9. Z-DÖNÜŞÜMÜ:

Z-dönüşümü ayrık data dizilerini işlemede çok kullanışlı olan bir yöntemdir. Ayrıca z-dönüşümü ayrık zaman sistemlerinin analizinde ve formüle edilmesinde yeri bir öneme sahiptir. Uyg. Math, digital sinyal işleme, kontrol teori ve ekonomide büyük öneme sahiptir. Bu ayrık modeller farklı denklemlerle çözülür ve sürekli modellerin diferansiyel denklemleriyle ilişkilidir.

9.1. Z-DÖNÜŞÜMÜ

Z-dönüşümü uygulamalarında ve çalışmasında dizilerin gösteriminden faydalanılmıştır. T örnekleme periyodu iken $t=0, T, 2T, 3T, \ldots$ zamanlarında örneklenmiş $x[t]$, $t \geq 0$ fonksiyonunu alalım. Bu örneklemeyi $\{x_n = x[nT]\}_{n=0}^{\infty}$ notasyonuyla gösterirsek, örneklemeyi dizi şeklinde ifade edebiliriz. Genelliği bozmadan $T=1$ alınıp, $\{x_n = x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini (reel) oluşturalım. Z-dönüşümünün tanımı z^{-n} terimlerinin sonsuz serisinden oluşacaktır.

Tanım: Verilen bir $\{x_n = x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için z dönüşümü

$$X(z) = \mathcal{Z}[\{x_n\}_{n=0}^{\infty}] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı: z-dönüşümü yukarıdaki Laurent serisinin yakınsak olduğu $z \in \mathbb{C}$ noktalarında tanımlıdır. z-dönüşümünün yakınsaklık bölgesi (Laurent serisi için) $|z| \geq R$ öyleki $R = \limsup_{n} \sqrt[n]{|x_n|}$.

Uyarı: x_n matematiksel bir gösterim iken $x[n]$ sinyal işlemede kullanılan bir gösterimdir.

Uyarı: Uygulamada $\{x_n = x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi girdiler için kullanılırken $\{y_n = y[n]\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi çıktılar için kullanılacaktır. Ayrıca bu dizilerin z-dönüşümü altındaki görüntüler için

$\mathcal{Z}[x_n] = \mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$ ve $\mathcal{Z}[y_n] = \mathcal{Z}[y[n]] = Y(z)$ gösterimleri kullanılır.

Teorem: $X(z)$, $|z|>R$ bölgesinde $\{x_n = x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin z-dönüşümü olsun. Bu takdirde

$x_n = x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$ iken C eğrisi $|z|>R$ bölgesinde, $z=0$ etrafında dönen pozitif yönlendirilmiş basit kapalı eğridir.

Daha önceki bilgilerimizi kullanarak, Rezidü yardımıyla

$x_n = x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{j=1}^{k} \text{Rez}[X(z).z^{n-1}, z_j]$.

$z_1, z_2, \ldots, z_k$ noktaları $f(z) = X(z).z^{n-1}$ fonksiyonunun kutup noktalarıdır.

Bir z-dönüşümünün Uygun formu:

$X(z)$ için olan formüller ihtiyaç sonucu ortaya çıktığından başlangıç olarak $S=\{\delta[n], u[n], n^m, nb^n, e^{an}, b^n\cos(an), \dots\}$ gibi temel fonksiyonların z-dönüşümlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilebilir.

Tanım (Kabul edilebilir - Uygun z-dönüşümü):

$P(z)$ ve $Q(z)$ p ve q dereceden polinomlar olduda $X(z)$ bir rasyonel fonksiyonuna eşit olursa

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + \dots + b_p z^p}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_q z^q}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ z-dönüşümüne uygun z-dönüşümü denir.

