Fourier İntegralleri ve Fourier Dönüşümleri

Periyodik fonksiyonlar ile ilgili problemlerin incelenmesinde Fourier serileri güçlü bir araçtır. Ancak pratikte karşılaşılan problemlerin bir çoğunda periyodik fonksiyonlar bulunmaz. Örneğin mekanikte impuls (çarpışma) ya da elektrikte voltaj gibi olaylar periyodik değildir. Bir kez meydana gelen ve tekrarlanmayan bu gibi olayları açıklamak için Fourier serilerini kullanamayız. Ancak $[-L, L]$ keyfi aralığında verilen periyodik bir $f(x)$ fonksiyonunun periyodu sonsuza gittiğinde, yani $L \to \infty$ için Fourier serisinin yaklaştığı limiti inceleyerek, periyodik olmayan fonksiyonlar için de uygun bir gösterim elde edebiliriz. Bu bizi sonsuz periyotlu Fourier serilerine karşılık gelen Fourier integralinin tanımlanmasına sevkeder. Fourier integrali ise Fourier dönüşümlerinin temelini oluşturur.

Fourier integralinin tanımına geçmeden önce, ortaya çıkışı hakkında fikir vermesi bakımından aşağıdaki örneklere bir göz atalım. Bu örneklerde, T periyotlu periyodik bir $f_T(x)$ fonksiyonunun T periyodunun sonsuza yaklaşması halinde $f(x)$ fonksiyonunun periyodik olmadığı görülmektedir.

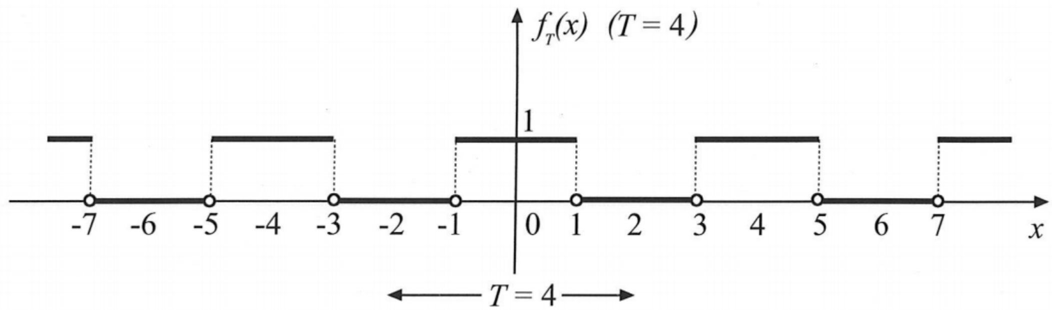
Örnek 2.1 *Periyodu T olan aşağıdaki $f_T(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.*

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \dfrac{-T}{2} \leq x < -1 \\ 1 & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 < x \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

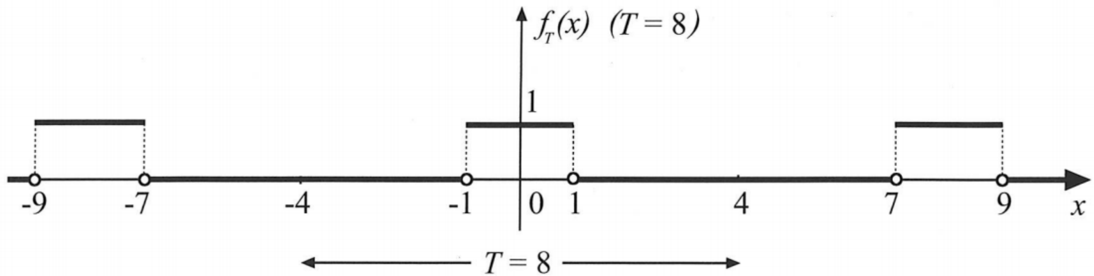
Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 *de grafikleri görülen bu fonksiyonun periyodu $T > 2$ olup $T \to \infty$ için,*

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \textit{başka her yerde} \end{cases}$$

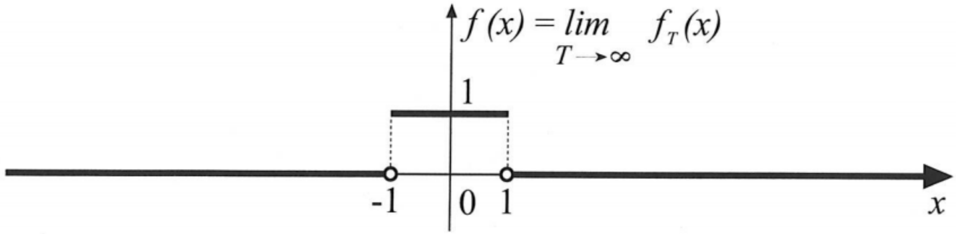
dir ki, bu fonksiyon periyodik değildir (Şekil 2.3).



