

1 9. HARMONİK HAREKET

- 9.1 Basit Harmonik Hareket
- 9.2 Sarkaç Hareketi
- 9.3 Sönümlü Harmonik Hareket
- 9.4 Zorlamalı Harmonik Hareket – Rezonans



Daha iyi sonuç almak için, Adobe Reader programını **Tam Ekran** modunda çalıştırınız.
Sayfa çevirmek/Aşağısını görmek için, farenin sol/sağ tuşlarını veya PageUp/PageDown tuşlarını kullanınız.

9.1 BASİT HARMONİK HAREKET

Belirli zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket.

(Salıncak, sarkaç, saz telinin titreşimi, kalp atışı, med-cezir olayı ...) ▾

9.1 BASİT HARMONİK HAREKET

Belirli zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket.

(Salıncak, sarkaç, saz telinin titreşimi, kalp atışı, med-cezir olayı ...) ▼

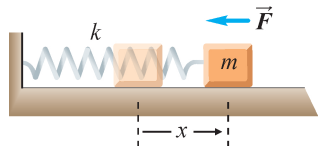
- Bir yaya bağlı kütlenin titreşim hareketi: ▼

9.1 BASİT HARMONİK HAREKET

Belirli zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket.

(Salıncak, sarkaç, saz telinin titreşimi, kalp atışı, med-cezir olayı ...) ▼

- Bir yaya bağlı kütlenin titreşim hareketi: ▼



Yay x kadar uzamış iken, yay kuvveti $F = -kx$ için Newton yasası:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} = m x'' \\ x'' + \frac{k}{m} x &= 0 \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

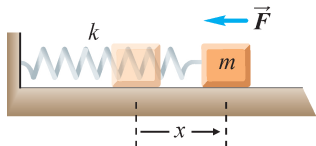
9.1 BASİT HARMONİK HAREKET

Belirli zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket.

(Salıncak, sarkaç, saz telinin titreşimi, kalp atışı, med-cezir olayı ...) ▼

- Bir yaya bağlı kütlenin titreşim hareketi: ▼

Yay x kadar uzamış iken, yay kuvveti $F = -kx$ için Newton yasası:



$$\begin{aligned} F &= ma \\ -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} = m x'' \\ x'' + \frac{k}{m} x &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bu ifadeye **titreşim hareketinin diferansiyel denklemi** denir.

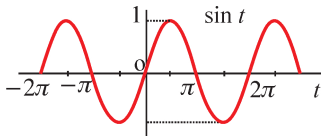
Bunun çözümü olan $x = x(t)$ fonksiyonu hareketi belirlemiş olur.

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{veya} \quad x'' = -\frac{k}{m} x$$

Çözüm: Hangi fonksiyonun 2. türevi kendisinin negatifıyla orantılıdır? ▼

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{veya} \quad x'' = -\frac{k}{m} x$$

Çözüm: Hangi fonksiyonun 2. türevi kendisinin negatifıyla orantılıdır? ▼



Cevap :

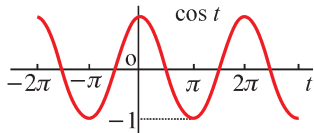
Sinüs ve kosinüs fonksiyonları:

$$x = A \sin \omega t$$

veya

$$x = A \cos \omega t$$

(A ve ω birer sabit)



Bu çözümlerden birini deneyelim:

$$x = A \sin \omega t$$

$$x' = -\omega A \sin \omega t$$

$$x'' = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

Bu çözümlerden birini deneyelim:

$$x = A \sin \omega t$$

$$x' = -\omega A \sin \omega t$$

$$x'' = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

Bu x ve x'' ifadeleri denklemde yerine konulur:

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \frac{k}{m} A \cos \omega t = 0$$

$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m} \right] A \cos \omega t = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu çözümlerden birini deneyelim:

$$x = A \sin \omega t$$

$$x' = -\omega A \sin \omega t$$

$$x'' = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

Bu x ve x'' ifadeleri denklemde yerine konulur:

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \frac{k}{m} A \cos \omega t = 0$$

$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m} \right] A \cos \omega t = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu eşitliğin her t anında doğru olabilmesi için parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır.