ÖR: $X[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ impulse fiizisinin z-dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \mathcal{Z}[X_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n . z^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 . z^{-n} = 1 \text{ olur.}$$

ÖR: $X_n = u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ basamak fonksiyonunun (dizisinin) z-dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \mathcal{Z}[X_n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \text{ olur.}$$

ÖR: $x[n] = b^n$ ve $x[n] = e^{an}$ fonk. dizilerinin z-dönüşümlerini bulalım.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{b}{z}} = \frac{z}{z-b} \text{ olur.}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^a}{z}} = \frac{z}{z-e^a} \text{ olur.}$$

Özellikleri (z-dönüşümünün)

$\mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$ ve $\mathcal{Z}[y_n] = \mathcal{Z}[y[n]] = Y(z)$ olsun.

(1) $\mathcal{Z}[c_1 x_n + c_2 y_n] = c_1 \mathcal{Z}[x_n] + c_2 \mathcal{Z}[y_n] = c_1 \cdot X(z) + c_2 Y(z)$ (lineer)

(2) $\mathcal{Z}[x[n-N]u[n-N]] = X(z) z^{-N}$ (Delay shift)

(3) $\mathcal{Z}[x_{n+N}] = z^N \left(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1} - x_2 z^{-2} - \dots - x_{N-1} z^{-N+1}\right)$ İleri öteleme

(4) $\mathcal{Z}[n \cdot x_n] = \mathcal{Z}[n\, x[n]] = -z \cdot \frac{d}{dz} X(z)$ (n ile çarpma)

ÖR: $X_n = X[n] = \cos(an)$ dizisinin z-dönüşümünü bulalım.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \cos an = \frac{1}{2}\left(e^{ian} + e^{-ian}\right)$ olur.

$$X(z) = \mathcal{Z}[X_n] = \mathcal{Z}[\cos(an)] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}(e^{ian}) + \mathcal{Z}(e^{-ain})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{ia}} + \frac{z}{z-e^{-ia}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z-e^{-ia}) + z(z-e^{ia})}{(z-e^{ia})(z-e^{-ia})}\right)$$

$$= \frac{z}{2}\left(\frac{2z-e^{ia}-e^{-ia}}{(z-e^{ia})(z-e^{-ia})}\right) = \frac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1}$$

Uyarı: Ters z-dönüşümü yaparken $\mathcal{Z}([X_n]) = \dfrac{z(2z-e^{ia}-e^{-ia})}{2(z-e^{ia})(z-e^{-ia})}$ formunda olması bize işlemlerde kolaylık sağlar. Rezidü bulurken hazır işlemler yaparız.

9.1.3. Z-dönüşümler tablosu:

	Dizi	z-dönüşümü
1)	$\delta[n]$	1
2)	$u[n]$	$z/z-1$
3)	b^n	$z/z-b$
4)	$b^{n-1}.u[n-1]$	$1/z-b$
5)	e^{an}	$z/z-e^a$
6)	n	$z/(z-1)^2$
7)	n^2	$z(z+1)/(z-1)^3$
8)	$n.b^n$	$bz/(z-b)^2$
9)	$n.e^{an}$	$z.e^a/(z-e^a)^2$
10)	$\sin an$	$\dfrac{i(-1+e^{2ia})z}{2(e^{ia}-z)(-1+e^{ia}z)}$
11)	$b^n.\sin(an)$	$\dfrac{ib(-1+e^{2ia})z}{2(be^{ia}-z)(-b+e^{ia}z)}$
12)	$\cos an$	$\dfrac{z(1+e^{2ia}-2e^{ia}z)}{2(e^{ia}-z)(-1+e^{ia}z)}$
13)	$b^n.\cos an$	$\dfrac{z(b+be^{2ia}-2e^{ia}z)}{2(be^{ia}-z)(-b+e^{ia}z)}$

ÖR: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z}{2z-1}\right]$ ise $x[n]$ nedir? $X[z]=\frac{2z}{2z-1}$ ise

1. YOL

$$X(z)=\frac{2z}{2z-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.z^{-n}$$ olup $x[n]=\frac{1}{2^n}$

2. YOL

3. Maddeyle $X(z)=\frac{2z}{2z-1}=\frac{z}{z-1/2}$ olup $b=1/2$ olur. Yani

$x[n]=1/2^n$ olur.