Şekil 2.1: $T = 4$ için $f_T(x)$ in grafiği



Şekil 2.2: $T = 8$ için $f_T(x)$ in grafiği

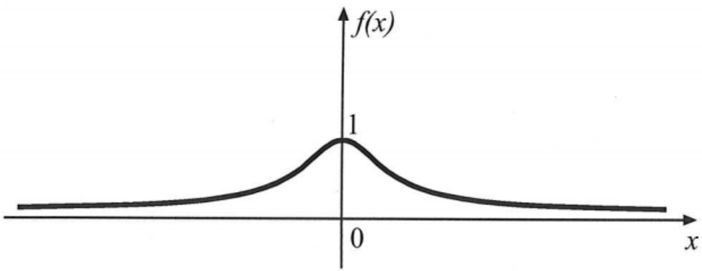


Şekil 2.3: $T \to \infty$ için $f_T(x)$ in grafiği

Örnek 2.2 $-\dfrac{T}{2} < x < \dfrac{T}{2}$ *için* $f_T(x) = e^{-|x|}$ *ve* $f_T(x+T) = f_T(x)$ *olsun. Bu fonksiyonun* T *periyodu sonsuza yaklaştığında*

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

olur ki $f(x)$ *fonksiyonu periyodik değildir* (Şekil 2.4).



Şimdi, periyodu $T = 2L$ olan periyodik bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinden hareket ederek periyodun sonsuza götürülmesi halindeki durumu inceleyelim.

$f(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında parçalı düzgün bir fonksiyon olsun. $[-L, L]$ sonlu alt aralığında $f(x)$ in Fourier serisi ve Fourier katsayılarının

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt; \quad n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt; \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

ile verildiklerini biliyoruz. a_n ve b_n lerin (2.2) ile verilen değerleri (2.1) de yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dt\right. \\ &\qquad \left. + \left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dt\right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

olur. $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$ denirse $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \dfrac{\pi}{L}$ olacağından (2.3) eşitliği

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-L}^{L} f(t)dt\right)\Delta\omega \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\omega_n t\right)dt\right]\cos\left(\omega_n x\right)\right. \\
& \qquad \left. + \left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\omega_n t\right)dt\right]\sin\left(\omega_n x\right)\right\}\Delta\omega \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin $\Delta\omega \to 0$ için limitini alalım. Bu durumda $L \to \infty$ olur ve $[-L, L]$ aralığı reel eksenin tamamına dönüşür. Eğer $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

nin yakınsak olduğunu kabul edersek, yani f yi bu özellikteki fonksiyonlardan seçersek,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-L}^{L} f(t)dt\right)\Delta\omega \to 0$$

olur. Böylece, (2.4) ün sağındaki Riemann toplamı $\Delta\omega \to 0$ için bir belirli integrale dönüşecek ve f nin sağladığı belirli koşullar altında (2.4) eşitliği

$$\begin{aligned} f(x) \;\; &= \;\; \int_{0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt\right)\cos(\omega x)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt\right)\sin(\omega x)\right] d\omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

Tanım 2.1 ***(Fourier İntegrali):*** *$f(x)$ fonksiyonu tüm reel x ler için tanımlı ve $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ integrali yakınsak olsun. O takdirde f nin* ***Fourier integrali*** *(ya da f nin* ***Fourier integral gösterimi****)*

$$\boxed{f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\right]\,d\omega} \tag{2.6}$$

