0.1 Akışkanlar Dinamiği

Akışkanların dinamiği katı cisimlerin dinamiği ile aynıdır, belki de tek fark kati cisimlerde sabit olan kütle yerine akışkanlar bulundukları kabın şeklini aldığı için yoğunluğun kullanılmasıdır. Buna bağlı olarak kuvvet yerine basıncın tanımlandığı yukarıda belirtilmiştir. Momentum ve korunumu yerine akı, enerji yerine yine enerjinin bir başka ifadesi olan ve basınç birimindeki Bernoulli denklemi kullanılırken hareket denklemleri daha farklı ve karmaşıktır ve fazla matematik işlem gerektirir. Eğer karmaşık akışkan hareket ve davranışları incelenmek istenirse birinci mertebe diferansiyel denklem olarak verilen Euler denklemleri veya Navier-Stokes denkleminin kullanılması gerekmektedir.

Akışkanların hareketleri ile ilgili kanun ve ifadelerinin öncelikle sıkıştırılamaz akışkanlar için ele alınması konunun anlaşılması bakımından daha uygun olacaktır. Bir m kütlesine sahip sıkıştırılamaz bir akışkan, örneğin su, bir boru ya da kanal içinde hareket ederken, buna ilave ve eksiltme yapılmadığı sürece kütlesi korunacaktır. Örneğin Şekil **??**'da kesit alanı değişen bir boruda akan bu m kütleli akışkanın kütlesi şekildeki 1 ve 2 noktalarında korunmalıdır, yani $m_1 = m_2$ olmalıdır. Öte yandan akışkan boru içinde hareket ettiği için borunun şeklini alacak, yani şekil değiştirecektir; buna bağlı olarak da hızının 1 ve 2 noktalarında farklı olması gereklidir. Bu olay, akışkanın kütlesinin korunumunun zamana göre de değiştirmemelidir;

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \tag{1}$$

Kütle değişimi, akışkanın sıkıştırılamaz olması nedeniyle sabit yoğunluk ile değişen hacim olacağından ve hacimin de kesit alanı ile diferansiyel yer değiştirme olarak tanımlanacağından,

$$\rho\ \frac{dV_1}{dt} = \rho\ \frac{dV_2}{dt} \qquad \text{ve} \qquad A_1\ \frac{dx_1}{dt} = A_2\ \frac{dx_2}{dt} \qquad \text{ya da} \qquad A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2}$$

eşitliği bulunur ki bu akışkan akısı olarak tanımlanır;

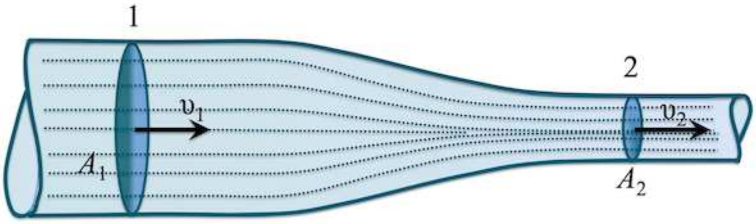
$$\Phi = A\ \frac{dx}{dt} = A\ v \tag{3}$$

Bu sonuca göre sıkıştırılamaz bir akışkanda eğer dışarıdan bir ilave ya da dışarıya kaçak yoksa akı korunur, (katılarda momentumun korunumu gibi). Fıskiyelerin çalışma ilkesi ve insanların doğal bir hareket olarak bahçe sularken suyu daha uzağa ulaştırmak için hortumun ucunun sıkarak daraltmasının nedeni akı korunumunda yatmaktadır. Hortumun ucunu sıkarak kesit alanı küçültülürken suyun çıkış hızı arttırılır ve dolayısıyla su daha uzak mesafelere ulaşabilir.

Sıkıştırılamayan akışkanlar için *akı* tanımı kütle korunumu ifadesi olarak kullanılır ve birim kesit alandan birim zamanda geçen sıkıştırılamaz akışkan miktarıdır. A akışkanın aktığı kabın kesit alanı ve v akışkanın akış hızı olmak üzere;

$$\Phi = Av \tag{4}$$

ifadesi ile verilir. Örneğin kesit alanı değişen bir borudan akan sıvı için akı, borunun kesit alanları A_1 ve A_2 olan bölgelerinde v_1 ve v_2 hızlarıyla akıyorsa iki bölge için akı korunumu



Şekil 1: Kesit alanı iki yerinde farklı bir boruda akan sıkıştırılamaz akışkanın akı korunumu için temsili şekil. Akışkanın yönü iki tarafa da olabilir. Akış çizgilerinin sıklığı hızı temsil etmektedir.