3. YOL $X(z)=\frac{2z}{2z-1}$ için $z=1/2$ noktasında basit kutup noktasıdır.

O zaman

$$f(z)=X(z).z^{n-1}=\frac{2z.z^{n-1}}{2z-1}$$

$$\operatorname{Rez}[f,1/2]=\lim_{z\to 1/2}(z-1/2).\frac{2z.z^{n-1}}{2(z-1/2)}$$

$$=\lim_{z\to 1/2} z^n=\left(1/2\right)^n$$ olur.

Şimdi yazacağımız iki teorem fark denklemlerinin çözümünde çok önemlidirler

Teorem: (Ötelenmiş diziler ve Başlangıç koşulları):

$\{x[n]=x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini alalım ve $X(z)=\mathcal{Z}[x[n]]=\sum_{n=0}^{\infty} x_n.z^{-n}$ olsun. Bu takdirde,

(1) $\mathcal{Z}[x[n+1]]=\mathcal{Z}[x_{n+1}]=z\left(X(z)-x_0\right)$

(2) $\mathcal{Z}[x[n+2]]=\mathcal{Z}[x_{n+2}]=z^2\left(X(z)-x_0-x_1.z^{-1}\right)$

(3) $\mathcal{Z}[x[n+3]]=\mathcal{Z}[x_{n+3}]=z^3\left(X(z)-x_0-x_1z^{-1}-x_2z^{-2}\right)$.

Teorem (Girişim) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iki dizi ve z-dönüşümleri $X(z)$ ve $Y(z)$ olsun. $x_n * y_n$ ifadesine girişim denir ve $x_n * y_n=\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}$ ile gösterilir. Ayrıca

$\mathcal{Z}[x_n * y_n]=X(z).Y(z)$

ÖRNEK: Girişimi kullanarak $w(n)=w[n]=n+1$ için $W(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ olduğunu gösterelim.

$x[n]=1$ ve $y[n]=1$ alırsak $x_n * y_n=\sum_{i=0}^{n} x_i\cdot y_{n-i}=n+1$ dur.

$X(z)=\dfrac{z}{z-1}$, $Y(z)=\dfrac{z}{z-1}$ old. dan $W(z)=X(z).Y(z)=z^2/(z-1)^2$ bulunur.

SİNYAL İŞLEMEYE UYGULAMALARI:

süzgeci, filtresi

Digital sinyal işleme genellikle sonlu impulse response (FIR) dizaynı içerir. Bir 3 noktalı FIR filtresi

$y[n] = x[n] + a \cdot x[n-1] + b \cdot x[n-2]$ şeklinde ifade edilebilir.

a ve b reel katsayılar alındığında homojen fark denklemi

$x[n] + a x[n-1] + b x[n-2] = 0$ çözümü

$x[n] = \cos(w\pi n)$ ve $x[n] = \sin(w\pi n)$ olup, $x[n] =$ $c_1 \cdot \cos(w\pi n) + c_2 \cdot \sin(w\pi n)$ şeklinde yazılabilir. Yani $x[n]$ FIR filtresinin denkleminin sağ tarafındaki girdi ise $[y[n]]$ çıktısı sol taraftaki 0 olacaktır.

Şimdi Digital Sinyal İşlemenin özellikle çok kullandığı z-dönüşümünün özelliklerini verelim.

$x[n] = x_n$ dizisi için $\mathcal{Z}[x[n]] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}$ olsun.

Tanımı	Dizi	Z-Dönüşümü	
1) Toplama	$x_n + y_n$	$X(z) + Y(z)$	
2) Sabitle çarpma	$c \cdot x_n$	$c \cdot X(z)$	
3) Ötelenmiş basamak	$u[n-m]$	$z^{1-m}/(z-1)$	(Delayed unit step)
4) 1 birim zaman gecikme	$x_{n-1}\, u[n-1]$	$\frac{1}{z} X(z)$	Time Delay 1 tap
5) Zaman gecikme öteleme	$x_{n-m}\, u[n-m]$	$z^{-m} X(z)$	Time delayed shift
6) 1 birim zaman ilesi	x_{n+1}	$z(X(z) - x_0)$	Forward 1 tap
7) 2 " " "	x_{n+2}	$z^2(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1})$	forward 2 tap
8) m " " "	x_{n+m}	$z^m\left(X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x_i z^{-i}\right)$	Time forward
9) kompleks dönüşüm	$e^{an} x_n$	$X(ze^{-a})$	kompleks translation
10) frekans değişimi	$b^n x_n$	$X(z/b)$	frequency scale