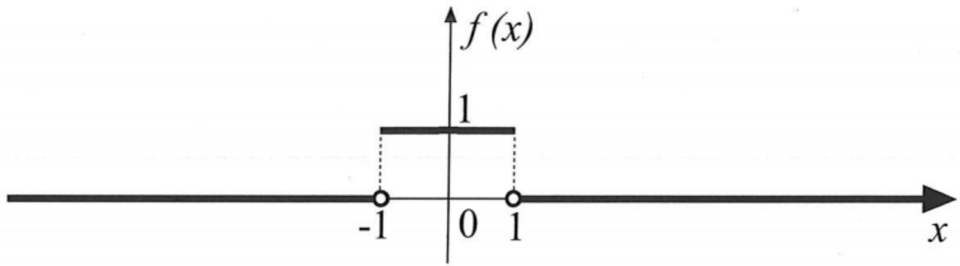
dır. Burada $A(\omega)$ ve $B(\omega)$ Fourier integral katsayıları

$$\boxed{\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\,dt\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\,dt\end{aligned}} \tag{2.7}$$

ile ifade edilirler.

Örnek 2.3 $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$ *fonksiyonunun Fourier integralini bulunuz.*

Çözüm. Aşağıda Şekil 2.6 da grafiği görülen bu fonksiyonu bir Fourier integrali ile ifade edeceğiz. $f(x)$ fonksiyonu için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2$



Şekil 2.6: $f(x)$ in grafiği

olup integral yakınsaktır. Fourier integral katsayılarını hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\; dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos(\omega t)\; dt = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} \\
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sin(\omega t)\, dt = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan $f(x)$ in Fourier integrali

$$
f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)\sin\omega}{\omega}\, d\omega \tag{2.8}
$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların Fourier integrallerini bulunuz ve integral gösteriminin neye yakınsadığını belirtiniz.

a) $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$

ı) $f(x)=\begin{cases} 1/2, & -5 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 5 \\ 1, & |x|>5 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} |x|, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} k \in R, & -10 \le x \le 10 \\ 0, & |x|>10 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} |\cos x|, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} |\sin 2x|, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & -4 \le x \le 0 \\ \cos x, & 0 < x \le 4 \\ 0, & |x|>4 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & -3\pi \le x \le \pi \\ 0, & \begin{cases} x < -3\pi \\ x > \pi \end{cases} \end{cases}$

l) $f(x)=e^{-x^2}, \ -\infty < x < \infty$

f) $f(x)=\begin{cases} |x|, & -\pi \le x \le 2\pi \\ 0, & \begin{cases} x < -\pi \\ x > 2\pi \end{cases} \end{cases}$

m) $f(x)=e^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty$

g) $f(x)=\begin{cases} |x+1|, & -2 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

n) $f(x)=xe^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty$

2.3 Kompleks Fourier İntegrali

Reel eksenin tüm noktalarında tanımlı bir f fonksiyonunun Fourier integrali Tanım 2.1 de

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right] d\omega$$

şeklinde elde edilmiş ve (2.6) ile gösterilmişti. Bu formülde $\cos(\omega x)$ ve $\sin(\omega x)$ yerine kompleks üstel formları konulursa,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left[A(\omega)\left(\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\right) + B(\omega)\left(\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right)\right] d\omega \\ &= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{2}\left[A(\omega)-iB(\omega)\right]e^{i\omega x} + \frac{1}{2}\left[A(\omega)+iB(\omega)\right]e^{-i\omega x}\right\} d\omega \\ &= \int_0^\infty \left\{C(\omega)e^{i\omega x} + \overline{C(\omega)}e^{-i\omega x}\right\} d\omega \qquad (2.22) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.22) eşitliklerinden ve (2.7) Fourier integral katsayılarından

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2}\left[A(\omega) - iB(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} \overline{C(\omega)} &= \frac{1}{2}\left[A(\omega) + iB(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = C(-\omega) \end{aligned}$$

yazılabilecektir. $\overline{C(\omega)} = C(-\omega)$ olmasından dolayı,

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega + \int_{-\infty}^{0} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.4 ***(Kompleks Fourier İntegrali):*** *f nin kompleks Fourier integrali*

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega} \tag{2.24}$$

olup $C(\omega)$ kompleks Fourier katsayısı

$$\boxed{C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt} \tag{2.25}$$

ile verilir.

