5.2. KOMPLEKS LOGARİTMA

$w = f(z) = e^z$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$'den $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesine örten ama 1-1 olmayan bir fonksiyon olduğunu daha önce söyledik. Bundan dolayı e^z'nin tersinden bahsedebilmek için e^z'nin 1-1 olduğu bir dal bulmalıyız.

Tanım: (Çok değerli logaritma) $z \neq 0$ için $\log z$ fonksiyonu e^z-üstel fonksiyonunun tersi olup

$$\log z = w \Leftrightarrow z = e^w \quad \text{olması gereği}$$

$$w = \log z = \rho . e^{i\phi} = \ln|z| + i \cdot \arg(z) \, , \quad z \neq 0$$

$$= \ln|z| + i \left[\operatorname{Arg} z + 2k\pi \right] \, , \; k \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir.

ÖR: $\log(1+i)$ sayısının tüm değerlerini bulunuz.

$$\log(1+i) = \ln|1+i| + i\cdot \arg(1+i)$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\pi/4 + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z} \text{ olup}$$

$$\log(1+i) = \ldots, \ln\sqrt{2} - i\,7\pi/4, \ln\sqrt{2} + i\,\pi/4, \ln\sqrt{2} + i\cdot 9\pi/4, \ldots$$

olup sonsuz tane değeri vardır.

UYARI: $w=e^z$ fonksiyonunu $\mathbb{C}$ yerine temel periyot bandında tanımlarsak, yani $D=\{z \mid z=x+iy, x\in\mathbb{R}, -\pi<y\leq\pi\}$ olmak üzere

$e^z: D \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ alınırsa e^z fonksiyonu 1-1 ve örten olup terslenebilirdir. Temel periyot bandında tanımlanan bu e^z fonksiyonunun tersine logaritma (esas) denir ve $\operatorname{Log} z$ ile gösterilir.

<u>Tanım</u>: $z \neq 0$ olmak üzere z'nin esas logaritması
$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}(z)$ dir. $\mathrm{Log}\, z$ fonksiyonu 1-1 ve
$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to D$ şeklinde tanımlı örten bir fonksiyondur.

Örneğin $\mathrm{Log}\, i = \ln|i| + i(\mathrm{Arg}(i)) = \ln 1 + i \cdot \pi/2 = i \cdot \pi/2$,
$\mathrm{Log}(-2) = \ln|-2| + i \cdot \mathrm{Arg}(-2) = \ln 2 + \pi i$ dir.

Bazı Özellikleri:

1) $\forall z \neq 0$ için $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$

2) $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}(z)$ için $\ln|z|$ fonksiyonu $z=0$ noktasında, $\mathrm{Arg}(z)$ fonksiyonu ise $(-x)$ ekseni ve $z=0$ noktasında süreksiz olduğundan $\mathrm{Log}\, z$ fonksiyonu $(-x)$ ekseni ve $z=0$ noktasında süreksizdir.

Fakat negatif x ekseni üzerindeki noktalarında esas logaritması hesaplanabilir:

$$\mathrm{Log}(-e) = \ln|-e| + i.\mathrm{Arg}(-e) = 1 + \pi i$$

$$\mathrm{Log}(-1) = \ln|-1| + i.\mathrm{Arg}(-1) = \pi i$$

(3) $z = x + iy = x + i.0$, $x \in \mathbb{R}^+$ şeklindeyse $\mathrm{Log}\, z = \ln x$ olur.

(4) $z \neq 0$ için $\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i.\mathrm{Arg}(z)$ olmak üzere $z = r.e^{i\theta}$ kutupsal yazıldığında

$\mathrm{Log}\, z = \ln r + i.\theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$ olur. $w = \mathrm{Log}\, z$ için $u(r,\theta) = \ln r$ ve $v(r,\theta) = \theta$ olup CR-denklemleri $r.u_r = v_\theta$, $r.v_r = -u_\theta$ sağlanır. Ama $(-x)$ ekseninde $\mathrm{Log}\, z$ süreksiz old. dan türevlenemez olup

$w = \mathrm{Log}\, z$ fonksiyonu $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$ için türevlere bilirdir:

Buna göre $w = \mathrm{Log}\, z = \ln r + i.\theta$ için

$w' = (\mathrm{Log}\, z)' = e^{-i\theta}(u_r + i.v_r) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$ olur.