10) Frekans değişimi	$b^n x_n$	$X(z/b)$	frequency scale
11) Türev	$n . x_n$	$-z . X'(z)$	
12) İntegral	$1/n . x_n$	$-\int \frac{X(z)}{z} dz$	
13) İntegral öteleme	$1/_{n+m} . x_n$	$-z^{-m} \int \frac{X(z)}{z^{m+1}} dz$	Integration shift
14) Ayrık zaman girişimi	$x_n * y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}$	$X(z) Y(z)$	Discrete-time convolution
15) $y_n = 1$ ile girişim	$\sum_{i=0}^{n} x_i$	$z/_{z-1} . X(z)$	
16) Başlangıç zamanı	x_0	$\lim_{z \to \infty} X(z)$	
18) Son değer	$\lim_{n \to \infty} x_n$	$\lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$	

1. Use the definition of the z-transform to find $X(z) = \mathfrak{Z}[x_n] = \mathfrak{Z}[x[n]]$.

(a) For the sequence $x_n = x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(b) For the sequence $x_n = x[n] = e^{an}$.

(c) For the sequence $x_n = x[n] = n$.

2. Use $\mathfrak{Z}[e^{ian}] = \frac{z}{z-e^{ia}}$ and $\mathfrak{Z}[e^{-ian}] = \frac{z}{z-e^{-ia}}$ to prove that $\mathfrak{Z}[\sin(an)] = \frac{\sin(a)z}{z^2-2\cos(a)z+1}$.

3. Show that the z-transform of the delayed unit-step sequence

$$x_n = u(n-m) = \begin{cases} 1 \text{ for } n \geq m \\ 0 \text{ for } n < m \end{cases}$$

is $X(z) = \frac{z^{1-m}}{z-1}$.

4. Find and simplify over a common denominator the following z-transforms.

(a) $X(z) = \mathfrak{Z}[2^n + 4^n]$

(b) $X(z) = \mathfrak{Z}[3^n + 3]$

(c) $X(z) = \mathfrak{Z}[2^n + 2n]$

5. Show that $\mathfrak{Z}^{-1}\left[\left(\frac{bz}{(z-1)}\frac{1}{(1-az^{-1})}\right)\right] = \frac{(a^{1+n}-1)b}{a-1}$ and supply all the details.

6. Show that the convolution sequences $x_n = 1$ and $y_n = n$ is $w_n = x_n * y_n = \frac{n(n+1)}{2}$, and that $\mathfrak{Z}[w_n] = \mathfrak{Z}[x_n]\mathfrak{Z}[y_n]$.

8. Find $x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}[X(z)]$ using two methods: (i) partial fractions and Table 9.1, and (ii) using residues.

(a) $X(z) = \frac{z^2}{z^2-4z+3} = \frac{z^2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)}$.

(b) $X(z) = \frac{z^2}{z^2-4z+4} = \frac{z^2}{(z-2)^2} = \frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}$.

(c) $X(z) = \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-i} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+i}$.

9. Find $x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}[X(z)]$ using two methods: (i) partial fractions and Table 9.1, and (ii) using residues.

(a) $X(z) = \frac{5z}{5z-2} = \frac{z}{z-\frac{2}{5}} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}$.

(b) $X(z) = \frac{25z^2}{25z^2-35z+12} = \frac{z^2}{z^2-\frac{7}{5}z+\frac{12}{25}} = \frac{z^2}{\left(z-\frac{3}{5}\right)\left(z-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{1-\frac{7}{5}z^{-1}+\frac{12}{25}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{3}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{4}{5}z^{-1}\right)}$.

