinde ilişkilidir. Burada I_{xc} alanın ağırlık merkezinden geçen x-eksenine göre alan ikinci momenti (alan momenti) ve y_c ağırlık merkezinin y-koordinatı yani iki paralel eksen arasındaki mesafedir. Sonuç olarak etki noktası ile ağırlık merkezi arasındaki eğik düzlemdeki mesafe

$$y_p - y_c = \frac{I_{xc}}{y_c A} \qquad\qquad y_p = \frac{I_x}{y_c A}$$

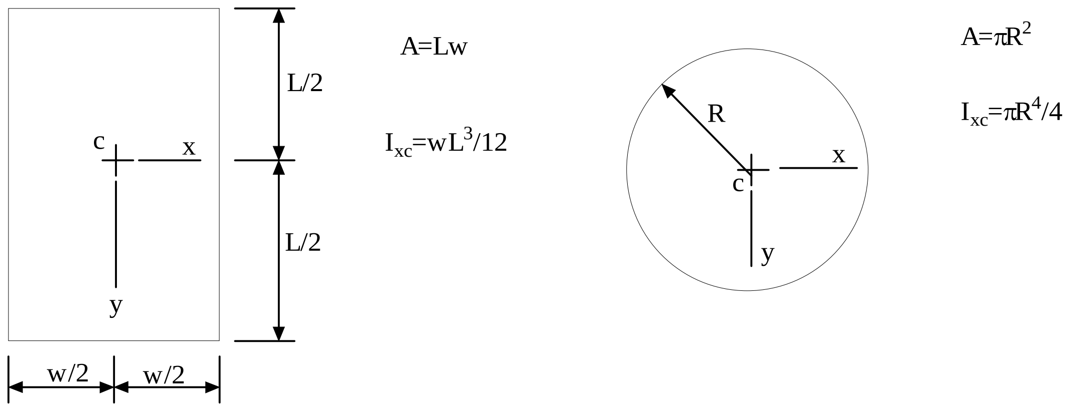
olur. Dolayısıyla etki noktasının eğik düzlemde sıvı yüzeyine mesafesi

$$\boxed{y_p = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A}} \tag{2.15}$$

olur. y_p'nin bulunmasıyla basınç merkezinin derinliği $h_p = y_p \mathrm{Sin}\theta$ ifadesinden belirlenir. Benzer olarak, etki noktasının z koordinatı (sayfa düzlemine dik koordinatı) z_{cp}, aşağıdaki gibi bulunur,

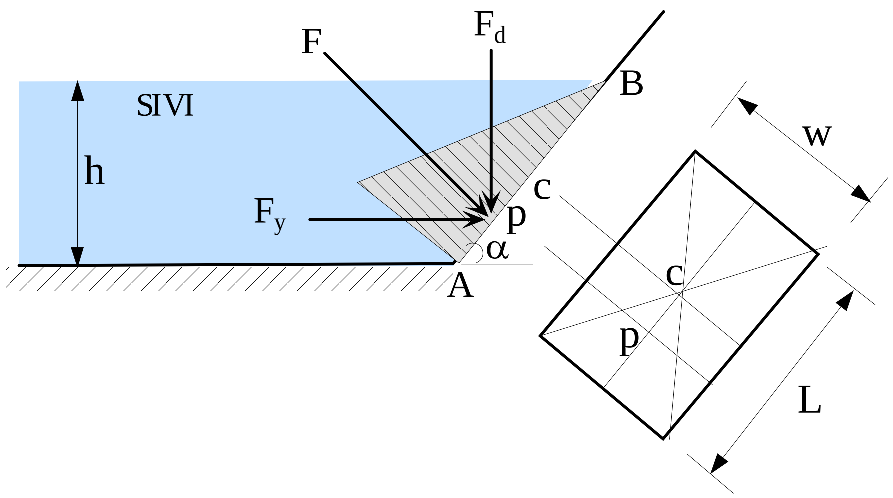
$$z_p = z_c + \frac{I_{yc}}{y_c A}$$

ve (z_p,y_p) koordinatlarına sahip etki noktası p basınç merkezi olarak tanımlanır. En sık karşılaşılan yüzey geometrik şekilleri, dikdörtgen ve daire için I_{xc} değerleri Şekil 2.12'de verilmiştir.



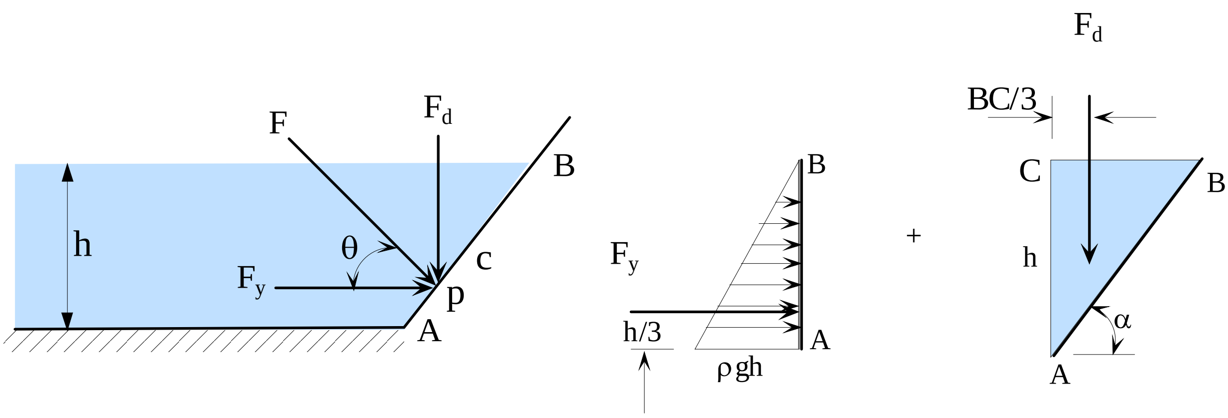
Şekil 2.18

Diğer bir yaklaşımla, eğik düz bir yüzeye etki eden toplam hidrostatik kuvveti yatay ve düşey olmak üzere iki bileşene ayırabiliriz. Yatay bileşeni, eğik yüzeyin düşey doğrultudaki izdüşümüne etki eden kuvvete eşit olur.