Örnek 2.6 $f(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$ *fonksiyonunun kompleks Fourier integralini bulunuz.*

Çözüm. Verilen fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ e^{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

formunda olup $C(\omega)$ katsayısı

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, e^{-i\omega t}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\, e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega}\right] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \end{aligned}$$

olduğundan $f(x)$ in kompleks Fourier integrali

$$f(x) = e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} e^{i\omega x} \, d\omega$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların kompleks Fourier integrallerini bulunuz ve bu integrallerin yakınsadığı fonksiyonları belirleyiniz.

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x & , \quad -3 \le x \le 3 \\ 0 & , \quad |x| > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sinh x & , \quad -\pi \le x \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x \cosh x & , \quad -\pi \le x \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & , \quad -5 \le x \le 5 \\ 0 & , \quad |x| > 5 \end{cases}$

g) $f(x) = x^2 e^{-3|x|} \ , \quad x \in \mathbb{R}$

h) $f(x) = x e^{-|x|} \ , \quad x \in \mathbb{R}$

Fourier Dönüşümleri

$f(x)$ in kompleks Fourier integrali olarak elde edilen (2.26) formülünü

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \tag{2.27}$$

şeklinde yazalım ve içerideki integrali

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{2.28}$$

ile gösterelim. Bu takdirde (2.27) integral gösterimi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \tag{2.29}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.28) ile tanımlanan F fonksiyonuna f in Fourier dönüşümü ve (2.29) ile tanımlanan f ye de F nin ters Fourier dönüşümü denilmektedir.

Tanım 2.5 ***(Fourier Dönüşümü):*** *Bir f fonksiyonu her sonlu $[-L, L]$ aralığında parçalı sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ integrali yakınsak olsun. O takdirde,*

$$\boxed{\mathcal{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = F(\omega)} \tag{2.30}$$

ifadesine f nin **Fourier dönüşümü** *adı verilir.*

Tanım 2.6 ***(Ters Fourier Dönüşümü):*** *$F(\omega)$ nın ters Fourier dönüşümü $\mathcal{F}^{-1}\{F\}$ ile gösterilen ve*

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t)} \tag{2.31}$$

Örnek 2.7

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. (2.30) tanımından dolayı $f(x)$ in Fourier dönüşümü,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\omega} \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = F(\omega) \end{aligned}$$

dir. (2.31) den dolayı $F(\omega)$ nın ters Fourier dönüşümü ise,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{F\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}e^{i\omega t}d\omega = \begin{cases} 1 & , \quad -a<t<a \quad \text{ise} \\ \frac{1}{2} & , \quad t=\mp a \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad t<-a \ \text{ve} \ t>a \ \text{ise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad |t|<a \quad \text{ise} \\ \frac{1}{2} & , \quad |t|=a \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad |t|>a \quad \text{ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Örnek 2.8 $a \in \mathbb{R}^{+}$ *olmak üzere*

$$
f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ e^{-at} & , \quad t \geq 0 \end{cases}
$$

olarak tanımlanan f fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\} &= F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{-e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların Fourier dönüşümlerini bulunuz.

a) $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} a^2-x^2, & -a \le x \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}\cos x, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 3, & -\alpha \le x \le \alpha \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

g) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

h) $f(x) = e^{-a|x|}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$

ı) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = xe^{-|5x|}$, $x \in \mathbb{R}$

Bazı Fonksiyonların Fourier Dönüşümleri Tablosu

	$f(t) \quad , \quad \lvert t\rvert < \infty$	$\sqrt{2\pi}F(\omega)$
1.	$e^{-at}H(t) \quad , \quad a > 0$	$\frac{1}{a+i\omega}$
2.	$e^{-at}H(-t) \quad , \quad a > 0$	$\frac{1}{a-i\omega}$
3.	$te^{-at}H(t) \quad , \quad a > 0$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$
4.	$te^{-at}H(-t) \quad , \quad a > 0$	$\frac{1}{(a-i\omega)^2}$
5.	$t^n e^{-at}H(t)\ , \ \mathrm{Re}(a) > 0 \ ; \quad n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{n+1}}$
6.	$e^{-a\lvert t\rvert} \quad , \quad a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$
7.	$te^{-a\lvert t\rvert} \quad , \quad a > 0$	$\frac{-4a\omega i}{(\omega^2+a^2)^2}$
8.	$\frac{1}{1+a^2t^2}$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}e^{-\lvert\omega/a\rvert}$
9.	$\frac{\cos(at)}{1+t^2}$	$\frac{\pi}{2}\left(e^{-\lvert\omega-a\rvert} + e^{-\lvert\omega+a\rvert}\right)$
10.	$\frac{\sin(at)}{1+t^2}$	$\frac{\pi}{2i}\left(e^{-\lvert\omega-a\rvert} + e^{-\lvert\omega+a\rvert}\right)$
11.	$\begin{cases} 1 & , \quad \lvert t\rvert < a \\ 0 & , \quad \lvert t\rvert > a \end{cases}$	$\frac{2\sin(\omega a)}{\omega}$
12.	$\frac{\sin(at)}{at}$	$\begin{cases} \frac{\pi}{a} & , \quad \lvert\omega\rvert < a \\ 0 & , \quad \lvert\omega\rvert > a \end{cases}$