(c) $X(z) = \frac{50z^2}{25z^2-9} = \frac{2z^2}{z^2-\frac{9}{25}} = \frac{2}{1-\frac{9}{25}z^{-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{3}{5}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{5}z^{-1}\right)}$.

(d)
$$X(z) = \frac{4z^2}{4z^2+1} = \frac{z^2}{z^2+\frac{1}{4}} = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}i\right)\left(z+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}$$
$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{-i\pi}{2}}z^{-1}\right)}.$$

1.1 Giriş

Doğada basit periyodik olaylar matematiksel olarak sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile ifade edilirler. Örneğin bir sarkacın küçük genliklerle salınımı, bir diyapozonun titreşimleri ve buna benzer fiziksel olayların herbiri birer basit periyodik olaydır. Eğer olay saniyede n defa tekrarlanıyorsa, basit titreşimleri gösteren fonksiyon

$$A \sin 2\pi n t \quad \text{ya da} \quad A \cos 2\pi n t$$

den biridir. Burada, t saniye ile ölçülen zamanı, A genlik, $\omega = 2\pi n t$ de titreşim hareketinin *açısal hız* veya *pülsasyonu* olarak bilinirler. Basit sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile belirtilen olaylara *basit harmonik hareket* adı verilir. Periyodik olayları ifade etmekte kullanılan periyodik fonksiyonlar trigonometrik serilerle ifade edilmektedir. Fourier serileri olarak bilinen bu seriler elektromanyetik teorisinde, akustikte, ısı iletiminde ve Matematiksel Fiziğin birçok alanında vazgeçilmeyecek şekilde önemli olmaktadır.

1.2 Parçalı Sürekli Fonksiyonlar

Reel değerli bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f(x_0^+) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon)\ , \quad \text{sağ limit} \\
f(x_0^-) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon)\ , \quad \text{sol limit}
\end{aligned}
$$

ifadeleri ile tanımlanırlar.

Tanım 1.1 ***(Düzgün Süreksizlik Noktası):*** *Bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup bu iki değer birbirinden farklı ise, x_0 noktasına f fonksiyonunun bir* düzgün süreksizlik noktası *denir. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ise, $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$ dır.*

Tanım 1.2 ***(Parçalı Sürekli Fonksiyon):*** *Bir $[a, b]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan bir fonksiyona o aralıkta* parçalı süreklidir *denir.*

Örnek 1.1

$$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} \qquad ve \qquad g(x) = \begin{cases} x & , \quad -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

fonksiyonlarının her ikisi de $[-2, 3]$ aralığında parçalı süreklidir. f fonksiyonu $x_0 = 0 \in [-2, 3]$ de, g fonksiyonu ise $x_0 = 1 \in [-2, 3]$ noktalarında düzgün süreksizliklere sahiptirler.

Örnek 1.2

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \qquad ve \qquad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

fonksiyonları $[2, 4]$ aralığında parçalı sürekli olamazlar. Çünkü her iki fonksiyon için de $f(2^+)$ ve $g(2^+)$ limitleri sonlu olarak tanımlanamaz.

Tanım 1.3 ***(Çift ve Tek Fonksiyonlar):*** *Başlangıç noktasına göre simetrik bir I aralığında tanımlanmış bir f fonksiyonu için, aralığa ait her x noktasında*

1. $f(-x) = f(x)$ *sağlanıyorsa f ye* çift fonksiyon,
2. $f(-x) = -f(x)$ *sağlanıyorsa f ye* tek fonksiyon

denir

Örnek 1.3 *Simetrik bir aralık olan* $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ *da tanımlı* x^{2n} *ve* $\cos nx$ *fonksiyonları çift fonksiyonlar,* x^{2n+1} *ve* $\sin nx$ *tek fonksiyonlardır. Burada* n *doğal sayıdır.* e^x *fonksiyonu aynı aralıkta ne çift ne de tektir.*