$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m} \right] = 0$$

Buradan ω sabiti, kütle ve yay sabiti cinsinden bulunmuş olur:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{açısal frekans})$$



Buradan ω sabiti, kütle ve yay sabiti cinsinden bulunmuş olur:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{açısal frekans})$$



Genlik (A):

Kosinüs/sinüs fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığında değişir.
 x konumu da $[-A, +A]$ aralığında değişecektir.

Maksimum uzamanın mutlak değeri olan bu A niceliğine **genlik** denir. ▼

Buradan ω sabiti, kütle ve yay sabiti cinsinden bulunmuş olur:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{açısal frekans})$$



Genlik (A):

Kosinüs/sinüs fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığında değişir.
 x konumu da $[-A, +A]$ aralığında değişecektir.

Maksimum uzamanın mutlak değeri olan bu A niceliğine **genlik** denir. ▼

$$x = A \cos \omega t \quad (\text{basit harmonik hareket})$$

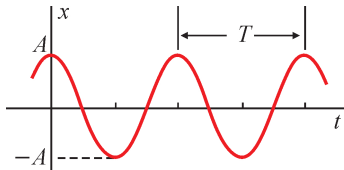
Zamana göre kosinüs/sinüs fonksiyonu olan bu harekete **basit harmonik hareket** (veya, sinüsel hareket) denir.

Periyot (T):

Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı. ▼

Periyot (T):

Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı. ▼

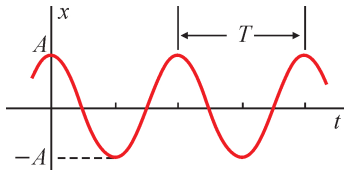


Periyot (T):

Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı. ▼

$$x = A \cos \omega t$$

Öyle bir T zamanı geçmelidir ki cisim tekrar aynı x konumundan geçsin: ▼



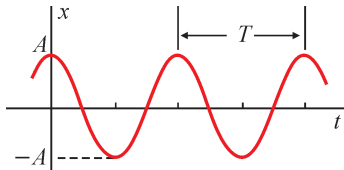
▼

Periyot (T):

Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı. ▼

$$x = A \cos \omega t$$

Öyle bir T zamanı geçmelidir ki cisim tekrar aynı x konumundan geçsin: ▼



$$x(t + T) = x(t)$$

$$A \cos \omega(t + T) = A \cos \omega t$$

$$\cos \omega(t + T) = \cos \omega t$$

Kosinüs fonksiyonu 2π kadar sonra kendini tekrar eder:

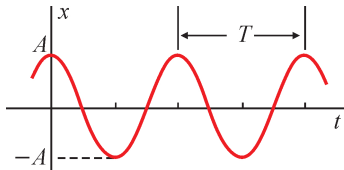
$$\omega(t + T) - \omega t = 2\pi$$
 ▼

Periyot (T):

Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı. ▼

$$x = A \cos \omega t$$

Öyle bir T zamanı geçmelidir ki cisim tekrar aynı x konumundan geçsin: ▼



$$x(t + T) = x(t)$$

$$A \cos \omega(t + T) = A \cos \omega t$$

$$\cos \omega(t + T) = \cos \omega t$$

Kosinüs fonksiyonu 2π kadar sonra kendini tekrar eder:

$$\omega(t + T) - \omega t = 2\pi$$
 ▼

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{periyot})$$

Frekans (f):

Birim zaman aralığındaki tam salınım sayısı. ▼

Frekans (f):

Birim zaman aralığındaki tam salınım sayısı. ▼

Buna göre, frekans periyodun tersidir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frekans})$$



Frekans (f):

Birim zaman aralığındaki tam salınım sayısı. ▼

Buna göre, frekans periyodun tersidir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frekans})$$



