TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALI DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

12 Rasyonel İfadeler 8

13 Transandant Fonksiyonlar 9

14 Ön Trigonometri 9

20 Belirli İntegral 11

21 Belirsiz İntegral 12

23 İntegral Alma Yöntemleri

23.1 Belirsiz İntegral

$f(x)$ fonkiyonunun belirsiz integrali türevleri $f(x)$ olan bütün fonkiyonlardır. Belirsiz integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C sabit) \tag{23.1}$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni, $F(x)$ fonksiyonunu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışıdr. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittitler. Bu demektir ki, $F(x)$ ile $G(x)$ fonksiyonları $f(x)$ fonksiyonuun belirsiz integrali iseler

$$F(x) - G(x) = K \qquad (K sabit) \tag{23.2}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(**??**) ifadesinde C sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla $F(x)$ fonksiyonunun sonsuz çoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçel fonksiyonların (**??**) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

23.2 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonsiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası (f, f') (fonksiyon-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çokluktaki belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek(f, f') eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz. Bunun tam matematiksel yöntemi, türevi aynı olan fonksiyonları bir denklik sınıfı içine almaktır. Ancak, sözkonusu basit kavramı açıklmak için o kadar derine gitmeye gerek yoktur.

Kalkulus'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği $\int e^{x^2}\,dx$ integralidir.

İntegrand (ntegrali alınacak fonksiyon) sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama e^{x^2} fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak (f, f') eşleşmesine indirgenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda (f, f') eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak (f, f') eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözmüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta (f, f') eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

23.3 Sürekli Fonksiyonların İntegrali

Sürekli fonksiyonların ilkelleri vardır. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz:

Teorem 23.1. *I aralığında $f(x)$ sürekli ve her $a \in I$ noktsında, değişken x değeri için*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{23.3}$$

ise $F(x)$ fonksiyonu I aralığında $f(x)$ fonksiyonunun ilkelidir. Başka bir deyişle, her $x \in I$ noktasınad $F'(x) = f(x)$ olur.

İspat:

x ile $x + \Delta x$ noktaları I aralığında iseler;

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

yazılabilir. Sağ yandaki ifdeye integralin ortalama değer teoremini uygularsak,

$$F(x+\Delta x)-F(x)=(x+\Delta x-x)f(c)=f(c)\Delta x$$

bağıntısını sağlayan ve Δx sayısının pozitif ya da negatif oluşuna bağlı olarak değişmek üzere

$(x \le c \le x+\Delta x)$, $\quad (x+\Delta x \le x \le x)$ aralıklarının birinde olan olan bir c noktasının varlığını söyleyebiliriz. c noktası Δx değerine bağlıdır: $\Delta x \to 0 \Rightarrow c \to x$ olur. f sürekli olduğundan $\Delta x \to 0$ iken $f(c) \to f(x)$ olacaktır. Buradan türev tanımına geçersek,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c).\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur ki bu istenen sonuçtur.

23.4 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçeme sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

Teorem 23.2. *$f(u)$ süreki ve $u(x)$ sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise*

$$\int f\big(u(x)u'(x)\big)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)} \qquad (23.4)$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır. $\int f(u)du$ integrali bulunduktan sunra $u=u(x)$ konularak asıl x değişkenine dönülür.

Kanıt:

$F(x)$ fonksionu $f(x$ fonksiyonunun ilkeli olsun. F nin varlığı f nin sürekliliği ile garanti edilir. Zincir kuralı gereğnce,

$$\frac{d}{dx}F'(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int f(u(x))u'(x)\,dx &= \int F'(u(x))u'(x)\,dx \\ &= f(u(x))+C \quad (C \text{ sabit }) \end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (**??**) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integrand'daki asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınama-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınama-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

Örnek 23.3. $\int sin^3 x.cosx\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = sinx \longrightarrow du = cosxdx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int sin^3 x.cosx\,dx &= \int u^3 du\\ &= \frac{1}{4}u^4 + C\\ &= \frac{1}{4}sin^4 x + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.4. $\int sin^3 x\,dx$

integralini hsaplayınız.

Çözüm: Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrik formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak, $u = cosx \to du = -sinx$ konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned}\int sin^3 x\,dx &= \int (sin^2 x) sinx\,dx\\ &= \int (1 - cos^2 x) sinx\,dx\\ &= \int sinxdx - \int cos^2 x sinx\,dx\\ &= -cosx + \int u^2\,du\\ &= -cosx + \frac{1}{3}cos^3 x + C\\ &= \frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.5. $I = \int (1-2x)^9\,dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, integrandı binom formülüne göre açmak, sonra çıkan polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine $u = 1 - 2x$, $du = -2dx$ konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned}\int (1-2x)^9 x\,dx &= -\frac{1}{2}\int (1-2x)^9(-2dx)\\ &= -\frac{1}{2}\int u^9 du\\ &= -\frac{1}{20}u^{10} + C\\ &= -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.6.

$$I=\int_3^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için

$x=\dfrac{3}{\cos t}$, $dx=3\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ ve sınırlar için $2\sqrt{3}=\dfrac{3}{\cos t}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}; +3=\dfrac{3}{\cos t}\Rightarrow T=0$ konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}.\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{3\sin t}.\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos t}\\
&= \int_0^{\pi}\sec t\,dt\\
&= ln|\sec t+\tan t|_0^{\frac{\pi}{6}}\\
&= ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right|-ln|1+0|\\
&= ln\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Örnek 23.7. $I=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 ile 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım. $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx=6t^5\,dt$ konumuyla

$$I=6\int\frac{t^8}{t^2-1}dt$$

$$\frac{t^8}{t^2-1}=t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1}$$

$$\begin{aligned}
I &= 6\int\left(t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt\\
&= 6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C\\
&= 6\left(\frac{x^{7/6}}{7}+\frac{x^{5/6}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}+x^{1/6}+\frac{1}{2}\left|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}\right|\right)+C
\end{aligned}$$