Şekil 2.19

$$F_y = \rho g \frac{h}{2} hw, \;\; \text{burada } h = L\text{Sin}\alpha$$



Şekil 2.20

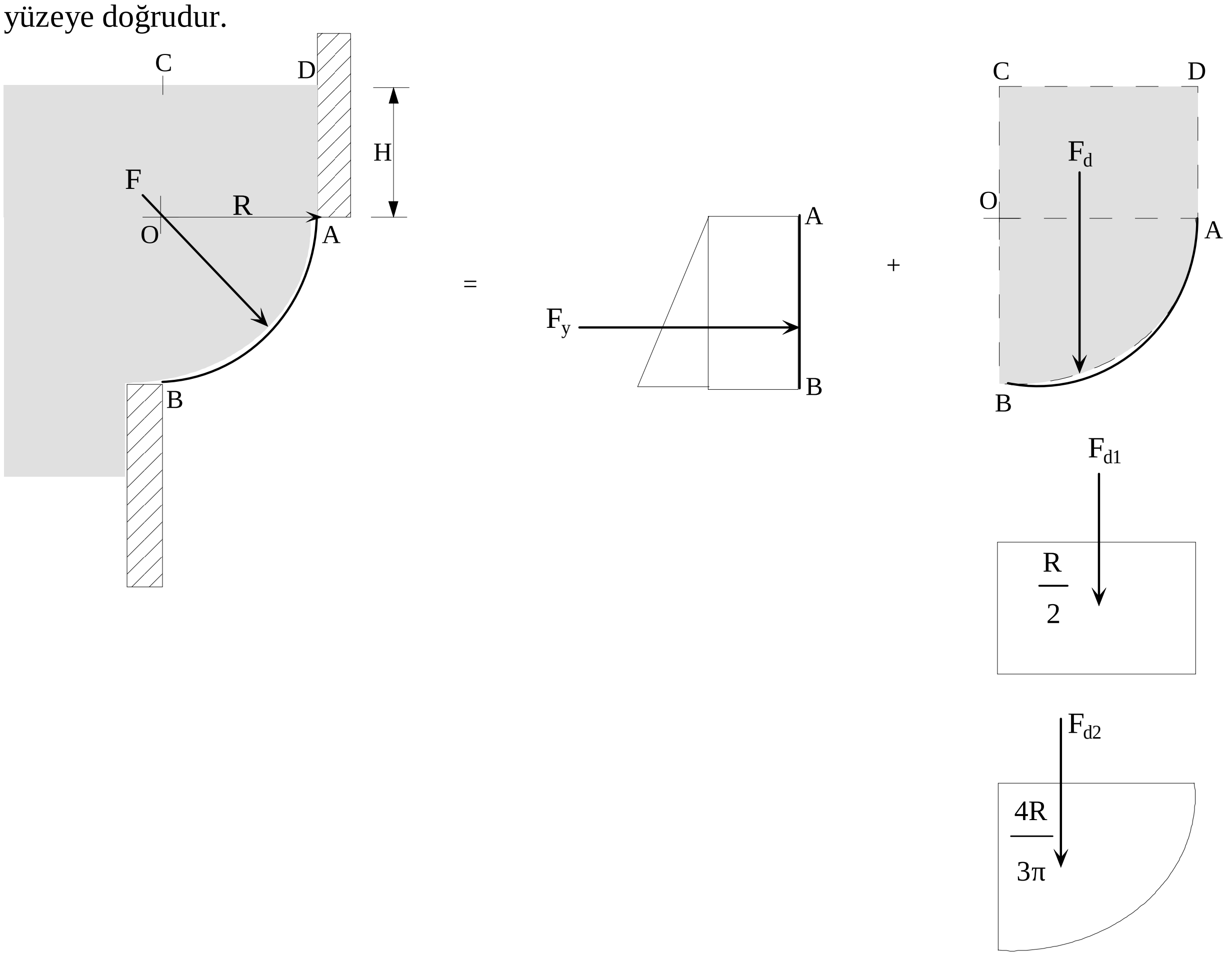
Düşey bileşeni ise yüzeyin düşey doğrultuda, serbest yüzeye kadar kapsadığı hacim içinde kalan akışkanın ağırlığıdır.

$$F_d = mg = \rho g \forall = \rho g \frac{1}{2} h \frac{h}{\tan\alpha} w$$

Toplam (bileşke) kuvvet ise yatay ve düşey bileşenlerin bileşkesidir.

$$F = \sqrt{F_y^2 + F_d^2} \qquad (2.16)$$

Toplam kuvvet yatay ve düşey basınç diyagramlarının ağırlık merkezlerinin kesiştiği noktadan yüzeye dik ve yüzeye doğru etki eder. Bileşke kuvvetin etki noktasının tam konumu uygun bir noktaya göre moment alınarak belirlenebilir. Etki yönü ise yatayla yaptığı açı $\theta = \tan^{-1}\frac{F_d}{F_y}$ ile yüzeye doğrudur.



Şekil 2.21

Eğrisel yüzeylere etki eden hidrostatik kuvveti bulmak için direkt integral metodunu kullanmayalım, çünkü eğrisel yüzey boyunca yönleri değişen basınç kuvvetlerinin integre edilmesini gerektirdiğinden dolayı bir hayli zordur. Karmaşık yüzey şekillerinden ötürü basınç diyagramı yaklaşımı da bu durumda kolay değildir. Eğrisel bir yüzey üzerindeki bileşke hidrostatik kuvveti belirlemenin en kolay yolu, bu kuvveti yatay ve düşey bileşenlerine ayırarak incelemektir. Şekil 2.16'de gösterilen R yarıçaplı çeyrek çember şeklindeki AB eğrisel yüzeye etki eden hidrostatik kuvvetin yatay bileşeni, yüzeyin düşey düzlemdeki izdüşümüne etki eden hidrostatik kuvvete eşittir, ayrıca etki noktası olarak da eşdeğerdir.

$$F_y = \rho g h_c A = \rho g(h+R/2)Rw$$

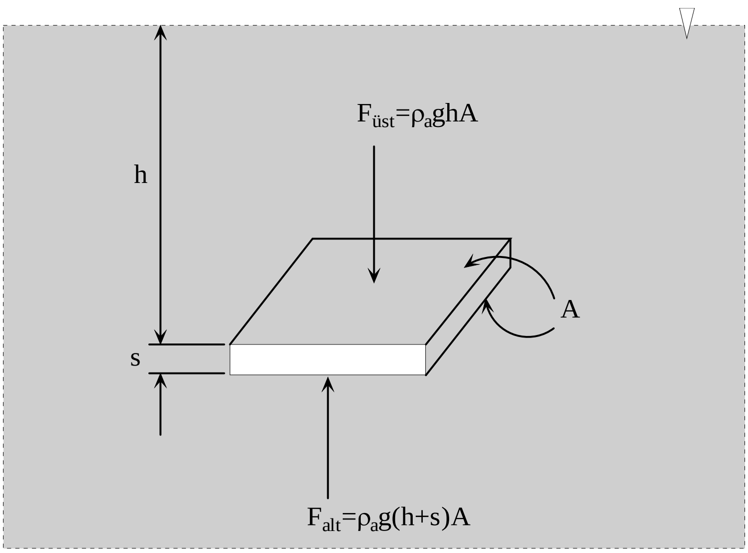
Düşey bileşeni ise AB çeyrek çember şeklindeki eğrisel yüzeyin akışkan serbest yüzeyine kadar düşey doğrultuda kapsadığı akışkan bloğunun ağırlığına eşittir.

$$F_d = mg = \rho g \forall = \rho g(Rh+\pi R^2/4)w$$

Toplam kuvvet yatay ve düşey basınç diyagramlarının ağırlık merkezlerinin kesiştiği noktadan yüzeye dik ve yüzeye doğru etki eder.?