Yay-kütle sistemi için $\omega = \sqrt{k/m}$ olduğundan:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ve} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Basit Harmonik Hareket Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

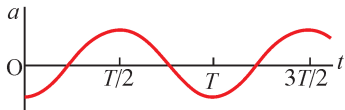
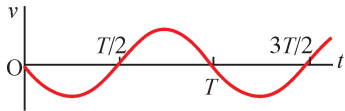
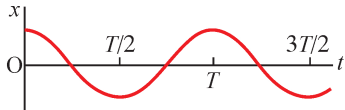
Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$



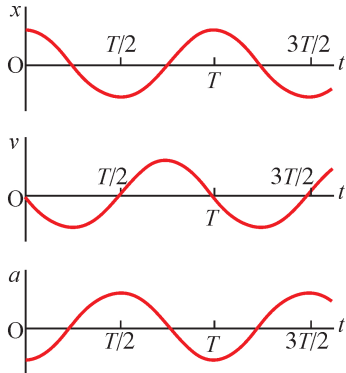
Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$



- Harmonik hareketin hız ve ivmesi de harmoniktir. \blacktriangledown

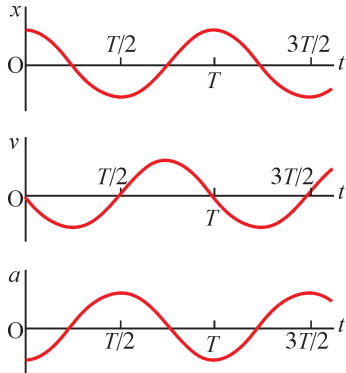
Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$



- Harmonik hareketin hız ve ivmesi de harmoniktir. \blacktriangledown
- Konum ile hızın değişimi birbirine tamamen zıt olur. Konum maksimum iken hız sıfır, konum sıfırken hız maksimum olur. \blacktriangledown

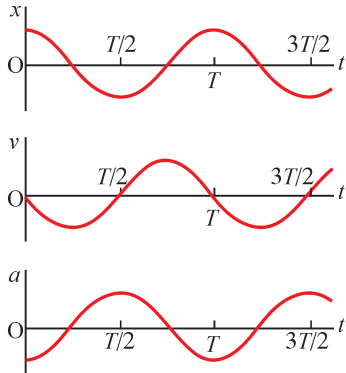
Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$



- Harmonik hareketin hız ve ivmesi de harmoniktir. \blacktriangledown
- Konum ile hızın değişimi birbirine tamamen zıt olur. Konum maksimum iken hız sıfır, konum sıfırken hız maksimum olur. \blacktriangledown
- Hız ile ivme de birbirine zıt olur.

- **Hız ile ivme arasındaki ilişki:** ▽

- **Hız ile ivme arasındaki ilişki:** ▼

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ özdeşliği kullanılır:

$$\cos^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} \quad \text{ve} \quad \sin^2 \omega t = \frac{v^2}{\omega^2 A^2}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Hız veya ivmeden biri biliniyorsa, diğeri buradan hesaplanır. ▼

- **Hız ile ivme arasındaki ilişki:** ▼

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ özdeşliği kullanılır:

$$\cos^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} \quad \text{ve} \quad \sin^2 \omega t = \frac{v^2}{\omega^2 A^2}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

Hız veya ivmeden biri biliniyorsa, diğeri buradan hesaplanır. ▼

- **Konum ile ivme arasındaki ilişki:**

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t$$

$$a = -\omega^2 x$$

Harmonik Hareketin Enerjisi ▼

Harmonik Hareketin Enerjisi ▼

Kinetik enerji için hız ifadesi: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$

Esneklik potansiyel enerjisi: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k A^2 \cos^2 \omega t$ ▼

Harmonik Hareketin Enerjisi ▼

Kinetik enerji için hız ifadesi: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$

Esneklik potansiyel enerjisi: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$ ▼