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ olacaktır. Şekil **??** akı denkleminin uygulamasını göstermektedir. Bu denklemin en yaygın gösterimi, yukarıda belirtildiği üzere bir bahçe horumu ile sulama yaparken suyun daha uzağa ulaşması için hortumun ucunun daraltılmasıdır.

0.1.1 Bernoulli Denklemi

Bernoulli denklemi, akışkanlar için mekanik enerjinin korunumunun bir ifadesidir. Mekanik enerji, Dünya yüzeyinde bir akışkanın bir referansa göre sahip olduğu enerji E_0, konumu h yükseklikte ve hızı v alınırsa sahip olduğu mekanik enerjinin

$$E = E_0 + mgh + \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

olacağı bilinmektedir. Akışkan hareket halindeyken şekli değiştirir, fakat şekil değişse de dışarıdan ilave veya eksiltme olmaksızın sıkıştırılamaz akışkanın hacmi korunacaktır. Buna dayanarak enerji denkleminde kütle $m = \rho V$ alındıktan ve denklem terim terim V ile bölündükten sonra

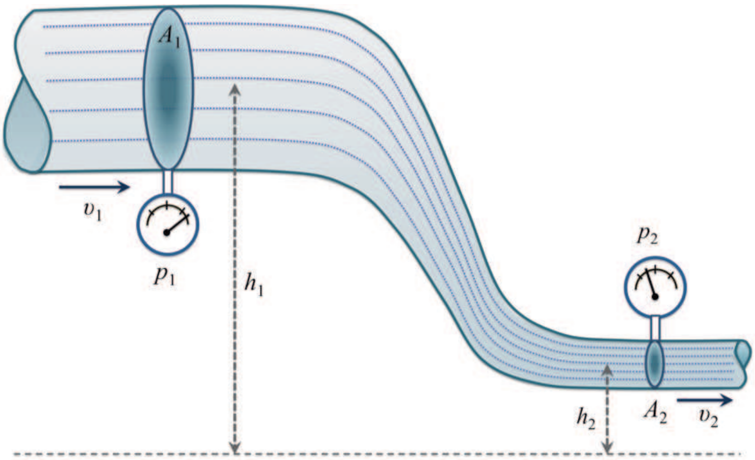
$$p(y, v) = p_0 + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{6}$$

ifadesi elde edilecektir. Denklemde $p_0 = E_0/V$ alınmıştır ve bu basınç akışkana dışarıdan uygulanan dış basınç ve çoğunlukla açık hava basıncıdır.

Bernoulli denklemi enerji denkleminin bir biçimi olduğundan, hareket halindeki sıkıştırılamaz bir akışkan iki farklı konumda, dışarıdan ilave ve eksiltme olmaksızın enerjisini koruyacaktır. Bu iki konum 1 ve 2 ile etiketlenmiş olsun. Bu noktalardaki dış basınçlar p_1 ve p_2, referans noktasından yükseklikleri h_1 ve h_2, akış hızları v_1 ve v_2 olarak alınırsa korunum ifadesi

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{7}$$

olacaktır. Mekanik denklemleriyle birlikte bu denklemler düzgün akan akışkanlarda ve akışkanları olayların değerlendirilmesinde büyük oranda yeterlidir. Şekil **??** Bernoulli denklemine esas oluşturan bir akışkan akışını temsil etmektedir. Gerek Denklem **??** ve gerek Şekil **??** kesiti ve yüksekliği değişen bir kanal ya da boru içinde düzgün akan bir sıkıştırılamaz akışkanda, hızın yavaş olduğu yerde basıncın yüksek, hızın yüksek olduğu yerde de basıncın



Şekil 2: Bernoulli denklemine esas oluşturan sistemin temsili. Akışkan iki yöne de akabilir. Basınç 1 indisli bölgede hız düşük ve basınç yüksek, 2 indisli bölgede hız yüksek ve basınç düşüktür.

düşük olduğunu göstermektedir. Bu durum akışkanların hareketinde temel davranışlardan birisidir.

Akışkanların hareketini içeren doğal olaylar ile bunu kullanan teknolojiler ilk yaklaşımda Bernoulli denklemi ile tanımlanır. Bu denklem sıkıştırılamayan, türbülans yapmadan yavaş ve düzgün hareket eden akışkanlarda iyi sonuçlar verir. Fakat aşırı hızlı hareket eden, sıkıştırılabilir ve türbülanslı akışkanlarda yaklaşık sonuçlar verir. Bu tür akışkan hareketlerinde başka teoriler kullanılmalıdır. Aşağıda verilen örnekler bu davranışın anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Örnekler akışkanın sıkıştırılamaz olması ve düzgün akması kabulü ile verilmiştir. Gerçekte sıkıştırılabilir ve türbülanslı hareket eden akışkanlar da temelde bu kanuna bazı ilavelerle uyarlar.