Örnek 23.8. $I=\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: payın drecesi paydanın derecesnden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$\begin{aligned}
I &= \int\left(1-x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\
&= \int dx-\int x^2dx+\int\frac{1}{1+x^2}\\
&= x-\frac{x^3}{3}+\tan^{-1}x+C
\end{aligned}$$

Örnek 23.9. $I = \int \frac{dx}{x^2+1}\,dx$

integralini hesaplayınız.
Çözüm: $x = tant$, $dx = \sec^2 t\,dt$ konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t + 1)} \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int dt \\ &= t + C \\ &= \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

23.5 $\tan\frac{\theta}{2}$ Konumu

Bazı integrallerde değişken değiştirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x &= \tan\frac{\theta}{2} \\ \cos\theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin\theta &= \frac{2x}{1+x^2} \\ d\theta &= \frac{2dx}{1+x^2} \\ \theta &= 12\arctan x \\ x &= a\sin\theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{a} \\ x &= a\tan\theta \Leftrightarrow \theta = \arctan\frac{x}{a} \\ x &= a\sec\theta \Leftrightarrow \theta = arcsec\frac{x}{a} = \arccos\frac{x}{a} \end{aligned}$$

değişken değiştirimleri kullanılabilir.

Örnek 23.10.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = \tan\frac{\theta}{2}, \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}} \\
&= \int \frac{2dx}{2x+2} \\
&= \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \ln|x+1| \\
&= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}+1\right|_0^{\pi/2} \\
&= \ln 2 - \ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.11.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = \frac{1}{2}\sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt, 1-4x^2 = 1-4\frac{1}{4}\sin^2 t = 1-\sin^2 t = \cos^2 t, 2x = \sin t, t = \arcsin(2x)$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos t}\cos t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int dt \\
&= \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}\sin -1(2x) + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.12.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$2x = \sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{9\sin^2 t}{3\cos t} 3\cos t\,dt \\
&= 9\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}\,(t - \sin t \cos t) + C \\
&= \frac{1}{16}\left(\sin^{-1}(2x) - 2x\sqrt{1-4x^2}\right) + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 23.13.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = 3\sin t, dx = 3\cos t\,dt, 9 - x^2 = 9\cos^2 t$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{9\cos^2 t}{3\cos t} 3\cos t\;dt \\
&= 9\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}\,(t - \sin t \cos t) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(9\sin^{-1}\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\,\right) + C
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 23.14.

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$x = \frac{1}{2}\sin t, dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt, 1 - 4x^2 = \cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\sin t.\cos t}\,dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= \int \csc t\,dt \\ &= \ln|\csc t + \cot t| + C \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2}\sin t \Rightarrow 2x = \sin t \Rightarrow \csc t = \frac{1}{2x}, \quad \cot t = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

konumuyla,

$$I = \ln\left|\frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right| + C$$

bulunur.

Örnek 23.15.

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x\,dx$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \\ &= \int \frac{\sin^4 x.\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \\ &= \int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \frac{2}{45}\sqrt{u}\left(5u^4 - 18u^2 + 45\right) + C \quad = \frac{2}{45}\sqrt{\cos x}\left(5\cos^4 x - 18\cos^2 x + 45\right) + C \end{aligned}$$

23.6 *Kısmi İntegrassyon*

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:

$$\int u\,dv \tag{23.5}$$

integralini arıyor olalım. uv çarpımının diferensiyeli olan

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Buradan

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{23.6}$$

bağıntısı çıkar. Bu aradığımız (??) integralidir. Bundan böyle (??) eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun $u\,dv$ biçiminde yazılabilmesini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarından u çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

Örnek 23.16.

$$\int xe^x\,dx \tag{23.7}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

İntegrandı iki fonksyonun çarpımı biçine getirelim: $u = x$, $dv = e^x dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

Uyarı: Yukarıdaki değiken değiştirme eyleminde $u = e^x$, $dv = x\,dx$ alınmış olsaydı

$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx$$

gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

Örnek 23.17.

$$\int e^{-x}\cos x\,dx \tag{23.8}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Türev ve integral işlemlerinde e^{-x} yok olmayacağına göre co fonksiyonu yok olması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar. Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral olarak yok edilemez. Ama iki defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenen integrali elde edebiliriz:

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int sinx e^{-x}\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirisek,

$$\int \cos xe^{-x}\,dx = \sin xe^{-x} - \cos xe^{-x} - \int \cos xe^{-x}\,dx \tag{23.9}$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. Dolayısyla, eşitliği

$$\int \cos xe^{-x}\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C \tag{23.10}$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 23.18.

$$\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx \tag{23.11}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki fonkiyonların ilk adımda ya da ardışık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$u = 3x+5,\ dv = \cos\frac{x}{4},\ du = 3dx,\ v = 4sin\frac{x}{4}$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned}\int (3x+5)\cos\frac{x}{4}\,dx &= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} - 12\int \sin\frac{x}{4}\,dx\\ &= 4(3x+5)\sin\frac{x}{4} + 48\cos\frac{x}{4} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.19.

$$\int x^2\sin(10x)\,dx \tag{23.12}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = x^2,\ dv = \sin(10x)dx,\ du = 2xdx,\ v = -\frac{1}{10}\cos(10x)$

konumu yapılırsa,kısmi integrasyon formülünden

$$\int x^2\sin(10x)dx = -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\int x\cos(10x)dx$$

yazılabilir. Sağdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulanabilir:

$u = x,\ dv = \cos(10x),\ du = dx,\ v = \frac{1}{10}\sin(10x)$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(10x)\,dx &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) - \frac{1}{10}\int sin(10x)dx\right)\\ &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\sin(10x) + \frac{1}{100}\cos(10x)\right) + C\\ &= -\frac{x^2}{10}\cos(10x) + 10x\sin(10x) + \frac{1}{500}\cos(10x) + C\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.20.

$$I = \int_0^1 \arctan x\,dx, \tag{23.13}$$

interalini bulunuz.