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- LTI sistemlerin analizinde faydalı bir yaklaşım, işaretleri aşağıdaki iki özelliği sağlayan temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde temsil etmektir:

  1. Temel işaretler, geniş ve faydalı bir işaret kümesini oluşturabilmelidir.
  2. Bir LTI sistemin temel bir işarete yanıtı basit olmalıdır. Böylece, LTI sistemin bir girişe yanıtı, basit yanıtların doğrusal kombinasyonu olacaktır.

- Bu iki özelliği, hem sürekli hem de ayrık durumda karmaşık üstel işaretler sağlamaktadır.

- LTI bir sistemin çıkışı, girişin karmaşık bir sabitle çarpımına eşitse girişe SİSTEMİN ÖZFONKSİYONU, karmaşık sabite SİSTEMİN ÖZDEĞERİ denilir.

- s ve z karmaşık sayılar olmak üzere, aşağıda gösterildiği gibi sürekli-zamanda e^{st}, ayrık-zamanda z^n LTI sistemlerin özfonksiyonudur.

LTI Sistemlerin Karmaşık Üstel İşaretlere Yanıtı

- İmpuls yanıtı $h(t)$ olan bir sürekli-zaman LTI sistemin girişine e^{st} uygulandığında sistemin çıkışı konvolüsyon integralinden hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\
&= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

- Eşitliğin sağındaki integralin yakınsadığını varsayalım. İntegralin değeri s'e bağlıdır ve karmaşık bir sayıdır. İntegralin sonucunu $H(s)$ ile gösterelim:

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

- O halde, $y(t) = H(s)e^{st}$ (çıkış, girişin karmaşık bir sayı ile çarpımına eşittir). Böylece, karmaşık üstel e^{st} işaretinin sürekli-zaman LTI sistemlerin özfonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

- İmpuls yanıtı h(t) olan bir LTI sistemin, e^{st} girişine olan yanıtının $y(t) = H(s)\ e^{st}$ olduğunu Fourier serileri konusunda gördük ve $H(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanıyordu:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

LTI : Doğrusal Zamanda Değişmez

- $s=jw$ için yukarıda verilen integral ifadesi h(t)'nin Fourier dönüşümünü verir. s'in genel karmaşık değişken ($s = \sigma + jw$) olması durumunda integral ifadesine ***Laplace dönüşümü*** denir.

- s karmaşık bir sayı olmak üzere, bir sürekli-zaman işaret $x(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$\mathrm{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

denklemiyle tanımlanır. Laplace dönüşümünü belirtmek için $\mathcal{L}\{x(t)\}$ kullanılacak ve işaret ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki, aşağıdaki şekilde belirtilecektir.

NOT: UYGULAMADA t ZAMAN PARAMETRESİ NEGATİF OLAMAYACAĞINDAN İNTEGRALLER $t \geq 0$ İÇİN HESAPLANIR.

Teorem: Reel değerli bir f fonksiyonu için $|f(t)| \leq M.e^{Kt}$ olacak şekilde $M>0$, $K \in \mathbb{R}$ sabit sayıları varsa f'nin Laplace dönüşümü $F(s)$ vardır ve $s=\sigma+iw$ o.ü.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt$$ olur.

Ayrıca $F(s)$'nin ters-Laplace dönüşümüde var olup $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s).e^{st}.ds$$ olur.

NOT: $\mathcal{L}(\cdot)$ Laplace dönüşümü lineerdir. Yani f, g iki fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere

$$\mathcal{L}(\lambda f(t) \mp g(t)) = \lambda \cdot \mathcal{L}(f(t)) \mp \mathcal{L}(g(t))$$ yazılır.