Örnek 1.4 $[-2, 5]$ *aralığında verilmiş* $f(x) = x^2$ *fonksiyonu ne çift ne de tektir. Çünkü,* $[-2, 5]$ *aralığı orijine göre simetrik değildir. Yani her* $x \in [-2, 5]$ *için aralığa ait bir* $-x$ *bulunamaz.*

Simetrik bir aralık olan $[-a, a]$ aralığında integrallenebilen herhangi bir f fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları gerçekler.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx \tag{1.1}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,, \quad f \text{ çift fonksiyon ise} \tag{1.2}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,, \quad f \text{ tek fonksiyon ise.} \tag{1.3}$$

1.3 Periyodik Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon f olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $p \in \mathbb{R}$ varsa f ye *periyodik fonksiyon* ve p ye de f nin periyodu denir. Eğer f fonksiyonu periyodik ve periyodu p ise aşağıdakiler yazılabilirler.

$$\begin{aligned}
f(x+p) &= f(x) \\
f(x+2p) &= f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x) \\
f(x+3p) &= f[(x+2p)+p] = f(x+2p) = f(x) \\
&\vdots \\
f(x+np) &= f[(x+(n-1)p)+p] = f[x+(n-1)p] = f(x)
\end{aligned}$$

Buradan görülüyor ki, n herhangi bir tamsayı olmak üzere $f(x+np) = f(x)$ dir. Bu demektir ki p, f nin bir periyodu ise, p nin tüm katları da f nin bir periyodur.

Periyodik bir f fonksiyonunun pozitif p periyotları arasında bir en küçüğü varsa ona f nin *asli periyodu* ya da *temel periyodu* denir. Asli periyodu T ile göstereceğiz ve ona kısaca *peryot* diyeceğiz.

1.4 Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyonlar Sistemi

Bir $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi $\{\phi_n(x)\}$ olsun. $x \in [a,b]$ için $q(x) \geq 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\int_a^b q(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n \tag{1.5}$$

sağlanıyor ise, $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisine $[a,b]$ aralığında $q(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal (dik)* bir sistem teşkil ediyor denir. (1.5) de $m = n$ ise,

$$\|\phi_n\| = \left[\int_a^b q(x)\phi_n^2(x)\,dx\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

ifadesine $\{\phi_n\}$ ortogonal sisteminin *normu* denir.

Örnek 1.11 $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ *fonksiyonlarının dizisi* $[-\pi, \pi]$ *aralığında ortogonal bir sistem teşkil ederler. Gerçekten,* $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ *için*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ \pi & , \; m = n \end{cases} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \; , \quad \textit{her } \; m, n \quad \textit{için} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ \pi & , \; m = n \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

oldukları kolayca gösterilebilirler. Verilen sistemi ortonormalleştirmek için tüm elemanları kendi normuna bölerek

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ortonormal sistemi elde edilir. Burada $q(x)$ *ağırlık fonksiyonu* 1 *dir.*

1.5 Fourier Serileri

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ fonksiyonları $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonal bir sistem oluştururlar. 2π ortak periyoduna sahip olan bu fonksiyonlar yardımı ile oluşturulan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.8}$$

trigonometrik serisi yakınsak ise, onun toplamı da 2π peryotlu periyodik bir $f(x)$ fonksiyonu olacaktır. (1.8) serisinin yakınsadığı periyodik bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunması halinde

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

serisine $f(x)$ in *Fourier serisi* ve a_0, a_n, b_n sabitlerine de $f(x)$ in *Fourier katsayıları* adı verilir.

elde edilir. Böylece (1.9) serisine ait Fourier katsayıları,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