(5) $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$

$\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$

$\log(1/z) = -\log z$

(5') Yukarıdaki özellikler $\mathrm{Log}\, z$ fonksiyonu için sağlanmaz. Örneğin $z_1 = -\sqrt{3}+i$, $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ için

$z_1 \cdot z_2 = -4i$ olup

$\mathrm{Log}(z_1) = \mathrm{Log}(-\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i.5\pi/6$

$\mathrm{Log}(z_2) = \mathrm{Log}(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i.2\pi/3$ iken

$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) = \ln 4 - i \cdot \pi/2$ olup

$\mathrm{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$.

5.3. KOMPLEKS ÜSLER:

$z \neq 0$ ve $z \neq e$ için z^w sayısının değerlerinin sayısı w-ya göre belirlenir. $w \in \mathbb{Z}$ ise z^w'nın bir tek değeri vardır. $w = p/q$ şeklindeyse z^w'nın q tane değeri (kökü) vardır. $x \neq 0, y \neq 0$ için $w \in \mathbb{C}$ ise z^w'nın sonsuz değeri olduğunu görelim.

Tanım: $\forall z, c \in \mathbb{C}$ için $z^c = e^{\log z^c} = e^{c \cdot \log z}$ şeklinde tanımlı olup $\log(z)$ fonksiyonu çok değerli olduğundan z^c'de sonsuz değere sahiptir.

* $z^c = e^{c.\operatorname{Log} z}$ sayısına z^c'nin esas (principle) değeri denir.

ÖR: $\sqrt{1+i}$, $(-1)^i$ sayılarının tüm değerlerini ve esas değerlerini bulalım.

$\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2}$ nin 2 tane değeri olup

$= \left(\sqrt{2}.e^{i(\pi/4+2k\pi)}\right)^{1/2}$ $k=0,1$

$= \sqrt[4]{2}.e^{i(\pi/8+k\pi)}$

$= \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ ve $\sqrt[4]{2}.e^{i.9\pi/8}$ olur. Esas değeri ise

$$(1+i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+i)} = e^{\frac{1}{2}\left[\ln|\sqrt{2}|+i.\pi/4\right]}$$

$$= e^{\frac{\ln 2}{4}}.e^{i.\pi/8} = \sqrt[4]{2}.e^{i.\pi/8}$$ olur.

$(-1)^i$ sayısının tüm değerleri

$$(-1)^i = e^{i.\log(-1)} = e^{i(\ln|-1|+i.\arg(-1))}$$
$$= e^{i(i(\pi+2k\pi))} = e^{-\pi+2k\pi}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Onun esas değeri

$$(-1)^i = e^{i\,\mathrm{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1|+i.\mathrm{Arg}(-1))}$$
$$= e^{i(i.\pi)} = e^{-\pi} \text{ olur.}$$

ÖR: $2^{1/9+i/50}$ sayısının tüm değerlerini bulalım.

$$2^{1/9+i/50} = e^{(1/9+i/50).\log 2} = e^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}[\ln 2+i.2k\pi]}$$
$$= e^{\left(\frac{\ln 2}{9}-\frac{k\pi}{25}\right)+i\left(\frac{\ln 2}{50}+\frac{2k\pi}{9}\right)}$$
$$= 2^{1/9}.e^{-\frac{k\pi}{25}}\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{50}+\frac{2k\pi}{9}\right)+i.\sin\left(\frac{\ln 2}{50}+\frac{2k\pi}{9}\right)\right]$$

bulunur. Esas değeri için $k=0$ için olandır.

$w=f(z)=z^c$ fonksiyonunun Özellikleri:

$z\neq 0$, $z,c,d\in\mathbb{C}$ olsun.