ÖR: $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$ basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü bulalım.

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt = \int_0^c 1.e^{-st}.dt = \frac{e^{-sc}}{-s} - \frac{1}{-s}$$

$$= \frac{1-e^{sc}}{s}$$ olur.

ÖR: $a \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere $\mathcal{L}(e^{at}) = ?$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} \cdot dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(a-s)t} \cdot dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{e^{(a-s)R} - 1}{a-s}$$ olur. $s = \sigma + i w$ için $\sigma > a$

alınırsa $a - s < 0$ olup $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ olur.

ÖR: $\mathcal{L}(\text{Sinh}\, bt) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{bt}) - \mathcal{L}(e^{-bt})\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right] = \frac{b}{s^2 - b^2}$$ olur.

ÖR: $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} \cdot dt = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{e^{-sR}}{-s} - \frac{1}{-s}\right)$

$$= \frac{1}{s}$$ olur.

ÖR: $f(t)=t+2$ için $\mathcal{L}(f(t))=?$

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(t+2)=\mathcal{L}(t)+\mathcal{L}(2)=\mathcal{L}(t)+\frac{2}{s}\Rightarrow$$

$\mathcal{L}(t)=\int_0^{\infty} t\cdot e^{-st}\cdot dt=\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{R} t\cdot e^{-st}\cdot dt$ olup kısmi integral uygulanırsa

$$\mathcal{L}(t)=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R}{s}e^{-sR}-\frac{1}{s^2}e^{-sR}\right)+\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}$$

olur. O zaman $\mathcal{L}(f(t))=F(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}$ dir.

ÖR: $f(t)=\cos bt$ için $\mathcal{L}(f(t))=F(s)=?$

$\mathcal{L}(f(t))=\int_0^{\infty}\cos bt\cdot e^{-st}\cdot dt$ integrali 2 defa kısmi integral uygulanarak bulunur. Bunun yerine

$\boxed{e^{ibt}=\cos bt+i\sin bt}$ ve $\boxed{e^{-ibt}=\cos bt-i\sin bt}$

kullanılırsa $\cos bt = \dfrac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\dfrac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}\right) =$

$$\mathcal{L}(\cos bt) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{ibt}) + \mathcal{L}(e^{-ibt})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib}\right] = \frac{s}{s^2+b^2}$$ bulunur.

Ör: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+6}{s^2+9}\right) = ?$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+6}{s^2+9}\right) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$= 3\cos 3t + 6 \cdot \frac{\sin 3t}{3} = 3\cos 3t + 2\sin 3t$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri:

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ olsun.

$$U_c(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$$ olmak üzere

1) $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$, $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

2) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \dfrac{F(s)}{s}$

3) $\mathcal{L}(t \cdot f(t)) = -F'(s)$

4) $\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} F(u)\,du$

5) $\mathcal{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)$

6) $\mathcal{L}(U_c(t) \cdot f(t-c)) = e^{-cs} \cdot F(s)$

ÖR: $f(t)=\cos^2 t$ için $\mathcal{L}(f(t))=?$

$f(0)=1$, $f'(t)=-\sin 2t$ ve $\mathcal{L}(f'(t))=\dfrac{-2}{s^2+4}$ olması 1. özellik ile beraber kullanılırsa

$\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ için $\mathcal{L}(f'(t))=sF(s)-f(0) \Rightarrow$

$$\frac{-2}{s^2+4}=sF(s)-1 \Rightarrow F(s)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)} \text{ olur.}$$

ÖR: $\mathcal{L}(t^2)$ ve $\mathcal{L}(t^3)$ bulalım.

$f(t)=t^2$ alınırsa $f'(t)=2t$ ve $\mathcal{L}(2t)=\dfrac{2}{s^2}$ kullanılırsa

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}\left(\int_0^t 2x\,dx\right)=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2}=\frac{2}{s^3} \text{ olur.}$$

2. özellikle

$$\mathcal{L}(t^3)=\mathcal{L}\left(\int_0^t 3x^2\,dx\right)=\frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s^3}=\frac{6}{s^4} \text{ olur.}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

ÖR: $\mathcal{L}(t^n . e^{at}) = ?$

$$\mathcal{L}(t^n . e^{at}) = \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{s \to s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

5. özellik

ÖR: $\mathcal{L}(t . \cos bt) = ?$ 3. özellikle $\mathcal{L}(\cos bt) = \frac{s}{s^2+b^2}$ için

$$\mathcal{L}(t . \cos bt) = -\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right)' = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$$

ÖR: $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = ?$ $f(t) = \sin t$ alınırsa 4. özellikle

$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$ için

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1} . du = \lim_{R \to \infty} \int_s^{R} \frac{1}{1+u^2} . du = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

olur.