Çözüm: Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned}I &= \int \arctan x\,dx\\ &= x\arctan x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Örnek 23.21.

$$I = \int e^{ax} cos bx\, dx, \qquad (ab \neq 0) \tag{23.14}$$

interalini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx, \quad dv = \cos bx\, dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx$$

konumuyla kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} cos bx\, dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C \end{aligned}$$

Buradan

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a}{b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

bulunur.

Benzer olarak

$$I = \int e^{ax} \sin bx\, dx, = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.

Şekil 23.1: Hermann Schubert (1848-1911)

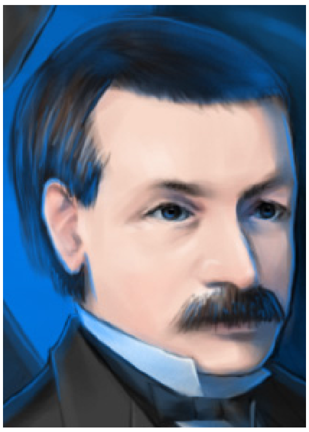
23.7 Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Polinomların kökleri uygulamada önemli rol oynar. O nedenle polinomlar işlenirken bu konuya ağırlık verilir. Benzetmek gerekirse, bir polinomun çarpanlarına ayrılması bir sayının asal çarpanlarına ayrılması gibidir. Tabii, sayılarda var olan bütün özelikler polinomlarda olmaz.

Polinomları çarpanlarına ayırma konusu ilk kez 1793 yılında Hermann Schubert tarafından ortaya konulmuş 1882 yılında Leopold Kronecker bulduğu bir algoritma ile konuyu genelleştirmiştir. Bu gün polinomu çarpanlara ayırma eylemi bilgisayar cebirinin temel taşlarından birisidir.

Bu kitapta polinomu çarpanlarına ayırma eylemi rasyonel fonksiyonların integralini bulmak için kullanılacaktır. O nedenle, bu kesimde bir $q(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılışını bize gerektiği kadarıyla ele alacağız. Önce iyi bilinen temel bilgileri anımsayalım:

Gerçel katsayılı her $Q(x)$ polinomu doğrusal ve quadratic çarpanlarının çarpımı oarak yazılabilir.



Şekil 23.2: leopold Koronocker (1823-1991)

Tanım 23.22. *Katsayıları gerçel olan bir*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 4 a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{m-1} + a_n x^n \tag{23.15}$$

polinomu için

$$(x - c)^k S(x) \tag{23.16}$$

eşiliğini sağlayan bir $S(x)$ polinomu varsa c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı bir köküdür.

$k=1$ ise c sayısı tek katlı kök olur. n-inci dereceden bir polinomum n tane kökü vardır. Burada c sayısı $q(x)$ polinomunun k-katlı kökü ise geri kalan köklerin sayısı $n-k$ tanedir ve onlar $S(x)$ polinomunun kökleri olur. Kökler gerçel ya da karmaşık sayı olabilirler.

Teorem 23.23. *Özdeş iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirlerine eşittir.*

Kanıt:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{m-1} + a_n x^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{m-1} + b_m x^m$$

polinomları özdeş olsunlar. O zaman farkları 0'a özdeş olmalıdır:
$n > m$ ise

$$0 \equiv p(x) - q(x)$$
$$0 \equiv (a_0 - b_0) + (a - 1 - b_1)x + \ldots (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x + \ldots + a_n x^n$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m, a_{m+1} = 0, \ldots a_n = 0$$

olmalıdır. $n < m$ ise benzer düşünce geçerlidir.

Teorem 23.24. $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 4 b_3 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{m-1} + b_m x^m$ *polinomunun* $(x-c)q_1(x)$ *biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani* $q(c) = 0$ *olmasıdır.*

Kanıt:
$q(x)$ polinomu $x-c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 4 b_3 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{m-1} + b_m x^m - (\\ & \quad b_0 + b_1 c + b_2 c^2 4 b_3 c^3 + \ldots + b_{n-1} c^{m-1} + b_m c^m) \\ &= b_1(x-c) + b_2(x^2 - c^2) + b_3(x^3 - c^3) + \ldots + b_m(x^m - c^m) \end{aligned} \tag{23.17}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + c^{n-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots, m) \tag{23.18}$$

dir. (19.1) ve (20.53) bağıntılarından istenen çıkar.
Polinomun bazı kökleri tamsayı olabilir.

Örnek 23.25.

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \tag{23.19}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

baş katsayısı 1 olan bir polinomun tam sayı kökü varsa sabit teriminin bir çarpanıdır. Burada sabit terim 2'dir. 2'nin çarpanları $\pm 1, \pm 2$ olmak üzere dört tanedir. Bunlar arasında $c_1 = 2$ sayısı $q(c_1) = 0$ eşitliğini sağlar. O halde,

$$q(x) = 8x - 2)q_1(x) = (x-2)(x^2 - 1) \tag{23.20}$$

yazılabilir. Tekrar $q_1(x)$ polinomunun köklerini bulmamız gerekiyor. Bu polinom ikinci dereceden olduğu için köklerini formülden bulabiliriz: $c_2 = -1$ $c_3 = +1$ olur. $q(x)$ polinomunun üç kökünü de bulduğumuza göre onu

$$q(x) = (x-2)(x+1)(x-1) \tag{23.21}$$

biçiminde çarpanlarına ayırabiliriz.

Polinomum bazı kökleri irrasyonel sayı olabilir.

Örnek 23.26.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{23.22}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 4 sayısını çarpanları $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{23.23}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{23.24}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 23.27.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \tag{23.25}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x dğişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı köklei varsa 8 sabitinin çrpanları olacağından, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ sarılarının kök olup ~~olmadıklarını denemeliz,~~ $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4) \tag{23.26}$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. Ohalde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+14\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) \tag{23.27}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Polinomum bazı kökleri karmaşık sayı olabilir.