Toplam mekanik enerji:

$$E = K + U = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_k A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}kA^2 (\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_1) \quad \blacktriangledown$$

Harmonik Hareketin Enerjisi ▼

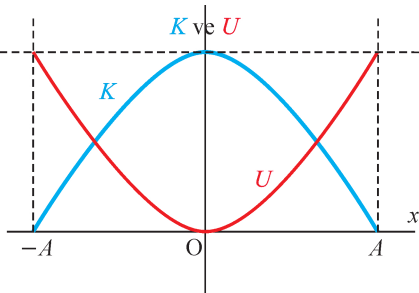
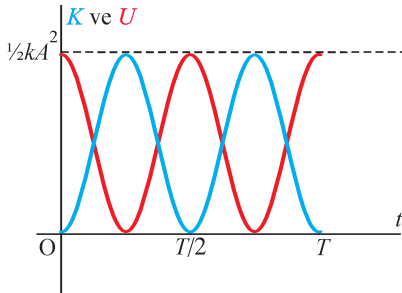
Kinetik enerji için hız ifadesi: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$

Esneklik potansiyel enerjisi: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$ ▼

Toplam mekanik enerji:

$$E = K + U = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_k A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}kA^2 (\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_1) \quad \blacktriangledown$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \text{sabit} \quad (\text{harmonik hareketin toplam enerjisi})$$



Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır? ▼

Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır? ▼

Cevap: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa: $x = A \sin \omega t$,
Maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa: $x = A \cos \omega t$. ▼

Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır? ▼

Cevap: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa: $x = A \sin \omega t$,
Maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa: $x = A \cos \omega t$. ▼

Hareket bu iki nokta dışında herhangi bir yerden başlıyorsa? ▼

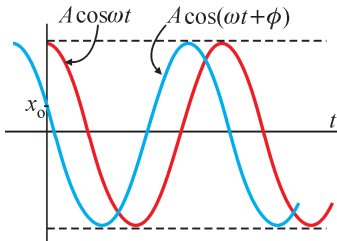
Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır? ▼

Cevap: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa: $x = A \sin \omega t$,

Maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa: $x = A \cos \omega t$. ▼

Hareket bu iki nokta dışında herhangi bir yerden başlıyorsa? ▼



Kosinüsteki (ωt) nin yanına bir terim daha ekleyerek, fonksiyonu istediğimiz noktadan başlatabiliriz.

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

ϕ : **faz açısı** (veya, faz farkı) ▼

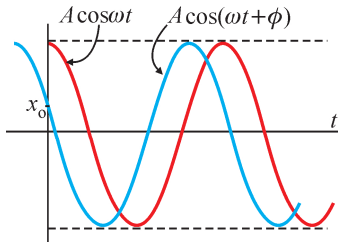
Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır? ▼

Cevap: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa: $x = A \sin \omega t$,

Maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa: $x = A \cos \omega t$. ▼

Hareket bu iki nokta dışında herhangi bir yerden başlıyorsa? ▼



Kosinüsteki (ωt) nin yanına bir terim daha ekleyerek, fonksiyonu istediğimiz noktadan başlatabiliriz.

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

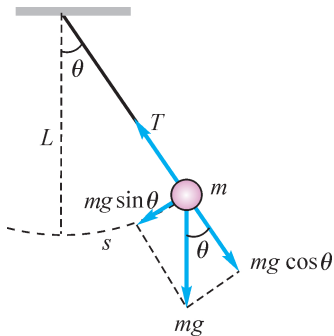
ϕ : **faz açısı** (veya, faz farkı) ▼

Cisim $t = 0$ anında x_0 konumlu yerden geçiyorsa,

$$x_0 = A \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{x_0}{A}$$

9.2 SARKAÇ HAREKETİ

Tavana asılı L uzunlukta ipin ucuna bağlı m kütlesi.