(1) $z^{-c}=\dfrac{1}{z^c}$, $z^c\cdot z^d=z^{c+d}$, $\dfrac{z^c}{z^d}=z^{c-d}$

(2) $n\in\mathbb{Z}$ olmak şartıyla $(z^c)^n=z^{c\cdot n}$ dir.
$n\notin\mathbb{Z}$ ise eşitlik gerçekleşmeyebilir; yani $(z^c)^n\neq z^{c\cdot n}$ olur. Örneğin $(i^2)^i\neq i^{2i}$ dir.

$$(i^2)^i=(-1)^i=e^{i\cdot\log(-1)}=e^{i[\ln|1|+i\cdot\arg(-1)]}$$
$$=e^{-\pi+2k\pi}$$

$$(i^{2i})=e^{2i\cdot\log i}=e^{2i[\ln|i|+i\cdot\arg(i)]}$$
$$=e^{-2\cdot(\pi/2+2k\pi)}=e^{-\pi+4k\pi}\text{ olur.}$$

(3) $f(z) = z^c = e^{c \cdot \operatorname{Log} z}$ fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da türevlenebilir olup $f'(z) = \frac{c}{z} \cdot z^c$ dir.

(4) $b \in \mathbb{C}$ sabit sayı olmak üzere $f(z) = b^z$ için $f'(z) = b^z \cdot \log(b)$ dir.

5.4. Trigonometrik & Hiperbolik Fonksiyonlar

$\mathbb{R}$-de $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının C^{∞}-sınıfından olması nedeniyle

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ve} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

olduğunu biliyoruz. Bunlara benzer olarak; $z \in \mathbb{C}$ için

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ve} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$$

seri açılımları vardır. Bu iki fonksiyondan hareket ederek

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \text{ve} \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

yazılabilir.

Ayrıca $\sin z$, $\cos z$ fonksiyonları tüm $\mathbb{C}$-de analitik olup tam fonksiyonlardır. Bunun yanısıra

(1) $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

$(\tan z)' = \sec^2 z$, $(\cot z)' = -\operatorname{cosec}^2 z$

$(\sec z)' = \sec z . \tan z$, $(\operatorname{cosec} z)' = -\cot z . \operatorname{cosec} z$

(2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için sağlanır. Yine $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ dir.

(3) Euler Formülü gereği $e^{iz} = \cos z + i . \sin z \Rightarrow$

$e^{-y+ix} = e^{-y}[\cos x + i \sin x] = \cos z + i \sin z$ ve

$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \Rightarrow e^{y-ix} = e^{y}[\cos x - i \sin x]$

ifadelerinden

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\cos x (e^{y} + e^{-y}) + i \sin x (e^{-y} - e^{y})}{2}$$

$$= \cos x . \cosh y - \sin x . \sinh y \text{ olur.}$$

Yine $\text{Cosh} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ ve $\text{Sinh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ eşitlikleri kullanılırsa benzer şekilde

$$\text{Sin} z = \text{Sin}(x+iy) = \text{Sin}x \cdot \text{Cosh}y + i \cdot \text{Cos}x \cdot \text{Sinh}y$$

bulunur.

Buna göre $\text{Cos}(iy) = \text{Cosh}y$ ve $\text{Sin}(iy) = i \cdot \text{Sinh}y$ eşitliklerinde elde edilir.

(4) Az önceki $\text{Sin} z$ ve $\text{Cos} z$ formülleri kullanılarak, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\text{Sin}(z + 2k\pi) = \text{Sin} z$ &

$$\text{Cos}(z + 2k\pi) = \text{Cos} z$$

elde edilebilir. Yani $\text{Sin} z$, $\text{Cos} z$ fonksiyonları 2π peryotludur. Ayrıca

$\text{Sin}(\pi + z) = -\text{Sin} z$ ve $\text{Cos}(\pi + z) = -\text{Cos} z$ yazılabilir.

(5) Bir önceki madde kullanılarak $\tan(\pi+z)=\tan z$ ve $\cot(\pi+z)=\cot z$ yazılabilir.

(6) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \,,\, k\in\mathbb{Z}$

$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi \,,\, k\in\mathbb{Z}$ olur.

(7) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için $\sin(z_1 \mp z_2)$, $\cos(z_1 \mp z_2)$ formülleri $\mathbb{R}$-deki formüllerle aynıdır.