Örnek 23.28.

$$q(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \tag{23.28}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Beşinci dereceden olduğu için bu polinomum beş tane kökü olduğu biliniyor. Ancak üçüncü dereceden büyükler için kökü bulmamızı sağlayan bir formül yoktur. Sabit terimin $pm1, \pm 2, \pm 4$ saqyılarından $+1$ sayısının kök olduğu denenerek görülebilir. $q(x) = (x+1)q_1(x)$ yazarsak $q_1(x) = (x^2+2)^2$ olduğu ve $q_1(x)$polinomunun gerçel kökünün olmadığı görülür. Geri kalan dört kökün dördü de karmaşık sayıdır.

$$q(x) = (x+1)(x^2+2)^2. \tag{23.29}$$

Örnek 23.29.

$$q(x) = 8x^4 - 4x^3 + 10x^2 \tag{23.30}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Çözüm: Dördüncü dereceden olan bu polinomun 4 tane kökü vardır. $2x^2$ çarpanı ortak olduğu için polinomu,

$$q(x) = x^2(8x^2 - 4x + 10) \tag{23.31}$$

biçiminde çarpanlara ayırısak, $(4x^2 - 2x + 5)$ çarpanının ikinci dereceden ve gerçel kökü olmadığı görülür. Öyleyse,

$$q(x) = \frac{1}{4}x^2\left(\left(-4ix+\sqrt{19}\right).\left(4ix+\sqrt{19}\right)\right) \tag{23.32}$$

olur.

23.8 *Basit Kesirlere Ayırma*

İki polinomun oranı biçiminde yazılan fonksiyonlara rasyonel fonlsiyon denilir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden daha küçükse, rasyonelfonksiyona basit, değilse bileşik kesir denilir.

$Q(x)$ paydasının $(x-a_k)^m$ bir çarpan ve $(x^2+px+q)^r$ bir quadratik çrpan ise rasyonel fonksiyon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(x-a_k)^k} + \sum_{r=1}^{R} \frac{b_m x + C_m}{(x^2+px+q)^r}$$

biçiminde basit kesirlerine ayrılır. Sonra her basit kesir için kendi sınıfna ait integral yöntemi uygulanaır.

23.9 *Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi*

Şimdi en basit halden başlayarak rasyonel fonksiyonların integrallenmesini inceleyeceğiz.

$$I = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx \tag{23.33}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \equiv \frac{(A+B)x+(A-B)x}{1-x^2} \\
&\Rightarrow (A+B=0, (A-B)=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right)
\end{aligned}
$$

Artık sağ taraftaki basit kesirlerin integralleri alınabilir:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int(ln(1+x) - ln(1-x)) + lnC \\
&= \frac{1}{2}ln|C\frac{(1+x)}{(1-x)}|
\end{aligned}
$$

$$I = \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \tag{23.34}$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

İntegrali alınacak fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğu için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^5+1}{x^2-1} = x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1} \tag{23.35}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\
\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \\
&= \frac{A(x+1)}{x-1} + \frac{B(x+1)}{x-1} \Rightarrow \\
&= \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1} \\
&\Rightarrow A = 3/2,\ B = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Bulduğumuz bu deperleri (??) eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{x^5+2}{x^2-1} = x^3 + x - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} \tag{23.36}$$

olur. Sağ yandaki terimler integrallenebilir olduğundan

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,dx \\
&= \int x^3\,dx + \int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C
\end{aligned}
$$

Örnek 23.30.
$$I=\int \frac{3x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm: Kısmi kesirlererine ayırıp integrale geçilirse,
$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{x\,dx}{(x^2+2)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}\,dx\\
&=ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+2)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+2)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+2)^2)^2}\\
&=ln|x|-\frac{1}{2}ln(x^2+2)-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)}+\frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$

Örnek 23.31.
$$I=\int \frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$\begin{aligned}
\frac{6x^3+5x^2+21x+12}{x(x+1)(x^2+4)}&=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\\
6x^3+5x^2+21x+12&\equiv A(x+1)(x^2+4)+Bx(x^2+4)+(Cx+D)x(x+1)\\
&\equiv(A+B+C)x^3+(A+D+C)x^2+(4A+4B+D)x+4A
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow A+B+C&=6\\
A+C+D&=5\\
4A+4B+D&=21\\
4A&=12
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow A=3, B=2, C=1, D=1$$

Bunları yerlerine koyarsak, integral,
$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{3}{x}\,dx+\int\frac{2}{x+1}\,dx+\int\frac{x+1}{x^2+4}\,dx\\
&=3ln|x|+2ln|x+1|+\frac{1}{2}ln|x^2+4|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C\\
&=ln|x^3(x+1)^2\sqrt{x^2+4}|+\frac{1}{2}Arctan\frac{x}{2}+C
\end{aligned}$$

Örnek 23.32.
$$I=\int \frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$$\begin{aligned}
\frac{x^5-x^4-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}&=(x+1)+\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\\
&=(x+1)+\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\\
&=(x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I&=\int\left((x+1)+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx\\
&=\frac{1}{2}x^2+x+ln(x^2+1)+tan^{-1}x-2ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C
\end{aligned}$$

Örnek 23.33.

$$I=\int\frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
2x^2-6x+4 &= 2(x^2-3x)+4\\
&= 2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}+4-\frac{9}{2}\right)\\
&= 2(u^2-a^2) \qquad\qquad \Rightarrow u=x-\frac{3}{2},\quad a=\frac{1}{2},\quad du=dx\\
x+1 &= u+\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{(u+\frac{5}{2})}{\sqrt{2(u^2-a^2)}}\,du\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int 2\sqrt{z}\,dz+C_1\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{z}+C_1\\
&= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}}+C_1
\end{aligned}$$

$$I_2=\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C_2$$

O halde,

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C\\
&= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|(x-\frac{3}{2})+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.34.