2.4 Kaldırma Kuvveti

Sıvı içerisine bırakılan bir cismin havada olduğundan daha hafif hissedilmesi veya bazı cisimlerin suda yüzmesi gibi benzer gözlemler bir akışkan içerisine bırakılan cisme yerçekimini tersi yönünde yani yukarı doğru bir kuvvet uygulandığını göstermektedir. Cismi kaldırmaya çalışan bu kuvvete kaldırma kuvveti denir ve F_K ile simgelenir. Kaldırma kuvveti, bir akışkan içerisindeki basıncın derinlikle artmasından kaynaklanır. Şekil ?'de gösterilen ρ_a yoğunluklu bir akışkan içerisinde serbest yüzeye paralel olarak belli bir derinlikte duran s kalınlığındaki düz bir plakayı ele alalım. Plakanın üst ve aynı zamanda alt yüzey alanı A ve serbest yüzeye uzaklığı, yani derinliği h olsun. Plakanın üst ve alt yüzeylerindeki basınçlar sırasıyla $\rho_a gh$ ve $\rho_a g(h+s)$ olur. Hidrostatik kuvvetler etki yüzeyine dik ve yüzeye doğru etki ettiklerinden, plakanın üst ve alt yüzeylerine etki eden kuvvetler ters yönlerdedir. Bu iki kuvvet arasındaki fark, plaka üzerine etki eden düşey doğrultudaki bu net kuvvet kaldırma kuvvetidir ve yukarı yönlüdür.



Şekil 2.22

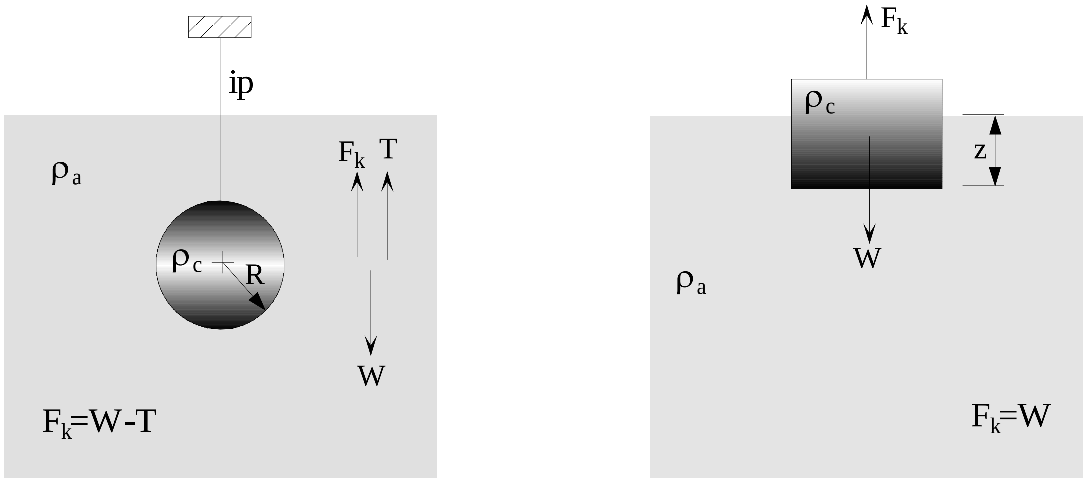
Sonuç olarak, eğer bir cisim tamamen veya kısmen bir akışkan içine batmış ise cisim üzerine düşey doğrultuda etki eden hidrostatik kuvvetlerin neti veya toplamı kaldırma kuvveti olarak tanımlanır.

$$F_K = F_{alt} - F_{üst} = \rho_a g(h+s) - \rho_a gh = \rho_a ghA = \rho_a g \forall \quad (2.17)$$

Bu bağıntıda $\forall$ =sA plakanın hacmidir. Öte yandan $\rho_a g \forall$, hacmi plakanın hacmine eşit olan sıvının ağırlığıdır. Buna göre plaka üzerine etki eden kaldırma kuvveti, plaka tarafından yeri değiştirilen sıvının ağırlığına eşittir sonucuna varırız. İşte, Archimedes, sıvıya daldırılan bir cismin hacminin, yapısal biçimi ne olursa olsun, taşırdığı veya ötelediği sıvının hacmine eşit olduğunu ortaya koymuştur. Archimedes'in ikinci gözlemi ise bir cisim sıvıya daldırıldığında taşırdığı veya ötelediği sıvının ağırlığınca ağırlığından yitirir. Dolayısıyla, kaldırma kuvveti, F_K, akışkan içine tamamen veya kısmen batmış bir cismin ötelediği yani cisim tarafından yeri değiştirilen veya cismin batan hacminin kapsadığı akışkanın ağırlığına eşittir, ve yönü yerçekimi ivmesinin tersinedir, yani düşey doğrultuda yukarıya doğrudur. Ayrıca, kaldırma kuvvetinin, cismin sıvının serbest yüzeyinden olan mesafesinden yani derinliğinden ve cismin yoğunluğundan bağımsız olduğuna dikkat ediniz.

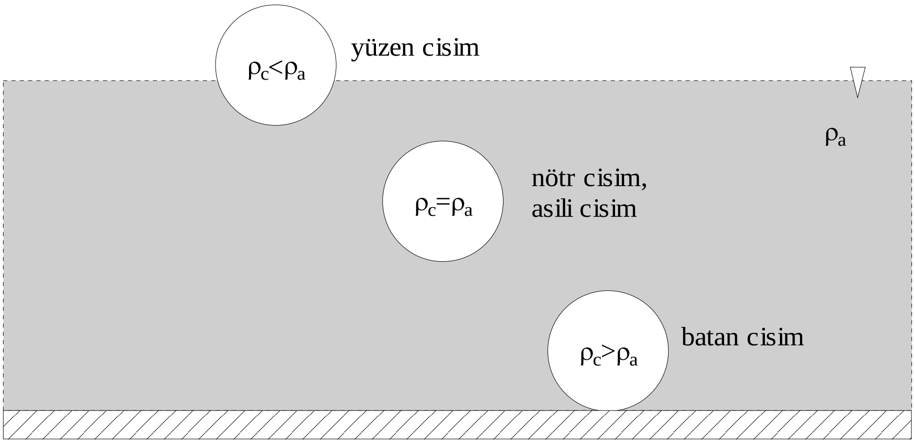
$$F_K = \rho_a g \forall_b \quad (2.18)$$

Burada, ρ_a akışkanın yoğunluğu, kg/m^3, ve $\forall_b$ cismin batan kısmının hacmidir, m^3. Kaldırma kuvvetinin etki noktası kaldırma merkezi olarak adlandırılır ve batan kısmın ağırlık merkezidir.



(a) Şekil 2.23 (b)

Yüzen bir cismin batan kısmının hacminin, cismin toplam hacmine oranı, cismin ortalama yoğunluğunun akışkanın yoğunluğuna oranı olmaktadır. Yoğunluk oranının 1 veya daha büyük olması durumunda yüzen cismin tamamen batmış halde olacağına dikkat ediniz. Yüzen veya batmış cisimler için şunlar söylenebilir: (1) Eğer cismin yoğunluğu içine daldırıldığı akışkanın yoğunluğuna eşitse cisim bırakıldığı noktada hareketsiz kalır, yani akışkan içerisinde asılı vaziyette kalır ve durum nötr olarak tarif edilir. (2) Cismin yoğunluğu akışkanın yoğunluğundan büyükse cisim batar. (3) Cismin yoğunluğu akışkanın yoğunluğundan küçükse bu durumda cisim kısmen batar, yani yüzer.