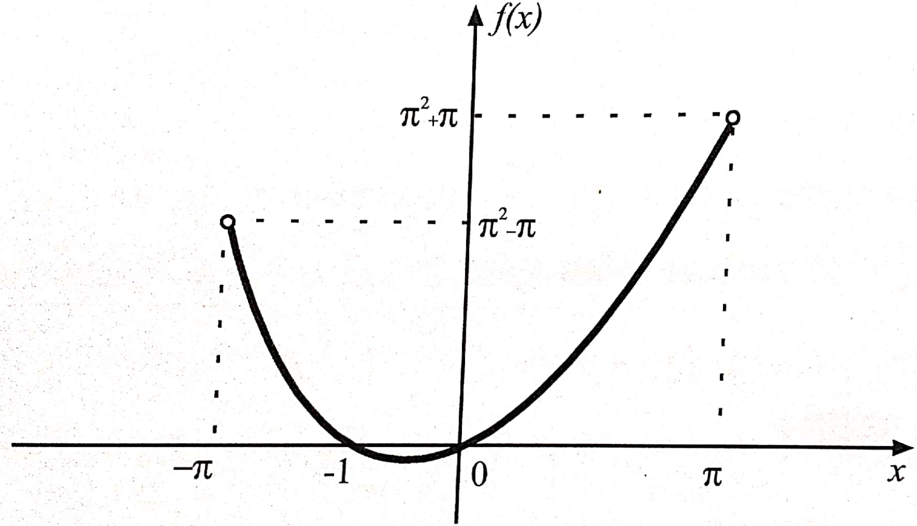
olarak bulunurlar. (1.9) da $\dfrac{a_0}{2}$ alınmasının nedeni (1.10) katsayıları arasındaki benzerliği sağlamaktır.

Örnek 1.13 $f(x) = x + x^2 \quad , \quad -\pi < x < \pi$ *fonksiyonu veriliyor.*

a. $f(x)$ *in grafiğini çiziniz.*

b. $f(x)$ *fonksiyonu ile çakışan* 2π *peryotlu periyodik* $f(x)$ *fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.*

Çözüm. a.



Şekil 1.1: $-\pi < x < \pi$ aralığında $f(x) = x + x^2$ nin grafiği

b. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ formunda 2π peryotlu bir Fourier serisi elde edilmelidir. Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\cos nx\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi) = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \\
&\qquad (n = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
$$

olduklarından istenilen Fourier serisi,

$$
f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(2\cos nx - n\sin nx)
$$

olarak elde edilir.

1.6 Kompleks Fourier Serileri

Fourier serilerinin incelenmesinde bazen serinin kompleks üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesine ihtiyaç duyulur. Bunun önemli iki nedeni vardır. Birincisi, Fourier serilerinin mühendislikteki ve fizikteki bazı uygulamalarında fonksiyonların kompleks formdaki Fourier açılımlarında ve katsayılarda önemli sayılabilecek kısalık ve netlikler ortaya çıkar. İkincisi de, kompleks Fourier serileri daha sonraki bölümlerde inceleyeceğimiz Fourier dönüşümlerinin ortaya çıkışına ve gelişimine alt yapı oluştururlar.

Bir $f(x)$ fonksiyonun kompleks Fourier serisi, onun trigonometrik formdaki

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier serisinden hareketle aşağıdaki şekilde elde edilir. Yukarıdaki trigonometrik Fourier serisinde

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Euler formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, [\cos nx - i \sin nx]\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, [\cos nx + i \sin nx]\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$$

olurlar. Böylece $f(x)$ in kompleks formda Fourier açılımı ve Fourier katsayıları,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.15}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

olacaklardır.

Örnek 1.16 $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$ *olarak verilen fonksiyonun kompleks Fourier serisini bulunuz.*

Çözüm.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-in)}\, e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-in)}\left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left[e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right]$$

olup burada

$$e^{\mp in\pi} = \cos n\pi \mp \sin n\pi = (-1)^n$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = (-1)^n \frac{1+in}{(1+n^2)\pi}\sinh\pi$$

olur. O halde, istenilen kompleks Fourier serisi

$$f(x) = e^{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\, e^{inx}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.17 $f(x)=\begin{cases} -1 & , \quad -\pi<x<0 \\ 1 & , \quad 0<x<\pi \end{cases}$ *fonksiyonunu kompleks Fourier serisine açınız.*

Çözüm.