Örnek 0.1 Bir nehrin debisinin ölçülmesi: Şekil **??**'da akı korunumunun temsili için verilen aygıt bir akışkanın akış hızını ölçmek için kullanılabilir. Venturi tüpü olarak bilinen bu aygıtın boyutları şekilde verilmiştir. Bu verilerle nehrin debisini ölçünüz.

ÇÖZÜM: Gerçek ölçümlerde venturi tüpünün iki kesit alanı şekilde gösterildiği kadar farklı olmamalıdır, aksi halde düzgün akış bozulur.

Tüpün geniş tarafı akışkanın akış yönüne karşı tutulur. Burada akışkanın hızı gerçek hızına oldukça yakındır ve daralan kısmında akışkanın hızı artacaktır. Denklem **??**'de verilen akı korunumu ifadesi ile **??**'de verilen Bernoulli denklemi birlikte kullanılarak nehrin ölçüm yapılan bölgesindeki akış hızı ve sonra da debisi bulunabilir.

Tüpün geniş kısmının indisi 1 ve dar kısmının indisi 2 alınmış olsun. Venturi tüpü yatay olduğundan iki tarafında yükseklikler eşit, $h_1 = h_2$, olduğundan denklemde bu terimler birbirlerini yok ederler. Tüpün kesit alanları A_1 ve A_2 bilinmekte, bu iki noktadaki basınçlar da basınç ölçerlerden okunmaktadır. Bilinmeyen iki değer akışkanın hızları v_1 ve v_2 iki denklemin ortak çözümünden bulunacaktır;

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{ve} \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Çözüm sonunda nehrin akış hızı

$$\upsilon_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\ (A_1^2 - A_2^2)}}$$

olarak bulunur. Bu hız A_1 kesit alanı ile çarpılarak nehrin akısı ya da debisi bulunur;

$$\Phi = A_1\ \upsilon_1$$

Sayısal bir örnek olmak üzere venturi tüpünün kesit alanları $A_1 = 0.025$ m^2, $A_1 = 0.02$ m^2, ölçülen basınçlar $p_1 = 1$ atm ve $p_2 = 0.92$ atm olsun. Suyun yoğunluğu $\rho = 1000$ kg/m^3 ve 1 atm=131325 Pa alınarak nehrin akış hızı

$$\upsilon_1 = 0.02\sqrt{\frac{2(1-0.92)\times 131325}{1000(0.025^2 - 0.02^2)}} = 8.4 \text{ m/s}$$

ve nehrin debisi

$$\Phi = 0.025 \times 8.4 = 6.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

olacaktır. Nehrin o bölgedeki kesit alanı ölçülebilirse birim zamanda taşınan toplam su bulunabilir.

Aynı düzenek rüzgar hızının ölçülmesi, bir uçağın havaya göre hızının ölçülmesi gibi amaçlar için de değerlendirilebilir.

Örnek 0.2 Yüksekte duran içi sıvı dolu bir tankın alt kısmındaki bir delikten akan suyun izlediği yol:

a) Şekil **??**'de verilen silindir kesitli su tankının kesit alanı A_1 ve yüksekliği h_1 yerden h_0 yüksekte bir destek üzerindedir. Tankın kapağı açıktır ve atmosfer basıncına maruzdur. Tankın tabanından h_1 yüksekte A_2 kesit alanına sahip delik açılmıştır. Tankın alt deliğinden akan suyun yere düştüğü noktanın tankerdeki su yüksekliğine göre değişimi için

b) Alt deliğin alanının gözardı edilmesi durumunda yaklaşık ifadesini bulunuz.

c) Suyun en uzağa ulaşması için deliğin tank tabanına göre hangi yükseklikte açılması gerektiğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM: Tankın üzeri açıktır ve atmosfer basıncına maruzdur. Bernoulli denklemi, zemine göre

$$p_1 + \rho g(h_0 + y) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \rho g(h_0 + h_1) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