(8) $\forall z\in\mathbb{C}$ için
$$
\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x \cdot \cosh^2 y + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x \cdot \cosh^2 y \mp \sin^2 x \cdot \sinh^2 y + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x\,(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y\,(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y
\end{aligned}
$$
ve aynı yolla

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ bulunur.

UYARI: $\mathbb{R}$-dekinin aksine $\mathbb{C}$-de Sinüs ve kosinüs fonksiyonları sınırlı değildir. Sınırlı olsaydı $\lim_{z\to\infty} \sin z$ veya $\lim_{z\to\infty} \cos z$ limitleri sonlu olmalıydı.

$z_0 = x_0 + iy$ olmak üzere $y \to \infty$ olsun.

$$\lim_{z\to z_0} |\sin z|^2 = \lim_{y\to\infty} |\sin^2 x_0 + \sinh^2 y| = \infty \text{ olur.}$$

ÖR: $\cos z = \cosh 2$ denklemini çözelim.

$$\cos z = \cos(x+iy)$$
$$= \cos x \cdot \cosh y - i \cdot \sin x \cdot \sinh y = \cosh 2$$ eşitliğinde

Reel ve imajiner kısımları karşılaştırırsak

$\cos x \cdot \cosh y = \cosh 2$ ve

$\sin x \cdot \sinh y = 0$ olur. İkinci denklemden $x = k\pi$ veya $y = 0$ olmalıdır. Bunu ilk denklemde dikkate alırsak

$\cosh y \geq 1$ olmasıyla beraber

$\rightarrow$ $y=0$ ise $\cos x . \cosh y = \cosh 2 \Rightarrow \cos x = \cosh 2 > 1$ olup çelişki çıkar. O zaman $y \neq 0$ olup $x = k\pi$ olmalıdır. Buradan

$\rightarrow$ $x = k\pi$ ise $\cos(k\pi) . \cosh y = \cosh 2 \Rightarrow y = -2 \vee y = 2$ ve $k = 2n$ olmalıdır.

$$Ç.K. = \{ z \in \mathbb{C} : z = 2n\pi \mp 2i \}$$

bulunur.

ÖD: $\tan z = \tan(x+iy) = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} + i . \dfrac{\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$ olduğunu gösteriniz.

Tanım: $\forall z \in \mathbb{C}$ için $\cosh z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ olup $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, $z \neq (k+\frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ve

$\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$, $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlıdır.

Bu fonksiyonların türevleri $(\sinh z)' = \cosh z$ ve $(\cosh z)' = \sinh z$ ifadeleriyle bulunabilir. Ayrıca

→ $\cosh z = \cosh x \cdot \cos y + i \cdot \sinh x \cdot \sin y$

→ $\sinh z = \sinh x \cdot \cos y + i \cdot \cosh x \cdot \sin y$

→ $\cosh(iz) = \cos z$

→ $\sinh(iz) = i \cdot \sin z$

→ $\sin(iz) = i \cdot \sinh z$

→ $\cos(iz) = \cosh z$ eşitlikleri vardır.

ÖR: $\cosh(iz) = \cos z$ olduğunu gösterelim.

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\cos z + i\sin z + \cos z - i\sin z}{2}$$

$$= \cos z$$

ÖR: $\sin(iz) = i.\sinh z$? $z = x+iy$ için

$$\sin(-y+ix) = \sin(-y).\cosh x + \cos(-y).i.\sinh x$$

$$= i.[\sinh x.\cos y + i.\sin y.\cosh x]$$

$$= i\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}.\cos y + i.\sin y.\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]$$

$$= i\left[\frac{e^x}{2}(\cos y + i\sin y) - \frac{e^{-x}}{2}(\cos y - i\sin y)\right]$$

$$= i\left[\frac{e^x}{2}.e^{iy} - \frac{e^{-x}}{2}.e^{-iy}\right] = i\left[\frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2}\right]$$

$$= i\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right) = i.\sinh z \text{ olur.}$$

5.5. Ters-Trigonometrik & Ters-Hiperbolik Fonksiyonlar

$\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \text{ ve}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$ fonksiyonlarının tersleri düşünülürse üstel fonksiyonlarla tanımlandıklarından tersleri logaritmayla tanımlanırlar. Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar 1-1 olmadığından (çok-1) terslerde çok değerli olurlar.