$$I=\int\frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{4(x^2+x)+2} \\
&= \int \frac{dx}{4(x^2+x+\frac{1}{4})+(2-\frac{4}{4})} \\
&= \int \frac{du}{4(u^2+1)}, \qquad (u = x+\frac{1}{2})\} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+(\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/2} arctan \frac{u}{\frac{1}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} arctan(2x+1) + C
\end{aligned}
$$

23.10 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması

Rasyonel fonksiyon iki polinomun ~~bölümü~~ biçiminde olan fonkiyonlardır:

$$
r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 4a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 4b_3 x^3 + \ldots + b_n x^m} \tag{23.37}
$$

bu ifadede $n \geq m$ ise rasyonel fonksiyona bileşik kesir, $m < n$ ise basit kesir denilir. Başka bir deyişle, paydanın derecesi payın derecesinden küçükse rasyonel fonksiyona bileşik kesir, değilse basit kesir denilir. Bu sınıflandırma sayılardaki bileşik ve basit kesir tanımı gibidir.

Bileşik kesir halinde olan rasyonel fonksiyonlar basit kesirlerine ayrılabilir. Bunun için paydaki polinomun paydadaki polinoma bölünmesi yeterlidir. Bu bölme işlemi sonunda,

$$
r(x) = p_1(x) + r_1(x) \tag{23.38}
$$

gibi bir ifade çıkar. Burada, *der* polinomum derecesini göstermek üzere, $p_1(x)$ bir polinomdur ve derecesi $n-m$ dir. $r_1(x)$;yani

$$
r_1(x) = \frac{p_2(x)}{q(x)} \qquad (der\{p_2\} < der\{q\}) \tag{23.39}
$$

biçiminde rasyonel bir fonsiyondur ve payın derecesi paydanın derecesinden kesinlikle küçüktür.

Bu türlerin integrali için parçalı kesirlere ayırma (partial fraction) yöntemi kullanılr. İntegrallenen rasyonel fonksiyon parçalı kesirlerine ayrılınca her terim bilinen yöntemlerle integrallenebilir hale gelir.

(??) biçiminde bir fonksiyonun integrali isteniyorsa, sırasıyla şu eylemler yapılır:

1. $p(x)$ polinomumun derecesi $q(x)$ polinomunun derecesinden daha büyükse, önce

$$
r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + r_1(x) \tag{23.40}
$$

bölme işlemi yapılır.

2. Bölme işleminin verdiği $p_1(x)$ polinomu terim terime integral-lenebilir.
3. Rasyonel $r_1(x)$ fonksiyonunun $q(x)$ paydası çarpanlarına ayrılır.
4. Her çarpana karşılık gelen basit kesirler bulunur.
5. Bulunan kesirlerin tek tek integralleri alınır.

Rasyonel fonksiyonun parçalı kesirlere ayrılması eylemi polinomların bir konusudur. Ama rasyonel fonksiyonların integralinde sık sık karşılaşacağımız basit kesirlere ayırma eyleminin esaslarını anlatmalıyız.

n-inci dereceden bir polinomun n tane kökü olduğunu biliyoruz. Önceki kesimde her köke karşılık polinomun bir çarpanı olduğunu söylemiştik.

Teorem 23.35. $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{m-1} + b_m x^m$ *polinomunun* $(x-c)q_1(x)$ *biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul c nin bir kök olması; yani* $q(c) = 0$ *olmasıdır.*

Rasyonel fonksiyonların bait kesirlere ayrılışını gösteren aşağıdaki teoremin Kanıtı, bu kitapta olmayan bazı teknik bilgilere dayanır. O nedenle teoremi Kanıtsız olarak ifade edeceğiz:

Teorem 23.36. *Basit kesir biçimindeki rasyonel* $q(x)$ *fonksiyonun paydası*

$$q(x) = a(x-c_1)^{r_1}\ldots(x-c_k)^{r_k}\left((x^2+b_1x+d_1)^{s_1}\ldots(x^2+b_mx+d_m)^{s_m}\right) \tag{23.41}$$

biçiminde ve bu gösterimdeki iki doğrusal ya da quadratik çarpan aynı değil ve indirgenemez ise $q(x)$ *rasyonel fonksiyonu,*

$$q(x) = B_{lin} + B_{quad} \tag{23.42}$$

biçiminde iki blokun toplamına eşittir. Bu bloklar için aşağıdaki kurallar geçerlidir: Her farklı $(x-c_i)$ *doğrusal çarpanı için,* c_i *k katlı kök ise,*

$$B_{lin} = \frac{A_1}{(x-c_i)} + \frac{A_2}{(x-c_i)^2} + \ldots + \frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}} \tag{23.43}$$

biçimindeki k terimli bir blok oluşur.

$(x^2+b_ix+d_i)$ *quadratik çarpanı m-katlı bir çarpan ise*

$$B_{quad} = \frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_ix+d_i)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+b_ix+d_i)^2} + \ldots + \frac{B_{s_i}x+C_{s_i}}{(x^2+b_ix+d_i)^{s_i}} \tag{23.44}$$

biçimindeki m öğeli bir blok oluşur.

Bloklardaki A_h, B_s, C_t *sabit katsayıları* $q(x)$ *polinomuna bağlı olarak tek olarak belirlenebilirler.*

(**??**) ve (**??**) ifadelerinde terim sayıları ilgili kökün kaçıncı dereceden katlı kök olduğuna bağlıdır. Örneğin, $r_k = 1$ ise c_1 tek katlı kök olur. Dolayısıyla, B_{lin} blokunun tek öğesi var olur. $\frac{A_1}{(x-c_1)}$ terimi (**??**) blokunun biricik terimi olur. Benzer şekilde, $s_m = 1$ ise (**??**) blokunun biricik terimi $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+b_1x+d_1)}$ olur.