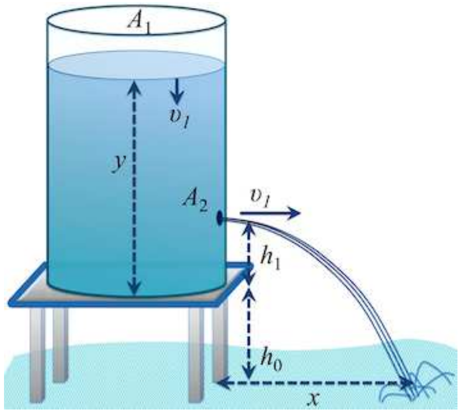
olarak yazılabilir.

a) Tankın yüksekliği atmosfer basıncını etkileyecek kadar olmadığından tankın üstünde ve alttaki deliğinde basınçlar aynı olacaktır, $p_1 = p_2$. Bu kabulle denklem düzenlenirse

$$2g(h_0 + y - h_0 - h_1) = \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2$$

olarak yazılır. Sıkıştırılamaz akışkan olması nedeniyle akı korunumundan

$$\upsilon_1 = \frac{A_2}{A_1}\,\upsilon_2$$



Şekil 3: Örnek **??** şekli.

alınarak denklemde yerine konduktan sonra düzenlenirse

$$2g(y-h_1)=\frac{A_1^2-A_2^2}{A_1^2}\,v_2^2 \quad \text{buradan da} \quad v_2^2=\frac{2gA_1^2(y-h_1)}{A_1^2-A_2^2}$$

ifadesi bulunur. Bu hız suyun alttaki delikten çıkış hızıdır.
Bundan sonra kinematik denklemler geçerlidir. Suyun alacağı yatay yol ifadesinden yere düşme süresi $t=x/v_2$ olur. Suyun yere düşme denklemi

$$z=h_0+h_1+v_{y0}t-\frac{1}{2}\,gt^2$$

alınarak yere düşme durumu için düzenlendikten ve $t=x/v_2$ alındıktan sonra

$$0=h_0+h_1+0-\frac{1}{2}\,gt^2 \quad \text{ya da} \quad 2(h_0+h_1)=\frac{gx^2}{v_2^2}$$

haline gelen ifadede Bernoulli denkleminden bulunan suyun çıkış hızı v_2 yerine konur ve x için düzenlenirse

$$x=2A_1\sqrt{\frac{(h_0+h_1)(y-h_1)}{A_1^2-A_2^2}}, \quad (y>h_0+h_1)$$

sonucu bulunacaktır.

b) Eğer deliğin yüzey alanı tankın yüzey alanına göre çok küçükse, yani $A_2 \ll A_1$, bu durumda A_2 gözardı edilebilir ve x uzaklığı basitleşir;

$$x=2\sqrt{(h_0+h_1)(y-h_1)}, \qquad (y>h_0+h_1)$$

c) Suyun maksimum uzaklığa ulaşması için tankın tabanından ne kadar yükseklikte olması gerektiği, x ifadesinin h_1 parametresine göre türevinin sıfır olması ile belirlenir;

$$\frac{dx}{dh_1}=\frac{2A_1}{\sqrt{A_1^2-A_2^2}}\,\frac{y-h_1-h_0-h_1}{2\sqrt{(h_0+h_1)(y-h_1)}}=0$$

Bu eşitlikten deliğin yerden yüksekliği

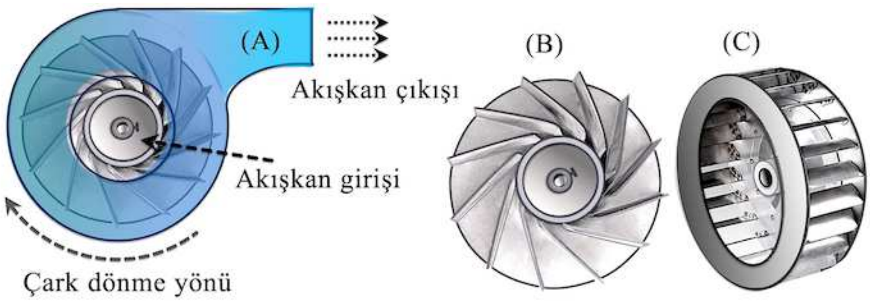
$$h_1=\frac{1}{2}\,(y-h_0)$$

bulunur. Eğer varilin altında destek olmasaydı maksimum uzaklık için $h_1 = y/2$ olacaktı.

Örnek 0.3 Santrifüj pompa ve fan: Kuyulardan su veya başka sıvıların çekilmesi için tulumba ilkesine dayalı düzenekler kullanılabilir. Örneğin derin petrol kuyularında bu tür düzenekler kullanılır. Fazla derin olmayan su kuyularından su çekmek için kullanılan verimli ve yaygın aygıtlardan birisi santrifüj pompadır. Aynı aygıt, yoğun ve hızlı hava demeti gerektiren uygulamalarda da santrifüj aygıtı aspiratör olarak da kullanılır.