Şekil 2.24

Şekil 2.23(a)'da gösterilen sıvıdan daha yoğun bir cisim sıvıya daldırıldığında dibe batmaması için bir iple sıvı içinde asılı vaziyette hareketsiz tutulduğunu düşünelim, bu durumda cisim üzerinde Newton'un ikinci kanununu uygularsak, cisim hareketsiz olduğundan ivmesi sıfırdır ve cisim üzerindeki kuvvet dengesi aşağıdaki gibi olur.

$$T+F_K = W$$

$$F_K = W-T \qquad (2.19)$$

Burada, F_K kaldırma kuvveti, W cismin ağırlığı (havadaki), T ise ipteki gerilme kuvveti, bir başka ifadeyle cismin sudaki ağırlığıdır. Öyleyse, cismin havadaki ağırlığı ile sudaki ağırlığı arasındaki fark cisim üzerine etki eden kaldırma kuvvetini verir. Şekil 2.23(b)'de gösterilen kısmen batmış, yani yüzen, bir cisim için Newton'un ikinci kanununu uyguladığımızda kaldırma kuvvetinin cismin ağırlığına eşit olduğunu görürüz.

$$F_K = W$$

$$\rho_a g \forall_b = \rho_c g \forall_c \qquad (2.20)$$

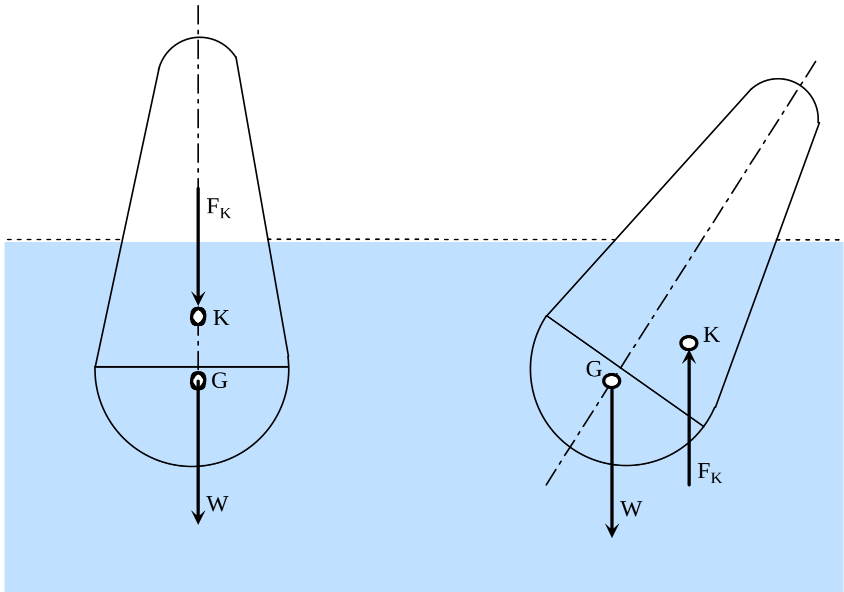
Burada, ρ_c cismin yoğunluğu, kg/m^3, $\forall_c$ de cismin hacmidir, m^3.

Kaldırma kuvveti akışkanın yoğunluğu ile orantılıdır. Gazların yoğunlukları sıvılara kıyasla çok düşük olduklarından gazlar tarafından uygulanan kaldırma kuvveti genelde ihmal edilir.

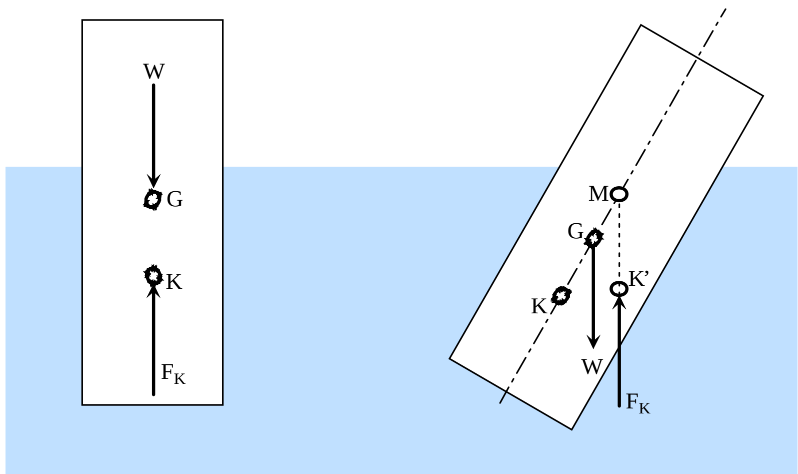
2.5 Denge

Kaldırma kavramının önemli bir uygulaması da yüzen veya dalmış cisimlerin kararlılığının belirlenmesidir. Bu konu gemi ve denizatlıların tasarımında büyük önem taşır. Yüzen bir cisim üzerine dengesini bozacak herhangi bir kuvvet uygulandığında eski denge konumuna tekrar geri dönecek geri çağırma kuvveti doğuyorsa cisim dengededir ve bu durum kararlıdır. Cismin bozulan dengesini ne geri kazanmaya ne de daha fazla kaybetmeye eğilimi yoksa bu durum nötr kararlılık gösterir. Çok küçük dahi olsa herhangi bir bozucu etki cismin dengesini bozduğunda eski konumuna dönemez, tersine ondan uzaklaşır ise bu durumda cisim dengede değildir, kararsızıdır.

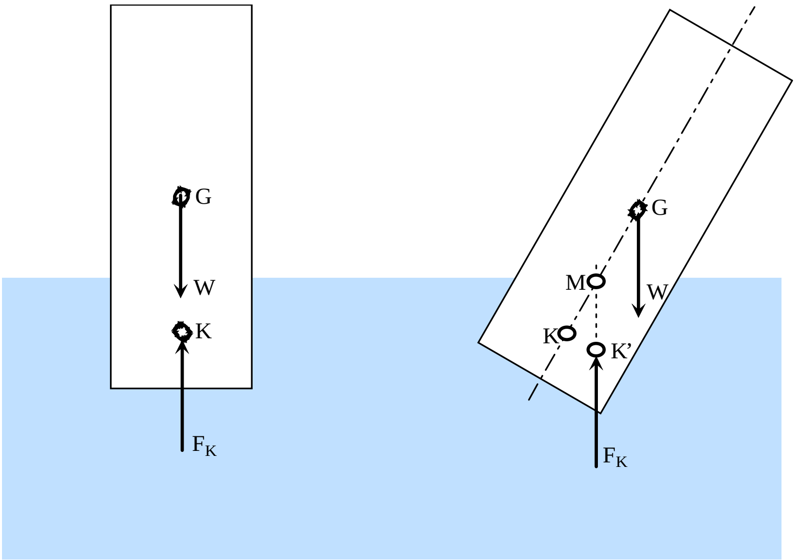
Statik denge halinde dalmış veya yüzen bir cisim üzerindeki ağırlığı ve kaldırma kuvveti birbirlerini dengeler ve bu tür cisimler kendilerine özgü biçimde düşey yönde kararlıdır. Dalmış veya yüzen cisimlerin kararlılığı, cismin ağırlık merkezi G ile batan hacmin ağırlık merkezi olan kaldırma merkezi K’nin birbirlerine göre konumlarına bağlıdır. Cismin ağırlık merkezi kaldırma merkezinden aşağıda ise cismin bir miktar yan yatması durumunda cisim üzerinde meydana gelen moment cismin tekrar eski pozisyonuna gelmesi yönünde bir etki oluşturur, bu durumda cisim tekrar eski pozisyonuna gelme eğilimi gösterir. Bu durum kısmen yüzen bir hacıyatmaz örneğiyle Şekil 2.25(a)’da gösterilmiştir. Eğer cismin ağırlık merkezi kaldırma merkezinden aşağıda ise cisim daima dengededir, yani kararlıdır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.25