Kanıt:

$q(x)$ polinomu $x-c$ ile tam bölünebiliyorsa $q(c) = 0$ olacağından,

$$\begin{aligned}
q(x) &= q(x) - q(c) \\
&= b_0 + b_1x + b_2x^2 4b_3x^3 + \ldots + b_{n-1}x^{m-1} + b_mx^m - (\\
&\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 4b_3c^3 + \ldots + b_{n-1}c^{m-1} + b_mc^m) \\
&= b_1(x-c) + b_2(x^2-c^2) + b_3(x^3-c^3) + \ldots + b_m(x^m-c^m)
\end{aligned} \tag{23.45}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + c^{n-1}), \qquad (n = 1, 2, \dots, m) \tag{23.46}$$

dir. (19.1) ve (20.53) bağıntılarından istenen çıkar.

Örnek 23.37.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \tag{23.47}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 4 sayısını çarpanları $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ sayılarıdır. Bunlar arasında $p(c) = 0$ yapan tek sayı $c_1 = 3$ sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \tag{23.48}$$

olur. Geriye kalan $q_1(x) = (x^2 - 2)$ polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri $\pm\sqrt{2}$ dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \tag{23.49}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Örnek 23.38.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \tag{23.50}$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda x dğişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz.Parantez içindeki polinomun tansayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından, $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ sarılarının kök olup olmadıklarını denemeliz. $c = 2$ sayısı için $q_1(2) = 0$ olduğu; yani $c_2 = 2$ sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2 - 2x - 4) \tag{23.51}$$

yazılabilir. Burada geriye kalan $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$ ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. Ohalde, $q(x)$ polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) \tag{23.52}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

23.11 *Rasyonelleştirme*

İntegrali alınacak fonksiyon köklü ifadeler içeriyor, ya da integrali bilinen bir tipten değilse, uygun bir değişken değiştirimi ile rasyonel fonksiyon haline getirilir ve ona rasyonel fonksiyon için bilinen integral alma yöntemleri uygulanır.

Örnek 23.39.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \tag{23.53}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrali alınacak fonsiyon bir kare kök, bir de küp kök içeriyor. her iki köklü ifadeden kurtulmak için $u = \sqrt[3]{x}$, $x = u^6$, $6u^5 du = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{u^3}{1+u^2} 6u^5 du \\
&= 6 \int \frac{u^8}{1+u^2} du \\
&= \int (6u^6 - 6u^4 + 6u^2 - 6 + \frac{1}{1+u^2} \quad \text{(payı paydaya böl)} \\
&= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + \tan^{-1} u + C \\
&= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + C
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 23.40.

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \tag{23.54}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$u = 1 + e^x$, $ln(u-1) = x$, $\frac{1}{u-1} du = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \left(\frac{1}{u} \frac{1}{u-1} \right) du \\
&= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du \\
&= ln|u-1| - ln|u| + lnC \\
&= ln\left| \frac{u-1}{u} \right| + C \\
&= ln\left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + C \\
&= ln\left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + C
\end{aligned}$$

23.12 Köklü İfadelerin İntegrali

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yöntem, integradı kökten kurtaracak uygun bir dğişken değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi () kesimi içinde görmek daha doğrudur. Bir kaç örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

Örnek 23.41.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}} dx \tag{23.55}$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:
Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. Karkökten kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek

$u = \pi + 2x$, $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$ konumunun işe yaradığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\ &= \int \frac{udu}{u} \\ &= \int du \\ &= u + C \\ &= \sqrt{\pi+2x} + C\end{aligned}$$

Örnek 23.42.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}dx \tag{23.56}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Karekökten kurtulmak için, $u^2 = 3x-1$, $\quad x = \frac{1}{3}(u^2+1)$, $\quad 2udu = 3dx$, $\quad dx = \frac{2}{3}udu$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}dx &= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}udu \\ &= \frac{2}{9}\int udu + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{9}u^2 + \frac{2}{9}ln|u| + C \\ &= \frac{1}{9}(3x-1) + \frac{2}{9}ln|\sqrt{3x-1}| + C\end{aligned}$$

Örnek 23.43.

$$\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}} dx \tag{23.57}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Uygun bir değişkn değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. ~~Bunun için küp köklü ifadenin içinin~~ $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ olduğunu biliyoruz. Sonra

$u^3 = (x-2)$, $3u^2du = dx$, $(x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{-\frac{10}{3}}$

konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \left(x^2-4x+4\right)^{-\frac{5}{3}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2-4x+4})^5}dx \\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}}du \\ &= 3\int u^{-8}du \\ &= -\frac{3}{7}u^{-7} + C \\ &= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C\end{aligned}$$

Örnek 23.44.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx \tag{23.58}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u^2 = x, 2udu = dx$ konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}du \\ &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \\ &= 2Arcsinu + C \\ &= 2Arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.45.

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2-3x)+4 &= 2(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + 4 - \frac{9}{2} \\ &= 2(u^2 - a^2) \\ u &= x - \frac{3}{2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ du &= dx \\ x+1 &= u + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \frac{(u+\frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2-a^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2)}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int z^{-1/2}dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}z^{1/2} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2-a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C_2$$

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2 \\ &= \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} ln\left|x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-3x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Örnek 23.46.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos^u + b\sin^2 u \\
dx &= (-2a\cos u.\sin u + 2b\sin u\cos u)\,du \\
&2\sin u\cos u(b-a)\,du \\
&= (b-a)\sin 2u\,du, \quad (x-a) = a(\cos^2 u - 1) + b\sin^2 u = (b-a)\sin^2 u \\
(b-x) &= b((1-\sin^2 u) - a\cos^2 u = (b-a)\cos^2 u \\
\sqrt{(x-a)(b-x)} &= (b-a)\sin u\cos u
\end{aligned}
$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \\
&= \int \frac{(b-a)\sin 2u}{(b-a)\sin u\cos u}\,du \\
&= 2\int du \\
&= 2u + C
\end{aligned}
$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b-a}{b-a}\tan^2 u \Rightarrow u = \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

değeri kullanılarak,

$$I = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$$

bulunur.