9.2 SARKAÇ HAREKETİ

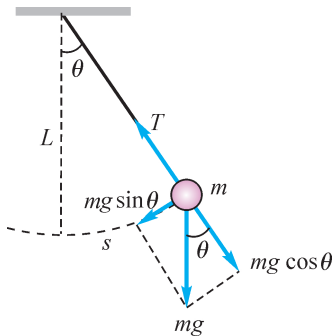
Tavana asılı L uzunlukta ipin ucuna bağlı m kütlesi.

İp düşeyle θ açısı yaparken:

T gerilmesi ip doğrultusunda olup harekete katkıda bulunmaz.

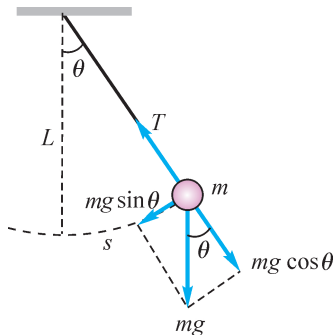
Hareket ettiren kuvvet:

mg nin teğet bileşeni $mg \sin \theta$ ▼



9.2 SARKAÇ HAREKETİ

Tavana asılı L uzunlukta ipin ucuna bağlı m kütlesi.



İp düşeyle θ açısı yaparken:

T gerilmesi ip doğrultusunda olup harekete katkıda bulunmaz.

Hareket ettiren kuvvet:

mg nin teğet bileşeni $mg \sin \theta$ ▼

Teğet doğrultuda Newton yasası:
(θ nın artış yönü pozitif)

$$F_t = ma_t$$

$$-mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$$

v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L \omega = L \frac{d\theta}{dt} \quad \blacktriangledown$$

v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L \omega = L \frac{d\theta}{dt} \quad \blacktriangledown$$

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \implies \quad \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L \omega = L \frac{d\theta}{dt} \quad \blacktriangledown$$

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \implies \quad \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu denklemin çözümü yoktur. Fakat, küçük açılı salınımlar için $\sin \theta \approx \theta$ alınırsa:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2} \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L \omega = L \frac{d\theta}{dt} \quad \blacktriangledown$$

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \implies \quad \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu denklemin çözümü yoktur. Fakat, küçük açılı salınımlar için $\sin \theta \approx \theta$ alınırsa:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2} \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu, θ açısının harmonik hareket yaptığını gösterir.

$$\theta = \theta_{\max} \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L \omega = L \frac{d\theta}{dt} \quad \blacktriangledown$$

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \implies \quad \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu denklemin çözümü yoktur. Fakat, küçük açılı salınımlar için $\sin \theta \approx \theta$ alınırsa:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2} \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Bu, θ açısının harmonik hareket yaptığını gösterir.

$$\theta = \theta_{\max} \cos \omega t \quad \blacktriangledown$$

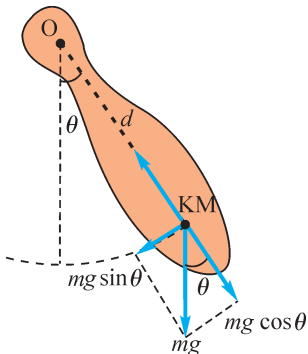
Hareketin açısal frekansından periyot formülü elde edilir ($T = 2\pi/\omega$):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{Basit sarkacın periyodu})$$

Fiziksel Sarkaç

Her katı cisim sarkaç hareketi yapabilir.

Kütlesi m ve eylemsizlik momenti I_{KM} olan katı bir cisim, kütle merkezinden d uzaklıkta bir eksene asılmış olsun.



Fiziksel Sarkaç

Her katı cisim sarkaç hareketi yapabilir.

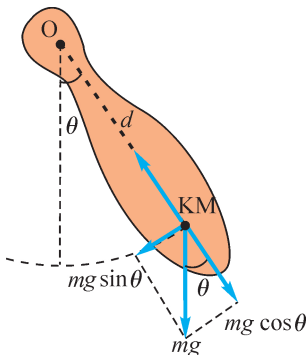
Kütlesi m ve eylemsizlik momenti I_{KM} olan katı bir cisim, kütle merkezinden d uzaklıkta bir eksene asılmış olsun.