Teorem (Ters-Laplace Dönüşümü) $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ ve $n>m$ o.ü. $der(P(s))=m$ ve $der(Q(s))=n$ olsun. $F(s)$ -nin ters Laplace dnş. $f(t)$ ise $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\sum Rez[F(s)e^{st}, s_k]$ dır. $s_1, s_2, \ldots s_k$ noktaları $F(s)e^{st}$ -nin kutup noktalarıdır.

ÖR $Y(s)=s^3-4s+1/s(s-1)^3$ ise $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))=?$

$Y(s)e^{st}=(s^3-4s+1).e^{st}/s.(s-1)^3$ fonk. kutup noktaları $s=0$ ve 3. dereceden $s=1$ dir.

$$Rez[Y(s)e^{st},0]=\lim_{s\to 0}\cancel{s}.\frac{(s^3-4s+1)e^{st}}{\cancel{s}(s-1)^3}=\frac{1.e^0}{-1}=-1$$

$$Rez[Y(s)e^{st},1]=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\cancel{(s-1)^3}.\frac{(s^3-4s+1)e^{st}}{s\cancel{(s-1)^3}}\right)=-t^2e^t+te^t+2e^t$$

dup $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))=-t^2e^t+te^t+2e^t-1$ olur.

Ör. $Y(s) = 5s/(s^2+4)(s^2+9)$ ise $\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = ?$

$Y(s).e^{st} = 5s.e^{st}/(s^2+4)(s^2+9)$ olup $\pm 2i$, $\pm 3i$ basit kutup noktaları bulunur. Buradan,

$$\text{Rez}\left[Y(s)e^{st}, 2i\right] = \lim_{s \to 2i} \frac{5s.e^{st}}{(s+2i)\cancel{(s-2i)}(s^2+9)} \cdot \cancel{(s-2i)} = \frac{10i.e^{2it}}{4i.5}$$

$$= \frac{e^{2ti}}{2} = \frac{1}{2}\text{Cos}2t + \frac{i}{2}\text{Sin}2t$$

$$\text{Rez}\left[Y(s)e^{st}, -2i\right] = \lim_{s \to -2i} \frac{5s.e^{st}}{(s-2i)\cancel{(s+2i)}(s^2+9)} \cancel{(s+2i)} = \frac{-10i.e^{-2it}}{-4i.5}$$

$$= \frac{e^{-2ti}}{2} = \frac{1}{2}\text{Cos}2t - \frac{i}{2}\text{Sin}2t \quad \text{olur.}$$

$$\mathrm{Rez}\left[Y(s)e^{st}, 3i\right] = \lim_{s \to 3i} \cancel{(s-3i)} \frac{5s \cdot e^{st}}{(s^2+4)\cdot\cancel{(s-3i)}(s+3i)} = \frac{15i \cdot e^{3ti}}{-5 \cdot 6i}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos 3t - \tfrac{i}{2}\sin 3t$$

$$\mathrm{Rez}\left[Y(s)e^{st}, -3i\right] = \frac{-15i \cdot e^{-3it}}{-5 \cdot -6i} = -\frac{1}{2}\cos 3t + \tfrac{i}{2}\sin 3t \text{ olup,}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \cos 2t - \cos 3t$$

Alıştırma: 1) $Y(s) = \dfrac{s^3+3s^2-s+1}{s(s+1)^2(s^2+1)}$ ise $\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = ?$

Cvp: $1-2e^{-t}-2te^{-t}+\cos t+\sin t$

2) $F(s) = \dfrac{4s+3}{s^3+2s^2+s+2}$ ise $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = ?$

Cvp: $-e^{-2t}+\cos t+2\sin t$

3) $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ ise $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = ?$

Cvp: $t\sin t$