Cismin ağırlık merkezi kaldırma merkezinden yukarda ise cismin yan yatması durumunda cisim üzerinde meydana gelen moment cismin yan yatma yani devrilme eğilimini artırıcı bir etki doğurur. Bu durumu açıklayan yüzen silindirik bir cisim örneği Şekil 2.25(b) ve (c)'de verilmiştir.. Cismin ağırlık merkezi kaldırma merkezinden yukarda ise cismin dengesini koruması zorlaşır. Fakat cismin ağırlık merkezi kaldırma merkezinden yukarıda olduğu durumlarda da dengede olabilir. Şekil 2.25(b)'de verilen ağırlık merkezinin kaldırma merkezinden yukarda olan yüzen bir cisim bir miktar yan yattığında cismin kaldırma merkezinin konumu değişecektir. Bu durumda meydana gelen kaldırma merkezi K' cismi tekrar denge konumuna getirebilecek cismin ağırlık merkezine yeterli bir mesafede ise cisim yeniden denge durumuna gelir. Bu mesafe yan yatmadan önceki kaldırma kuvveti ile yan yatmadan sonraki kaldırma kuvvetinin etki doğrultularının kesişim noktası ile cismin ağırlık merkezi arasındaki mesafedir. Bu mesafe GM, öte-merkez yüksekliği olarak adlandırılır ve konumu M ile gösterilir. Cismin yan yatmasına veya devrilmesine sebep olan moment ekseninin konumudur ve öte-merkez olarak adlandırılır. Eğer GM mesafesi pozitif ise yani öte-merkez M, ağırlık merkezinden G yukarda ise cisim kararlıdır (Şekil 2.25(b), öte yandan GM mesafesi negatif, yani öte-merkez M, ağırlık merkezinin G altında ise cisim kararsızdır (Şekil 2.25(c)). Öte-merkez ile kaldırma merkezi arasındaki mesafe, KM, aşağıdaki bağıntı ile bulunur.

$$KM = \frac{I_o}{\forall_b} \qquad (2.21)$$

Burada, I_o cismin sıvı akışkan ortamı içinde kalan kısmın atalet momentidir, $\forall_b$ ise batan kısmın hacmidir. Bu durumda öte-merkez yüksekliği ise aşağıdaki gibi olur.

GM=KM-BG

$$GM = \frac{I_o}{\forall_b} - BG \qquad (2.22)$$

Kararsız durumda, eğik haldeki cisme etkiyen ağırlık ve kaldırma kuvvetleri, geri çağırıcı moment yerine bir devirici moment meydana getirir ki bu da cismin alabora olmasına yol açar.

Öte-merkez yüksekliği yani GM mesafesi, kararlılığın bir ölçüsüdür ve ne kadar büyükse yüzen cisim de o denli kararlı olur.

2.4 Katı Cisim Hareketi

Süt ve akaryakıt gibi çoğu sıvı tankerlerle taşınır. İvmelenen bir tankerde sıvı geriye doğru yığılır ve başlangıçta bazı çalkalanmalar olur. Fakat daha sonra özellikle sabit ivmeli hareket konumu korunduğunda çalkantılar son bulur ve yeni bir sıvı serbest yüzeyi meydana gelir ve ivmeli hareketin etkisiyle meydana gelen yığılmalardan dolayı bu serbest yüzey eğimli hal alır. Bu esnada her bir akışkan parçacığı aynı ivmeye sahiptir ve tüm sıvı gövdesi tek bir vücut gibi, yani katı bir cisim gibi hareket eder. Sıvı tabakaları arasında bağıl hareket meydana gelmediği gibi akışkan üzerinde kayma gerilmeleri de oluşmaz ve sonuç olarak akışkan şekil değiştirmez, yani deformasyona uğramaz. İşte, sıvıların ivmeli ve ivmesiz olarak herhangi bir kayma gerilmesi meydana gelmeksizin ki hareketi katı cisim hareketi olarak tanımlanır ve akışkanlar statiği ile ilgili bağıntılarla benzer şekilde ilişkilidir. Akışkanlar statiğinde Kısım 2.2'de incelediğimiz gibi kartezyen koordinatlarda z ekseninin düşey doğrultu ve yukarı doğru, x ve y yönlerini de yatay düzlemde kabul ederek dikdörtgen prizması şeklinde diferansiyel bir akışkan elemanı ele alalım (Şekil 2.1). Akışkanların katı cisim hareketinde de kayma gerilmeleri meydana gelmediği için akışkanlar statiğindeki durgun bir akışkan elemanı gibi deformasyona uğramamış bir diferansiyel akışkan elemanı dikkate alabiliriz. Bu elemana kısım 2.2'de olduğu gibi Newton'un ikinci kanununu uyguladığımızda,

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a_x \qquad \frac{dP}{dy} = -\rho a_y \qquad \frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z) \tag{2.23}$$

bağıntıları elde edilir. Burada a_x, a_y ve a_z sırasıyla x, y ve z yönlerindeki ivmelerdir. Durgun akışkanlar için bu bağıntılardan varılan sonuçları irdelemiştik. Kısaca tekrar edersek, durgun halde olan veya doğrusal bir yörüngede sabit hızla hareket eden akışkanlar için tüm ivme bileşenleri sıfır olduğundan aşağıdaki bağıntılar elde edilir ve

$$\frac{dP}{dx} = 0 \qquad \frac{dP}{dy} = 0 \qquad \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

bu da durgun haldeki akışkanlarda veya sabit hızla doğrusal yörüngede hareket eden akışkanlarda basıncın yatay düzlemde yani x ve y doğrultularında sabit kaldığını ve yerçekiminin bir sonucu olarak yalnızca düşey doğrultuda değiştiğini göstermektedir.