O dönme merkezine göre moment alınır:

$$F_t d = I_0 \alpha \quad \longrightarrow \quad -mg \sin \theta d = I_0 \alpha$$

α açısal ivmesi θ nın 2. türevidir:

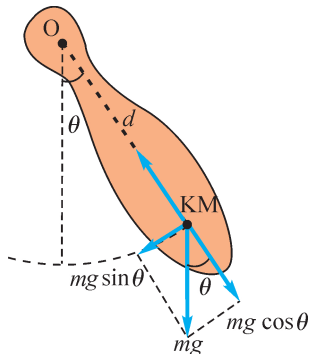
$$\theta'' + \frac{mgd}{I_0} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$



Fiziksel Sarkaç

Her katı cisim sarkaç hareketi yapabilir.

Kütlesi m ve eylemsizlik momenti I_{KM} olan katı bir cisim, kütle merkezinden d uzaklıkta bir eksene asılmış olsun.



O dönme merkezine göre moment alınır:

$$F_t d = I_0 \alpha \quad \longrightarrow \quad -mg \sin \theta d = I_0 \alpha$$

α açısal ivmesi θ nın 2. türevidir:

$$\theta'' + \frac{mgd}{I_0} \sin \theta = 0 \quad \blacktriangledown$$

Küçük açılı salınımlar için $\sin \theta \approx \theta$,

$$\theta'' + \underbrace{\frac{mgd}{I_0}}_{\omega^2} \theta = 0$$

Yine, basit harmonik hareket denklemi yapısı. ▼

Yine, basit harmonik hareket denklemi yapısı. ▼

Buradan ω açısal frekansı ve $T = 2\pi/\omega$ periyodu bulunur:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}} \quad (\text{Fiziksel sarkacın periyodu})$$

▼

Yine, basit harmonik hareket denklemi yapısı. ▼

Buradan ω açısal frekansı ve $T = 2\pi/\omega$ periyodu bulunur:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}} \quad (\text{Fiziksel sarkacın periyodu})$$

▼
Kütle merkezine göre eylemsizlik momenti için paralel eksenler teoremi kullanılır:

$$I_0 = I_{\text{KM}} + m d^2$$

9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET

Basit harmonik hareket ideal bir durumdur.

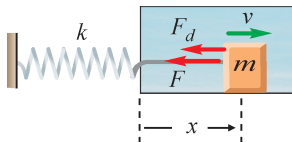
Gerçekte, sürtünme dolayısıyla genlik giderek azalır: Sönme (damping). ▼

9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET

Basit harmonik hareket ideal bir durumdur.

Gerçekte, sürtünme dolayısıyla genlik giderek azalır: Sönme (damping). ▼

Bir yaya bağlı kütleyi yağ kutusu içine koyalım.



▼

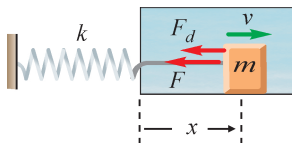
9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET

Basit harmonik hareket ideal bir durumdur.

Gerçekte, sürtünme dolayısıyla genlik giderek azalır: Sönme (damping). ▼

Bir yaya bağlı kütleyi yağ kutusu içine koyalım.

Sıvılarda sürtünme kuvveti cismin hızıyla orantılıdır:



$$F_d = -b v \quad (b : \text{sönüm katsayısı}) \quad \blacktriangledown$$

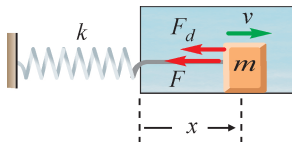
9.3 SÖNÜMLÜ HARMONİK HAREKET

Basit harmonik hareket ideal bir durumdur.

Gerçekte, sürtünme dolayısıyla genlik giderek azalır: Sönme (damping). ▽

Bir yaya bağlı kütleyi yağ kutusu içine koyalım.