Buna göre

(1) $\arcsin z = -i.\log[iz+(1-z^2)^{1/2}]$

(2) $\arccos z = -i.\log[z+i(1-z^2)^{1/2}]$

(3) $\arctan z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

(4) $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$, $(\arccos z)' = \dfrac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$

$(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ olur.

ÖR: $f(z) = w = \sin z$ 'nin tersi olan $\arcsin z$'yi bulalım.
$w = \sin z \Rightarrow z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$ ifadesinde w yalnız bırakılmalıdır. Buradan
$2i.z = e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow (e^{iw})^2 - 2iz.e^{iw} - 1 = 0$ olur.
$e^{iw} = K$ alınırsa $K^2 - 2izK - 1 = 0 \Rightarrow K = iz + (1-z^2)^{1/2}$
olur. Buradan
$e^{iw} = K = iz + (1-z^2)^{1/2} \Rightarrow iw = \log(iz + (1-z^2)^{1/2}$

$\Rightarrow w = -i.\log(iz + (1-z^2)^{1/2})$

ters fonksiyonu bulunur.

ÖR: $\arcsin\sqrt{2} = ?$

$$\arcsin\sqrt{2} = -i \cdot \log\left[i\sqrt{2} + (1-2)^{1/2}\right]$$

$$= -i \cdot \log\left(i\sqrt{2} \mp i\right)$$

$$= -i \cdot \left(\ln\left|\sqrt{2}\cdot i \mp i\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$$

$$= -i \cdot \left(\ln(\sqrt{2} \mp 1) + i\left[\pi/2 + 2k\pi\right]\right)$$

$$= \left(\pi/2 + 2k\pi\right) - i\ln(\sqrt{2} \mp 1) \text{ olur.}$$

Ters-Hiperbolik fonksiyonlar içinde yine aynı mantıkla;

$$\operatorname{argsinh} z = \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\operatorname{argcosh} z = \log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \quad \operatorname{argtanh} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

olup türevleri

$$(\operatorname{argsinh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (\operatorname{argcosh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \text{ ve } (\operatorname{argtanh} z)' = \frac{1}{1-z^2}$$

olur.

ÖR: $\operatorname{arctanh}(1+2i) = ?$

$$\operatorname{argtanh}(1+2i) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+1+2i}{1-1-2i}\right) = \frac{1}{2}\log(-1+i)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\ln|-1+i| + i\cdot\arg(-1+i)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\ln\sqrt{2} + i\cdot\big(3\pi/4 + 2k\pi\big)\Big),\ k\in\mathbb{Z} \text{ olur.}$$

1. Find all values for

(a) $\operatorname{Log}(ie^2)$.

(b) $\operatorname{Log}(\sqrt{3}-i)$.

(c) $\operatorname{Log}(i\sqrt{2}-\sqrt{2})$.

(d) $\operatorname{Log}\left[(1+i)^4\right]$.

(e) $\log(-3)$.

(f) $\log 8$.

(g) $\log(4i)$.

(h) $\log(-\sqrt{3}-i)$.

3. Find all the values of z for which each equation holds.

(a) $\operatorname{Log}(z) = 1 - i\frac{\pi}{4}$.

(b) $\operatorname{Log}(z-1) = i\frac{\pi}{2}$.

(c) $\exp(z) = -ie$.

(d) $\exp(z+1) = i$.

6. Show that $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z+5)}{z^2+3z+2}$ is analytic everywhere except at the points -1, -2, and on the ray $\{(x,y) : x \le -5, y = 0\}$.

7. Show that the following are harmonic functions in the right half-plane $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

(a) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

(b) $v(x,y) = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. Find the principal value of

(a) 4^i.

(b) $(1+i)^{\pi i}$.

(c) $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$.

(d) $(1+i\sqrt{3})^{\frac{i}{2}}$.

2. Find *all* values of

(a) i^i.