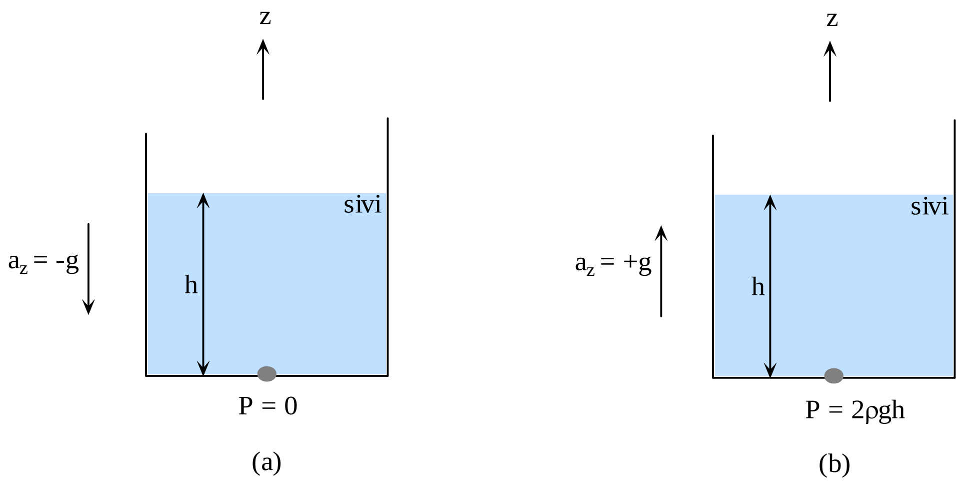
Serbest düşen bir cisim yerçekimi etkisiyle düşey doğrultuda aşağı doğru ivmelenir. Hava direnci ihmal edildiğinde cismin ivmesi yerçekimi ivmesine eşit olur ve herhangi bir yatay doğrultuda ivmesi sıfırdır. Dolayısıyla içinde sıvı bulunan ve serbest yüzeyi atmosfer basıncına maruz kalan bir tank yerçekimi ivmesiyle düşey doğrultuda aşağı doğru hareket ettirildiğinde tankın içindeki akışkan sıfır yerçekimli bir ortamdaymış gibi davranır ve akışkan üzerinde basınç farkı meydana gelmez, dolayısıyla tankın tabanındaki etkin basınç sıfır olur (Şekil ?a).

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z) = -\rho(g - g) = 0 \rightarrow P_2 - P_1 = 0 \rightarrow P_2 = 0$$

Hareketin yönü ters çevrildiğinde, yani tank yerçekimi ivmesiyle düşey doğrultuda yukarı doğru hareket ettirildiğinde z yönündeki basınç gradyeni

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z) = -\rho(g + g) = -2\rho g$$

olur (Şekil 2?b). Bu yüzden, akışkan içinde düşey doğrultuda basınç farkı meydana gelir ve akışkanın durgun halindeki durumuna kıyasla iki kat olur. Dolayısıyla tankın tabanındaki etkin basınç $P_2 = 2\rho gh$ olur.



Şekil 2.26

Kısmen sıvıyla dolu bir tankın doğrusal bir yörüngede sabit ivme ile hareketini ele alalım (Şekil ?). Hareket doğrultusu x-ekseni, ve buna düşey doğrultuda dik olan eksen de z-ekseni olsun. Bu durumda y doğrultusunda bir hareket olmayıp bu yöndeki ivme bileşeni a_y sıfırdır ve x-z düzleminde ivmeli katı cisim hareketi yapan akışkanlar için hareket denklemleri

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a_x \qquad \frac{dP}{dy} = 0 \qquad \frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z) \tag{2.24}$$

ve sıvı içindeki herhangi iki nokta arasındaki basınç farkı Denklem 2.3.6'dan

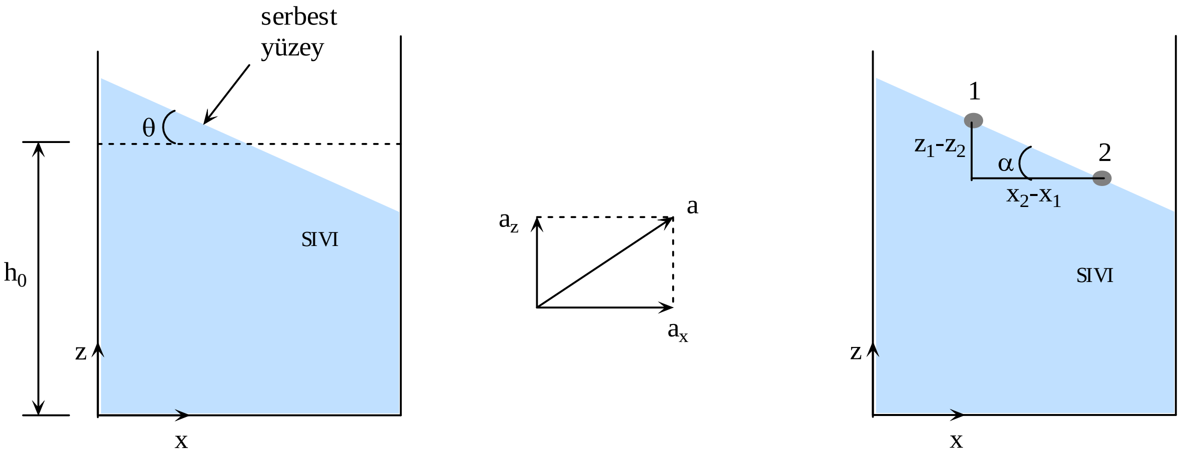
$$dP = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz \tag{2.25}$$

olur ve sabit yoğunluklu akışkanlar 1 ve 2 noktaları arasında integrali alınarak

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x (x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

$$P_2 - P_1 = -{}^\circ a_x \Delta x - {}^\circ (g + a_z)\Delta z \tag{2.26}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.27

Doğrusal sabit ivmeli katı cisim hareketi yapan sıkıştırılamaz akışkanların serbest yüzeyi bir düzlemdir ve eğimlidir. x yönündeki ivme sıfır olmadıkça da bu serbest yüzey eğiktir. Serbest yüzeyde olduğu gibi, serbest yüzeye paralel yüzeylerde de sabit basınç sabittir ve bu sabit basınç yüzeyleri izobar olarak adlandırılır. 1 ve 2 noktalarını serbest yüzey üzerinde alırsak, her ikisi de atmosferik basınca eşit olacağından

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{a_x}{g + a_z}$$

dolayısıyla, izobarların eğimleri için

$$\tan\alpha = \frac{a_x}{g + a_z} \qquad (2.27)$$

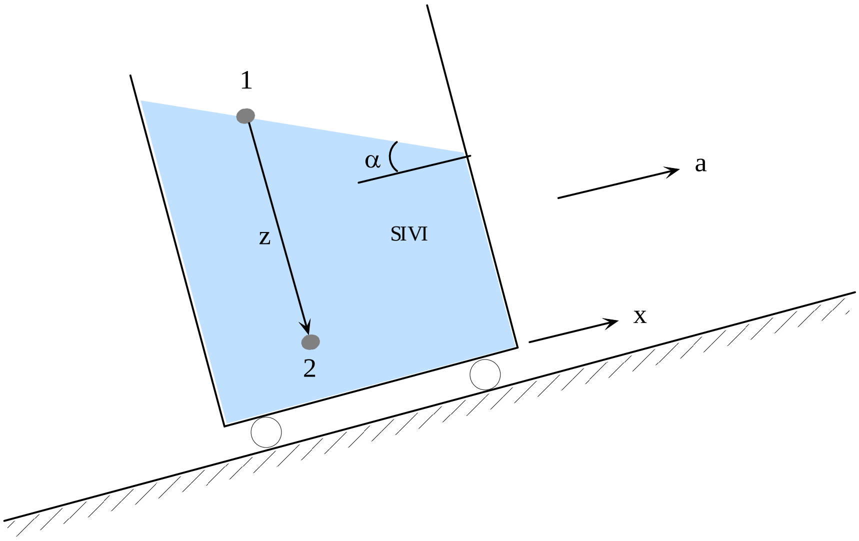
bağıntısı elde edilir. Burada α izobarların, sabit basınç yüzeylerinin yani serbest yüzeyin yatayla yaptığı açıdır. Sıvı içindeki herhangi bir noktadaki basıncı bulmak için ise 1 noktasını atmosferik basıncın hakim olduğu, yani serbest yüzey üzerinde alırsak, 2 noktasını da sıvı içerisinde herhangi bir noktada alırsak, 1 noktasındaki etkin basınç sıfır olacağından sıvı içerisindeki herhangi bir noktadaki basınç