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

formunda bir seri elde edilmelidir. c_n katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\, e^{-inx}\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1.e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\, e^{-inx}\Big|_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\left[(1-e^{in\pi})-(e^{-in\pi}-1)\right] = \frac{2}{2\pi in}\left[1-(-1)^n\right] \\ &= \frac{1}{\pi in}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & , \quad n=2k \\ \dfrac{2}{(2k+1)\pi i} & , \quad n=2k+1 \end{cases} , \quad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

O halde, istenilen kompleks Fourier serisi;

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} = \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n}\, e^{inx}$$

ya da

$$f(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\, e^{i(2k+1)x}$$

olarak elde edilir.

Bazen aralığı $[-L, L]$ alarak simetrik bir aralıkta inceleme yapmak gerekli olabilir. Bu durumda $T = 2L$ peryotlu $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisini ve Fourier katsayılarını elde etmek için (1.19) ve (1.20) formüllerinde

$a=-L,\ b=L$ almak ya da (1.21) ve (1.22) de $a=-L$ almak yeterlidir. Bu yapıldığında aşağıdakiler elde edilirler.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{1.23}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n=0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n=1,2,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların 2π periyotlu Fourier serilerini bulunuz ve periyodik fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = |2x| + \pi\,,\ -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = |x| + x\,,\ -\pi < x < \pi$

c) $f(x) = |\sin 2x|\,,\ -\pi < x < \pi$

d) $f(x) = |\pi - 2x|\,,\ -\pi < x < \pi$

e) $f(x) = \begin{cases} 3(x+\pi) & , \ -\pi < x < 0 \\ 3(x-\pi) & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & , \ -\pi < x < 0 \\ \pi/4 & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} -\pi & , \ -\pi < x < 0 \\ x & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \ -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & , \ -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2 & , \ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

ı) $f(x) = e^{-x}\,,\ -\pi < x < \pi$

i) $f(x) = |\cos x|\,,\ -\pi < x < \pi$

j) $f(x) = |\sin x| + sgn x\,,\ -\pi < x < \pi$

k) $f(x) = |\pi - x|\,,\ -\pi < x < \pi$

l) $f(x) = \begin{cases} 2 & , \ -\pi < x < 0 \\ x-\pi & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} -3x & , \ -\pi < x < 0 \\ 5 & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} 2\pi & , \ -\pi < x < 0 \\ 2(\pi - x) & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$

o) $f(x) = \pi^2 - x^2,\ -\pi < x < \pi$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların kompleks Fourier serilerini bulunuz.

a) $f(x) = xe^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = x^3 e^x, \quad -\pi < x < \pi$

c) $f(x) = x^2 e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -\pi < x < \pi$

d) $f(x) = 2x^2 \cosh ax, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -\pi < x < \pi$

e) $f(x) = 3e^{-2x}, \quad -\pi < x < \pi$

f) $f(x) = (2x-1)^2, \quad -\pi < x < \pi$

g) $f(x) = \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -\pi < x < \pi$

h) $f(x) = 3x^2 \sinh ax, \quad a \in \mathbb{R}, \quad -\pi < x < \pi$

ı) $f(x) = (x^2+1)\, e^{-2x}, \quad -\pi < x < \pi$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların Fourier serilerini bulunuz ve periyodik fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right|, \quad -2 < x < 2$

b) $f(x) = |x(3-x)|\ , \quad -3 < x < 3$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < 0 \\ x & , \quad 0 \le x < 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -5 < x < 0 \\ 3 & , \quad 0 < x < 5 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -\alpha < x < 0 \\ \alpha x - x^2 & , \quad 0 < x < \alpha \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 0 \\ -1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

g) $f(x) = 2 - |x|, \quad -3 < x < 3$

h) $f(x) = e^{\alpha x}, \ -2 < x < 2,$
$\alpha \in R^+$

ı) $f(x) = \begin{cases} -x & , \quad -3 < x < 0 \\ 3 - 2x & , \quad 0 < x < 3 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+3) & , \quad -3 < x \le 0 \\ 2 & , \quad 0 < x < 3 \end{cases}$

j) $f(x) = x^2 - \alpha^2, \ -\alpha < x < \alpha,$
$\alpha \in R^+$