(b) $(-1)^{\sqrt{2}}$.

(c) $(i)^{\frac{2}{\pi}}$.

(d) $(1+i)^{2-i}$.

(e) $(-1)^{\frac{3}{4}}$.

(f) $(i)^{\frac{2}{3}}$.

1. Establish that $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$ for all z.

2. Demonstrate that, for all z, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, as follows.

(a) Define the function $g(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Explain why g is entire.

(b) Show that g is constant. *Hint*: Look at $g'(z)$.

(c) Use part (b) to establish that, for all z, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

5. Show that, for all z,

(a) $\sin(\pi - z) = \sin z$.

(b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$.

(c) $\sinh(z + i\pi) = -\sinh z$.

(d) $\tanh(z + i\pi) = \tanh z$.

(e) $\sin(iz) = i \sinh z$.

(f) $\cosh(iz) = \cos z$.

6. Express the following quantities in $u + iv$ form.

(a) $\cos(1 + i)$.

(b) $\sin\left(\frac{\pi+4i}{4}\right)$.

(c) $\sin 2i$.

(d) $\cos(-2 + i)$.

(e) $\tan\left(\frac{\pi+2i}{4}\right)$.

(f) $\tan\left(\frac{\pi+i}{2}\right)$.

(g) $\sinh(1 + i\pi)$.

(h) $\cosh \frac{i\pi}{2}$.

(i) $\cosh\left(\frac{4-i\pi}{4}\right)$.

7. Find the derivatives of the following, and state where they are defined.

(a) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

(b) $z \tan z$.

(c) $\sec z^2$.

(d) $z \csc^2 z$.

(e) $z \sinh z$.

(f) $\cosh z^2$.

(g) $z \tan z$.

8. Show that

(a) $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$ holds for all z.

(b) $\sin \overline{z}$ is nowhere analytic.

(c) $\cosh \overline{z} = \overline{\cosh z}$ holds for all z.

(d) $\cosh \overline{z}$ is nowhere analytic.

9. Show that

(a) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$.

(b) $\lim\limits_{y \to +\infty} \tan(x_0 + iy) = i$,
where x_0 is any fixed real number.

10. Find all values of z for which each equation holds.

(a) $\sin z = \cosh 4$.

(b) $\cos z = 2$.

(c) $\sin z = i \sinh 1$.

(d) $\sinh z = \frac{i}{2}$.

(e) $\cosh z = 1$.

15. Given an elegant argument that explains why the following functions are harmonic.

(a) $h(x, y) = \sin x \cosh y$.

(b) $h(x, y) = \cos x \sinh y$.

(c) $h(x, y) = \sinh x \cos y$.

(d) $h(x, y) = \cosh x \sin y$.

16. Establish the following identities.

(a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

(b) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

(c) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

(d) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

(e) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$.

(f) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(g) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.

1. Find *all* values of the following.

(a) $\arcsin \frac{5}{4}$.

(b) $\arccos \frac{5}{3}$.

(c) $\arcsin 3$.

(d) $\arccos 3i$.

(e) $\arctan 2i$.

(f) $\arctan i$.

(g) $\operatorname{arcsinh} i$.

(h) $\operatorname{arcsinh} \frac{3}{4}$.

(i) $\operatorname{arccosh} i$.

(j) $\operatorname{arccosh} \frac{1}{2}$.

(k) $\operatorname{arctanh} i$.

(l) $\operatorname{arctanh} i\sqrt{3}$.

2. Establish the following identities.

(a) $\arccos z = -i \log\left[z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

(b) $\frac{d}{dz} \arccos z = \frac{-1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

(c) $\arctan z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$.

(d) $\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$.

(e) $\arcsin z + \arccos z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

(f) $\frac{d}{dz} \operatorname{arctanh} z = \frac{1}{1-z^2}$.

(g) $\operatorname{arcsinh} z = \log\left[z + \left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

(h) $\frac{d}{dz} \operatorname{arcsinh} z = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^{1/2}}$.

(i) $\operatorname{arccosh} z = \log\left[z + \left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

(j) $\frac{d}{dz} \operatorname{arccosh} z = \frac{1}{\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$.