Sıvılarda sürtünme kuvveti cismin hızıyla orantılıdır:



$$F_d = -b v \quad (b : \text{sönüm katsayısı}) \quad \blacktriangledown$$

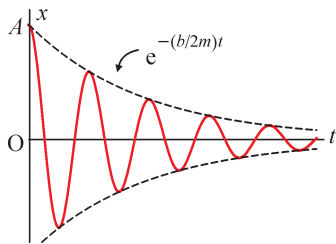
Newton yasası: $F + F_d = ma$

$$-kx - bv = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

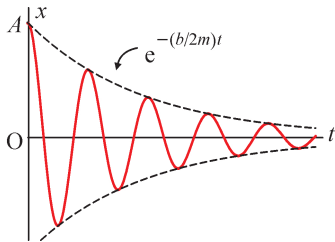
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Denklemin çözümü:

Üstel olarak azalan bir harmonik hareket: ▼



Denklemin çözümü:



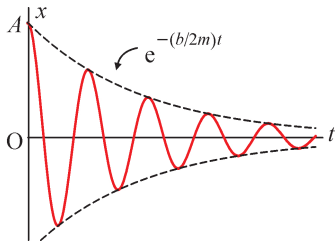
Üstel olarak azalan bir harmonik hareket: ▼

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - b^2/(4m\omega_0^2)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \blacktriangledown$$

Denklemin çözümü:



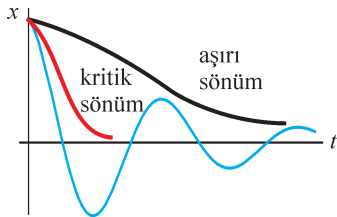
Üstel olarak azalan bir harmonik hareket: ▼

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos \omega t$$

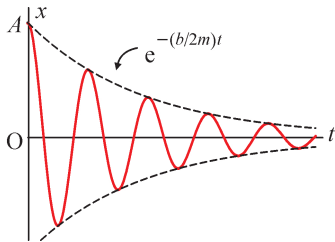
$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - b^2/(4m\omega_0^2)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \blacktriangledown$$

- Sürtünme sıfır ($b = 0$) ise basit harmonik. ▼



Denklemin çözümü:



Üstel olarak azalan bir harmonik hareket: ▼

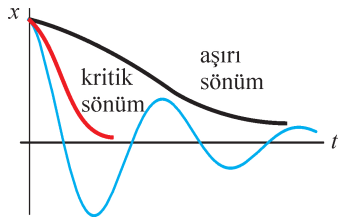
$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - b^2/(4m\omega_0^2)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \blacktriangledown$$

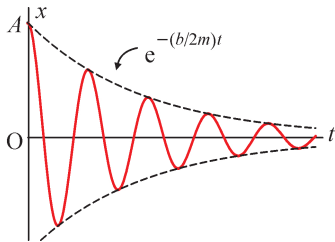
• Sürtünme sıfır ($b = 0$) ise basit harmonik. ▼

• **Kritik sönüm:** $\omega = 0$ için $\cos 0^\circ = 1$ olur ve cisim salınım yapmadan, genlik üstel olarak azalır:



$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m} = 0 \quad \longrightarrow \quad b = \sqrt{4k} \quad \blacktriangledown$$

Denklemin çözümü:



Üstel olarak azalan bir harmonik hareket: ▼

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos \omega t$$

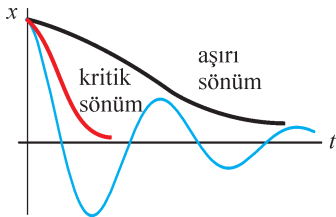
$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - b^2/(4m\omega_0^2)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \blacktriangledown$$

- Sürtünme sıfır ($b = 0$) ise basit harmonik. ▼

• **Kritik sönüm:** $\omega = 0$ için $\cos 0^\circ = 1$ olur ve cisim salınım yapmadan, genlik üstel olarak azalır:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m} = 0 \quad \longrightarrow \quad b = \sqrt{4k} \quad \blacktriangledown$$



- **Aşırı sönüm:** Bu kritik b değeri üstünde salınım gözlenmez, cisim üstel olarak denge konumuna gelir.