Örnek 23.47.

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2\tan t,\, dx = 2(\sec^2 t)\,dt$$

konumuyla,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1+\tan^2 t)}}(1+\tan^2 t)2\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\frac{2}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t(sec t + \tan t)}{(sec t + \tan t)}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t + \sec^2 t}{(sec t + \tan t)}\,dt \\
&= \ln|sec t + \tan t|_0^{\frac{\pi}{2}} + C \\
&= \ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}
$$

Örnek 23.48.

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \sqrt{3}\tan t, dx = \sqrt{3}\sec^2 t\, dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}\, dx \\
&= \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t}{3\tan^2 t\sqrt{3}\sec t}\, dt \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\
&= \frac{1}{3}\int (\sin^2 t)\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{\sin t} + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+3}}{3x} + C
\end{aligned}$$

Örnek 23.49.

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{2}{\cos t}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\, dx \\
&= \int \frac{\frac{2\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t}\cdot\frac{2\sin t}{\cos t}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int dt \\
&= \frac{1}{3}t + C \\
&= \frac{1}{3}\arccos(\frac{2}{x}) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}}\, dx \\
&= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\
&= \int \frac{udu}{u} \qquad (u^2 = \pi + 2x, 2udu = 2dx, dx = udu) \\
&= u + C \\
&= \sqrt{\pi+2x} + C
\end{aligned}$$

$$\int (1-2x)^9 dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^9(-2dx) = -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx \\
&= \frac{2}{9}\int \frac{(u^2+1)}{u^2}\,du \qquad (u^2 = 3x-1) \\
&= \frac{2}{3}\int u\,du + \frac{2}{9}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{3}(3x-1) + \ln\sqrt{3x-1} + C
\end{aligned}$$

Örnek 23.50.

$$I = \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm:

$$(x^2-4x+4) = (x-2)^2,\ u^3 = x-2,\ 3u^2du = dx,\ (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{\frac{-10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
I &= \int (x^2-4x+4)^{-\frac{5}{3}}\,dx \\
&= \int \frac{3u^2}{u^{10}}\,du \\
&= -\frac{3}{7}u^{-7} \\
&= -\frac{3}{7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
\end{aligned}$$

Örnek 23.51.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.
Çözüm: $u^2 = x$ konumuyla,,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \int \arcsin u + C \\
&= 2\arcsin\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

23.13 Alıştırmalar

Aşağıdaki integral eşitliklerini sağlayınız.

1. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C$
2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1} dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-1| + C$
4. $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})} dx = 2\int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2\int \frac{e\hat{u}du}{1+e^{u}} = \ln(e\hat{u}+1) + C$
5. $\int \frac{2^x}{4^x+1} dx = \int \frac{1}{\ln 2}\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x+\sqrt{4^x+1}}{\ln 2} + C$
6. $\int \frac{\sinh\sqrt{x}.\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \sinh^2\sqrt{x} + C$

23.14 İndirgenme Yöntemleri

İntgral eylemindeki indigeme formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

Örnek 23.52.

$$\int cos^n x\,dx \tag{23.59}$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\cos x)^n\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.\cos x\,dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1}.d(\sin x) \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned} \int cos^n x\,dx &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - \int \sin x.d\left((\cos x)^{n-1}\right) \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int \sin x.(\cos x)^{n-2}.\sin x\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(\sin x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}.(1-(\cos x)^2\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)\int (\cos x)^{n-2}\,dx - (n-1)\int (\cos x)^n\,dx \\ &= (\cos x)^{n-1}.\sin x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

çıkar. Buradan I_n çözülürse

$$\begin{aligned} I_n + (n-1)I_n &= (cosx)^{n-1}.\sin x + (n-1)I_{(n-2)} \\ nI_n &= (cosx)^{n-1}.\sin x + (n-1)I(n-2) \\ I_n &= \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}I_{(n-2)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n \, dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}.\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2}\, dx \qquad (23.60)$$

indirgeme fomülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n \, dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}.\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\, dx \qquad (23.61)$$

Örnek 23.53.

$$\int cos^5 x\, dx$$

integralini bulmak isteyelim. $n = 5$ olduğundan

$$n = 5 \Longrightarrow I_5 = \int (\cos x)^5\, dx = \frac{1}{5} cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3$$
$$n = 3 \Longrightarrow I_3 = \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3} I_1$$
$$n = 1 \Longrightarrow I_1 = \int cos x\, dx = \sin x + C_1$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$I_1 = \int cos x\, dx = \sin x + C_1$$
$$I_3 = \frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3} sin x + C_2 \qquad (C_2 = \frac{2}{3}C_1)$$
$$I_5 = \frac{1}{5}(\cos x)^4.\sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}(\cos x)^2.\sin x + \frac{2}{3}\sin x\right) + C$$

Örnek 23.54.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\, dx \qquad (23.62)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. x^n çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uygulu-yoruz.

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\, dx$$
$$= \frac{1}{n+1}\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \qquad \left(x^n\, dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1}\right)$$

$$\int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) = x^{n+1}e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x})$$
$$= x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha\int x^{n+1}e^{\alpha x}\, dx$$

$$(n+1)I_n = x^{n+1}e^{\alpha x} - \alpha I_{n-1}$$
$$I_n = \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n I_{n-1}\right)$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(x^n e^{\alpha x} - n\int x^{n-1}e^{\alpha x}\right) \qquad (23.63)$$

indirgeme formülü bulunur.