$$P = -\rho a_x \Delta x - \rho(g + a_z)\Delta z \qquad P = \rho G s, \qquad G^2 = a^2 + g^2 \qquad (2.28)$$

olur. Ayrıca, sıkıştırılamazlığa ilaveten kütlenin korunumu ilkesi de akışkan hacminin ivmelenmeden önce ve ivmelenme esnasında sabit kalmasını gerektirir. Dolayısıyla, bir taraftaki akışkan seviyesinin yükselişi, öte taraftaki seviye düşmesiyle dengelenmelidir.

Hareket doğrultusunu her zaman x-ekseni olarak kabul edersek, buna dik olan düşey z doğrultudaki ivme de sıfır olacağından, serbest yüzeyin hareket doğrultusu ile yaptığı açı için

$$\boxed{\tan\sim = \frac{a}{g}} \qquad (2.29)$$



Şekil 2.28

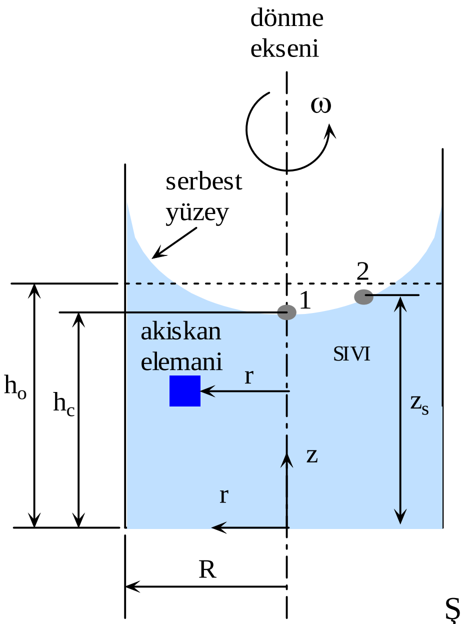
ve buna ilaveten, sıvı içindeki herhangi bir noktadaki basınç için, 2 noktasını serbest yüzey üzerinde aldığımız 1 noktasının düşey doğrultusunda aldığımızda Δx de sıfır olacağından, değişen serbest yüzeye göre oluşan derinliğe bağlı olarak

$$\boxed{P = \rho g z} \tag{2.30}$$

bağıntısı elde edilir (Şekil 2.28).

Silindirik Bir Kapta Dönme Hareketi

Sıvıyla kısmen dolu silindirik düşey bir kabın kendi ekseni etrafında sabit ω açısal hızıyla döndürülmesi ile meydana gelen merkezkaç kuvvetinin etkisiyle sıvının dışa doğru savrularak serbest yüzeyi içbükey bir şekil alır (Şekil 2.29). Bu durum zorlanmış çevri hareketi olarak adlandırılır. Başlangıçtaki geçici durumdan sonra sıvı, kapla beraber katı cisim hareketi yapar, dolayısıyla herhangi bir şekil değiştirme olmadığından bir kayma gerilmesi de oluşmaz ve her bir akışkan parçacığı aynı açısal hızla hareket eder. Kasırgalarda meydana gelen hortum olayı da buna benzer bir durumdur.

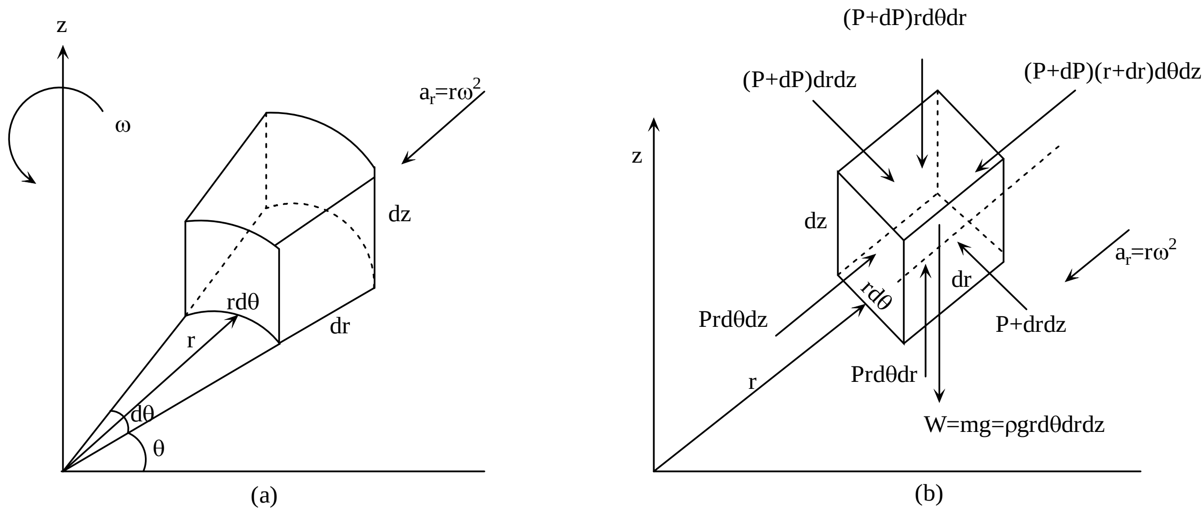


Şekil 2.29

Kabın şekli silindirik olduğundan ve akışkan parçacıkları dairesel hareket yaptığından dolayı bu problem en iyi silindirik koordinatlarda (r, θ, z) incelenir. Silindirik koordinatlarda r radyal, θ teğetsel ve z düşey doğrultuları simgelemektedir. z-ekseni, kap tabanından ve merkezinden serbest yüzeye doğru alınır. Dönme ekseninden r mesafede sabit ω açısal hızıyla dönen bir akışkan parçacığının merkezcil ivmesi $r\omega^2$ olup radyal yönün tersine, yani z dönme eksenine doğrudur, $a_r = -r\omega^2$.