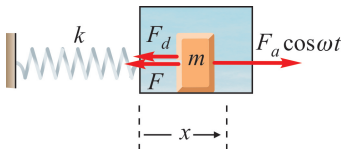
9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET - REZONANS

Harmonik salınıcıya dışardan periyodik bir kuvvet uygulandığında rezonans gözlenir. ▼

9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET - REZONANS

Harmonik salıncıya dışardan periyodik bir kuvvet uygulandığında rezonans gözlenir. ▼

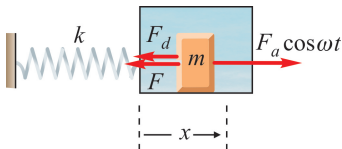
Sönümlü düzenekte m kütlesine ω frekanslı $F_a \cos \omega t$ dış kuvveti uygulanıyor.



9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET - REZONANS

Harmonik salınıcıya dışardan periyodik bir kuvvet uygulandığında rezonans gözlenir. ▼

Sönümlü düzenekte m kütlesine ω frekanslı $F_a \cos \omega t$ dış kuvveti uygulanıyor.



Üç kuvvet için Newton yasası yazılır:

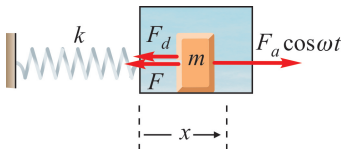
$$F + F_d + F_a \cos \omega t = ma$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_a \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \blacktriangledown$$

9.4 ZORLAMALI HARMONİK HAREKET - REZONANS

Harmonik salınıcıya dışardan periyodik bir kuvvet uygulandığında rezonans gözlenir. ▼

Sönümlü düzenekte m kütlesine ω frekanslı $F_a \cos \omega t$ dış kuvveti uygulanıyor.



Üç kuvvet için Newton yasası yazılır:

$$F + F_d + F_a \cos \omega t = ma$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_a \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \blacktriangledown$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_a \cos \omega t$$

Çözüm:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \quad \blacktriangledown$$

Çözüm: $x = A \cos(\omega t + \phi)$

$$A = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \quad \blacktriangledown$$

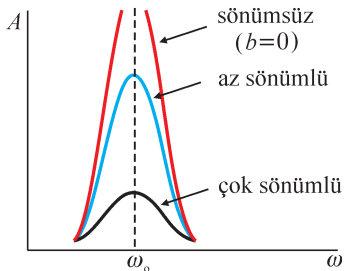
- Oluşan hareket ($\cos \omega t$ den dolayı) yine basit harmonik harekettir. \blacktriangledown

Çözüm:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \quad \blacktriangledown$$

- Oluşan hareket ($\cos \omega t$ den dolayı) yine basit harmonik harekettir. \blacktriangledown



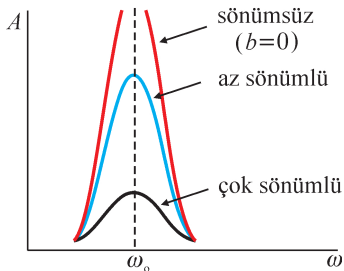
- A genliği uygulanan kuvvetin frekansına bağlıdır. \blacktriangledown

Çözüm:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \quad \blacktriangledown$$

- Oluşan hareket ($\cos \omega t$ den dolayı) yine basit harmonik harekettir. \blacktriangledown



- A genliği uygulanan kuvvetin frekansına bağlıdır. \blacktriangledown

- **Rezonans olayı.**

$\omega \rightarrow \omega_0$ olduğunda, salınıcının genliği aşırı artar. Buna **rezonans** denir.

- Rezonans bazı durumlarda istenen, bazı durumlarda zararlı bir olaydır.

* * * 9. Bölümün Sonu * * *