23.15 Bazı İndirgeme Formülleri

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1} \\
I_n &= \int \frac{1}{x^n\sqrt{(ax+b)}}\,dx \\
\Longrightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1} \\
In,m &= \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} \\
\Longrightarrow a^2 In,m &= a^2 Im,n + Im-2,n \\
I_n &= \int x^n \sin(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n\cos(ax) + nx^{n-1}\sin(ax) - n(n-1)I_{n-2} \\
J_n &= \int x^n \cos(ax)\,dx \\
\Rightarrow a^2 J_n &= ax^n\sin(ax) + nx^{n-1}\cos(ax) - n(n-1)J_{n-2} \\
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
\Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}
\end{aligned}
$$

Örnek 23.55. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$
I_n = \int x^a(\ln x)^n\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^n - \frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (23.64)
$$

indirgemr formülünü ispatlayınız.

$$
u = (\ln x)^n,\ du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, dv = x^a\,dx,\ v = \frac{1}{a+1}x^{a+1}
$$

konumuyla,

$$
I_n = \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^{a+1}(\ln x)^{n-1}\,dx \quad \square
$$

Örnek 23.56. *$a \neq -1$ ve $n > 0$ olduğunda*

$$
I_n = \int x^{-1}(\ln x)^n\,dx = \int (\ln x)^n\,d(\ln x) = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + C \qquad (23.65)
$$

dir.

$$
I_n = \int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \qquad (23.66)
$$

dir.

$$
I_n = \int \cot(ax)\,dx = \ln|\sin(ax)| + C \qquad (23.67)
$$

dir.

$$I=\int \tan^n x dx=\int \tan^{n-2} x(\sec^2 x-1)dx$$
$$=\int \tan^2 x.\sec^2 xd-\int \tan^{n-2} xdx$$
$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-\int \tan^{n-2} x\,dx$$

dir.

$$I=\int \tan(x)\,dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos x}\,dx$$
$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

dir.

$$I=\int \sec(x)\,dx=\ln|\sec(x)+\tan x|+C$$

dir.

$$I=\int \cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\int \cos(ax)\,d(ax)=\frac{1}{a}\sin(ax)+C$$

dir.

23.16 Bağlantılı Oranlar

1. Bir parçacık $2=x+2y$ doğrusu boyunca pozitif yönde gidiyor.

   (a) x koordinatının değişimi saniyede 4 birim ise y koordinatını değişimi nedir?

   (b) y koordinatının değişimi saniyede -2 birim ise x koordinatını değişimi nedir?

   Çözüm:

   (a):
   $$x+2y=2\Rightarrow x'+2y'=0\Rightarrow 4+2y'=0\Rightarrow y'=-2\text{ br/sn}$$
   olur. (b):
   $$x+2y=2\Rightarrow x'+2(-2)=0\Rightarrow x'-4=0\Rightarrow x'=4\text{ br/sn}$$
   olur.

2. Bir parçacık $x^2+y^2=25$ eğrisi boyunca hareket ediyor. $(3,4)$ noktasından geçerken y koordinatı saniyede 2 birim azalıyor. x koordinatının değişimi nedir?

   Çözüm: $x=3$ iken $y=4$ dür.
   $$2xx'+2yy'=0\Rightarrow 3x'+4(-2)=0\Rightarrow x'=\frac{8}{3}$$
   olur. Demek ki x koordinatının değişimi $\frac{8}{3}$ br/sn dir.

3. Bir kamera bir eşkener üçgenin oranlarını koruyarak küçültüyor. Belirli bir anda bir kenarın küçülmesi k cm/sn dir. Üçgenin alanının değişim oranı nedir?

   Çözüm:

   Alan formülünü yazalım. Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu x ise yüksekliği $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}4}{x}$ olacaktır. Öyleyse alan

$$A = \frac{1}{2}hx = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$
$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}2xx' = \frac{\sqrt{3}}{2}xk\ cm^2/\text{dk}$$

   olur.

4. Özel Görelilik kuramına dingin haldeyken kütlesi m olan bir cismin hızı v ise, ışık hızı c olmak ğüzere, cismin uzaydaki hızı

$$m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

   dir. Cismin hızı ışık hızının yarısına eşit olduğunda, hızının değişimi saniyede $0.01c$ ise kütlesinin değişimi nedir? [Görelilik kuramına göre cismin kütlesi hızına bağlı olarak değişir.]

   Çözüm: Cismin hareket halindeki kütlesine M diyelim.

$$M = m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$
$$M' = m\frac{vv'}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

   olur.

5. Kenar uzunlukları x ve y olan dikdörtgenin kenarları, sırasıyla, u ve v oranında değişiyor. Dikdörtgenin alanının değişim oranını bulunuz.

   Çözüm:

   Dikdörtgenin alanı $A = xy$ dir. t anındaki değişim

$$\frac{dA}{dt} = x'y + xy' = uy + vx$$

   olur.

6. İki bisiklet yarışçısından birisi (G) güneyden kuzeye doğru bitim noktasına (finish F), ötekisi (D) doğudan batıya doğru aynı bitim noktasına (F) doğru yol alıyorlar. G yarışçısının hızı 13 km/saat'dir. İki yarışçının bitim noktasına uzaklıkları eşit olduğu anda, aralarındaki uzaklık 16 km.dir. Aralarındaki uzaklık 17km/saat hızla azalıyor. Yarışı hangisi kazanacaktır?

   Çözüm: G yarışçısının bitim noktasına uzaklığı x, D yarışçısının y olsun. Aralarındaki uzaklık bir dik üçgenin hipotenüsüdür ve $d^2 = x^2 + y^2$ dir. Uzaklığın türevini alırsak, $dd' = xx' + yy'$ dür. $x = y$ olduğunda $d = 16$ veriliyor. O anda uzaklık formülünden $x = y = \frac{16}{\sqrt{2}}$ ve türev formülünden $y' = 13 - 17\sqrt{2} \approx -11km/saat$ bulunur. $y' < x'$ olur. O halde G yarışçısı daha hızlıdır ve yarışı kazanacaktır.

Index