Silindirik koordinatlarda akışkan ortamı içinde basınç değişimi genel bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial P}{\partial z}dz \qquad (2.31)$$



Şekil 2.30

Sıvı içinde Şekil 2.29'da gösterildiği dönme ekseninden r mesafede diferansiyel bir akışkan elemanı ele alalım. Bu elemanın silindirik koordinatlarda gösterimi ve diferansiyel boyutları Şekil 2.30(a)'da gösterilmektedir. Dönme ekseni etrafında akışkan kapla beraber aynı sabit ω açısal hızıyla katı cisim hareketi yaptığından z-ekseni etrafında θ yönünde ivmesi sıfırdır, dolayısıyla z-ekseni etrafında bir simetri vardır ve bu yüzden θ'ya bağımlılık yoktur. Dönme ekseni etrafındaki simetriden dolayı θ yönündeki boyut değişimlerini ihmal ettiğimizde akışkan elemanını Şekil 2.30(b)'de gösterildiği şekilde ele alabiliriz. Ayrıca, Şekil 2.30(b) söz konusu elemana etki eden kuvvetleri göstermektedir. Akışkanlar statiğinde Kısım 2.2'de kartezyen koordinatlarda durgun bir akışkan elemanına Newton'un ikinci kanunun uygulanmasına benzer şekilde bu elemana silindirik koordinatlarda radyal, teğetsel ve düşey doğrultularda uyguladığımızda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

<u>r yönünde</u>

$\Sigma F_r = ma_r$

$Prd\theta dz - (P+dP)(r+dr)d\theta dz = -(\rho rd\theta drdz)r\omega^2$

Eşitliğindeki her iki tarafı $rd\theta dz$ bölündüğünde

$$P - (P+dP)(1+\frac{dr}{r}) = -\rho dr\, r\omega^2$$

Elde edilir. Burada, dr diferansiyel mesafesinin r mesafesine göre çok daha küçük olmasından dolayı dr/r bölümü de çok küçük bir sonuç vereceğinden ihmal edilir ve sonuçta

$$\frac{dP}{dr} = -\rho r\omega^2$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde,

<u>θ yönünde</u>

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta$$

$$Pdrdz - (P+dP)drdz = (\rho rd\theta drdz)a_\theta$$

$$\frac{dP}{d\theta} = -\rho ra_\theta$$

<u>z yönünde</u>

$$\Sigma F_z = ma_z$$

$$Prd\theta dr-(P+dP)rd\theta dr- \rho grd\theta drdz = \rho rd\theta drdz\ a_z$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(g + a_z)$$

Dönme ekseni etrafında akışkan kapla beraber aynı sabit ω açısal hızıyla katı cisim hareketi yaptığından z-ekseni etrafında θ yönünde ivmesi sıfırdır, $a_\theta = 0$, dolayısıyla z-ekseni etrafında bir simetri vardır ve bu yüzden θ'ya bağımlılık yoktur. Sonuç olarak yatay düzlemde yani teğetsel yönde basınç değişimi olmayacaktır. z ekseni doğrultusunda hareket olmadığından düşey ivme bileşeni de sıfırdır, $a_z = 0$. Neticede hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dP}{dr} = -\rho r\omega^2 \qquad \frac{dP}{d\theta} = 0 \qquad \frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad (2.32)$$

Radyal yönde yani dönme merkezinden kap kenarlarına doğru basıncın radyal mesafeyle doğrusal ve sabit açısal hızın karesiyle orantılı arttığına ve teğetsel yönde basınç değişiminin olmadığına, ayrıca düşey doğrultuda basınç değişiminin sıvı özgül ağırlığına bağlı olduğuna ve sıvı serbest yüzeyinden kap tabanına doğru yani derinlikle arttığına dikkat ediniz. Bu sonuçların Denklem 2.31'e adapte edilmesiyle herhangi bir yöndeki basınç değişimi aşağıdaki gibi olur.

$$dP = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz \qquad (2.33)$$

İki nokta arasındaki basınç farkını bulmak için yukarıdaki denklemim integrali alındığında

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) - \rho g\left(z_2 - z_1\right) \tag{2.34}$$

Eğer bu iki noktayı serbest yüzey üzerinde ve ayrıca 1 noktasını tam orijin yani z-ekseni üzerinde alırsak, bu iki noktadaki basınçların eşitliğinden ve $r_1 = 0$ olmasından dolayı Denklem 2.34

$$\frac{\rho\omega^2}{2} r_2^2 = \rho g\left(z_2 - z_1\right) \tag{2.35}$$

bir parabol denklemine dönüşür. Bu da sıvı serbest yüzeyinin parabol şeklinde içbükey bir şekil aldığının göstergesidir. z_1 serbest yüzeyin kap tabanından dönme ekseni boyunca olan mesafesi h_c ve z_2 de serbest yüzey üzerindeki herhangi bir r mesafesindeki nokta seçilirse

$$z_s = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_c \tag{2.36}$$

bağıntısı elde edilir. Bu denklemde z_s serbest yüzey üzerindeki bir noktanın kap tabanından mesafesidir. Bu denklem serbest yüzeyin denklemidir ve üzerindeki bir noktanın açısal hız, radyal koordinatı ve serbest yüzeyin orijininin kap tabanından olan mesafesine bağlı olarak hesaplamamıza yarar.

Kütle korunumundan dolayı ve sıvılar için yoğunluk sabit kabul edildiğinden başlangıçta yani dönme hareketi yokken kapta bulunan sıvı hacminin dönme esnasında sıvı serbest yüzey tarafından meydana gelen paraboloidin hacmine eşit olacaktır. Başta kapta bulunan sıvının hacmi

$$\forall = \pi R^2 h_o \tag{2.37}$$

burada R kabın iç yarıçapı ve h_o dönme olmadan önce kaptaki sıvı yüksekliğidir. Dönme esnasında meydana gelen paraboloidin hacmi ise

$$\forall = \int_0^R 2\pi z_s r dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right) \tag{2.38}$$

ve bu iki hacmin eşitliğinden serbest yüzeyin düşey dönme ekseni boyunca kap tabanından yüksekliği

$$h_c = h_o - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{2.39}$$

olarak elde edilir. Ayrıca h_c'nin Denklem 2.39'deki eşiti Denklem 2.36'da yerine konursa

$$z_s = h_o - \frac{\omega^2}{4g}\left(R^2 - 2r^2\right) \tag{2.40}$$

serbest yüzeyin denklemi elde edilir. Bu denklemden maksimum düşey yüksekliğin kap yüzeyinde yani r = R mesafesinde oluştuğu görülmektedir. Kenar ile serbest yüzey merkezi arasındaki maksimum yükseklik farkı, Denklem 2.40'daki z_s bağıntısında kenar için r = R ve merkez için r = 0 konularak elde edilen sonuçların farkı alınarak bulunur:

$$\Delta z_{z,max} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \tag{2.41}$$

Denklem 2.33'de 1 noktasını etkin basıncın sıfır olduğu yani serbest yüzey üzerinde ve tam orijinde yani z-ekseni üzerinde alırsak Denklem 2.34'den

$$P = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z \tag{2.42}$$

elde edilir. Bu denklem, akışkan içinde herhangi bir noktadaki etkin basıncı açısal hız ve noktanın r ve z koordinatlarına bağlı olarak kolayca hesaplamamızı sağlar. Sabit bir yarıçapta basıncın tıpkı durgun haldeki bir akışkanda olduğu gibi düşey doğrultuda hidrostatik olarak değiştiğine dikkat ediniz. Sabit bir z düşey mesafesinde, basınç yarıçapın karesiyle değişmekte ve merkezden dışa doğru artmaktadır. Herhangi bir yatay düzlemde, merkez ile R yarıçaplı kap kenarı arasındaki basınç farkı $\Delta P = \rho\omega^2 R^2/2$ olur.