Santrifüjün çalışma ilkesini inceleyiniz, oluşturduğu basınç ve oluşturabileceği su sütun yüksekliğini bulunuz.

ÇÖZÜM: Santrifüj kelimesi Fransızca'da merkezkaç anlamına gelmektedir ve dönen cisimlerdeki merkezkaç kuvveti kullanan bir aygıttır. Şekil **??**'da fan biçimine göre iki santrifüj yapısının temelleri gösterilmiştir. Yapı uygulama alanınana göre değişik biçimlerde yapılabilir. Şekilde her iki santrifüj için benzer dış kap kullanılır, (A). Akışkan daire biçimindeki yan kapağın merkezinde bulunan açıklıktan girer ve üstten çıkar. (B)'de verilen çark çoğunlukla sıvılarda kullanılır ve (C)'de verilen silindirik fan gaz akışkanlarda kullanılır.



Şekil 4: Örnek **??** şekli.

.

Santrifüjün calışma ilkesi, yukarıda da belirtildiği üzere merkezkaç kuvvete dayanır. Şekilde disk biçimindeki (B) çarkı ve silindir biçimindeki (C) fanı yüksek hızla döndüğü zaman içindeki havayı dışarıya doğru savurur ve kabın iç kısmında bir basınç oluşturur. Burada merkezkaç kuvvetin pompanın iç duvarında oluşturacağı basınç, A pompanın basınca maruz kalan iç kısımdaki yüzey alanı olmak üzere kabaca yazılabilir;

$$p = \frac{mv^2}{Ar} = \frac{m\omega^2 r}{A}$$

İfadede çizgisel hız yerine açısal hız $\omega = v/r$ alınmıştır. Her ne kadar bu ifade başlangıçta bir fikir vermesi bakımından dikkate alınabilirse de, oluşan basınç için kesin bir ifade yazmak doğru değildir; zira pompadan akışkan çıkışının az ya da çok olmasına bağlı olarak basınç değişecektir. Eğer çıkıştan akışkan, örneğin bir vana ile, kısıtlı alınıyorsa içteki basınç artacak, akışkanın fazla çıkması durumunda da içteki basınç düşecektir. Bu nedenle bir santrifüj pompanın bir yere basabileceği akışkan miktarı yeryüzüne dikey duran akışkan sütununun yüksekliği olarak tanımlanır. Bernoulli denklemi terim terim ρg ile bölünürse sonuç uzunluk ya da akışkan sütun yüksekliği olacaktır;

$$\frac{p_g}{\rho g} + \frac{\rho g h_g}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{\rho v_g^2}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\rho g h_c}{\rho g}\frac{1}{2}\frac{\rho v_c^2}{\rho g} \tag{8}$$

İfadede p_g ve p_c sırasıyla giriş ve çıkış basınçları, υ_g ve υ_c giriş ve çıkış hızları, ρ akışkanın yoğunluğu h_g santrifüjün giriş yüksekliği ve h_c akışkan sütun yüksekliğidir. Giriş basıncı kapalı bir sisteme bağlı, dolayısıyla farklı olabilir, ya da açık hava basıncı olabilir. İfadede $h_g = 0$ ve $\upsilon_g \ll \upsilon_c$ alınır ve düzenlenirse, işaret dikkate alınmaksızın akışkan sütun yüksekliği

$$| h_c |= \frac{p_c - p_g}{\rho g} + \frac{1}{2g}\,\upsilon_c^2 \tag{9}$$

denklemi bulunur.

- **Hava sütunu**: Bir santrifüj pompası çıkışında 2 bar basınçla ve 10 m/s hızla dikey bir boru ile yukarıya hava basmaktadır. Bu pompanın basabileceği hava sütunu yüksekliği, Denklem **??**'den

  $$h_c = \frac{(2-1)\times 101325}{1.2\times 9.81} + \frac{\upsilon^2}{2\times 9.81} = 8612.4 \text{ m}$$

  olacaktır. Giriş basıncı 1 atm alınmıştır.

- **Su sütunu**: Aynı çıkış basıncı ve hızı ile su sütununun yüksekliği de

  $$h_c = \frac{(2-1)\times 101325}{1000\times 9.81} + \frac{\upsilon^2}{2\times 9.81} = 14.43 \text{ m}$$

  olacaktır.