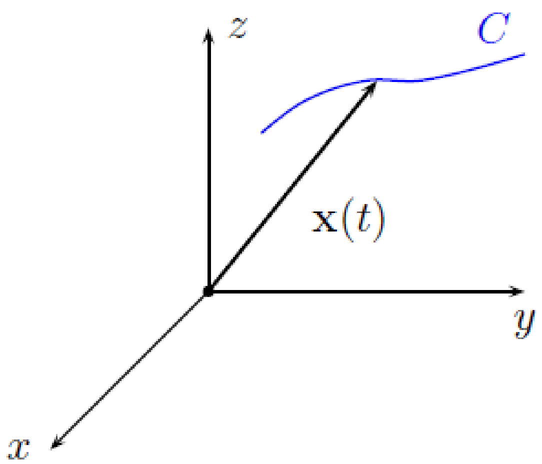
3. YÜZEYLER VE EĞRİLER



Şekil-Uzay eğrisi

Eğer bir *C* uzay eğrisi söz konusu ise eğrinin üzerindeki noktaların koordinatları tek bir eğri parametresi adı verilen bir değişkenin *(t)* fonksiyonu olan üç koordinat *x(t), y(t), z(t)* ile tanımlanır. *C* uzay eğrisi yer vektörü x(*t*), ile genel olarak

$$\mathrm{x}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

ifade edilebilir.

Eğrinin *(t)* parametresi yerine yay uzunluğu *s* kullanılabilir. Bu durumda yer vektörü,

$$\mathrm{x}(s) = x(s)\,\boldsymbol{i} + y(s)\,\boldsymbol{j} + z(s)\,\boldsymbol{k}$$

olur.

Eğer bir yüzey söz konusu ise yüzey üzerindeki noktaların koordinatları (u,v gibi) iki parametreye bağlı olarak

$$X = X(u,v),\ \ Y=Y(u,v)\ ,\ \ Z=Z(u,v)$$

olarak ifade edilebilir.

Üç boyutlu (x,y,z) uzay dik koordinat sisteminde bir yüzey kapalı, açık ve parametrik olmak üzere üç farklı biçimde gösterilebilir.

1) $f(x,y,z) = 0$ (Kapalı)
2) $z = f(x,y)$ (Açık)

u ve v şeklinde iki yüzey parametresi ile yüzeyin herhangi bir noktasının (x,y,z) üç boyutlu dik koordinatları ;

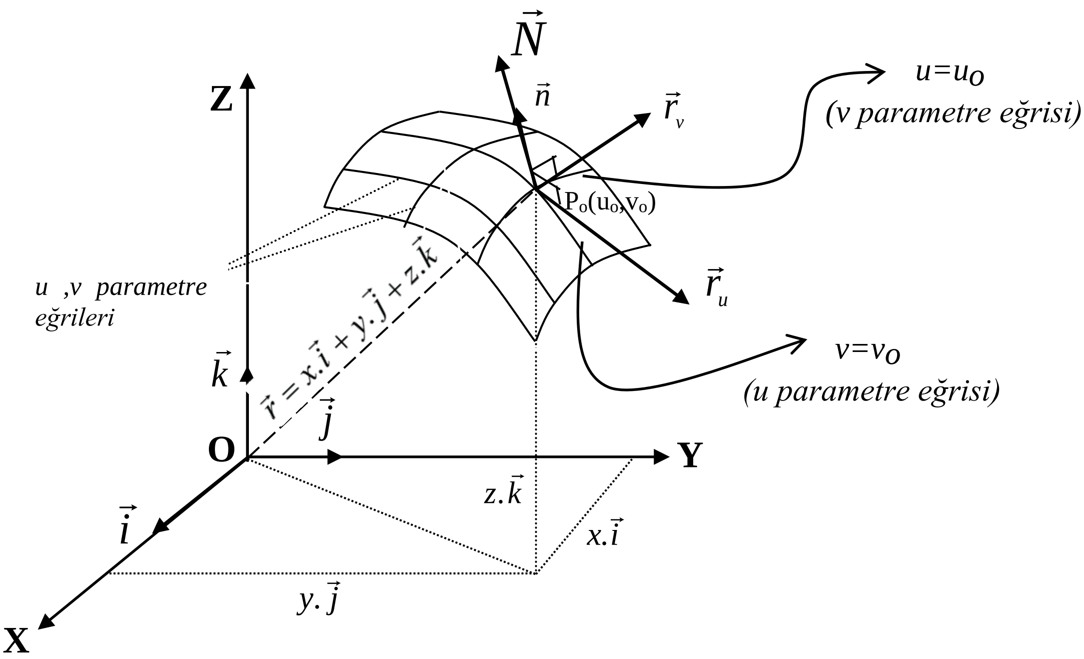
3) $$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}\right\}\ \text{Parametrik}$$

şeklindede gösterilebilir. Bu gösterim tarzına "Gauss parametrik gösterimi" de denir. Herhangi bir yüzey yerine dönel elipsoid alınırsa yüzey parametresi olarak B coğrafi enlemi ve L coğrafi boylamı seçersek

$$\left.\begin{aligned} x &= x(B,L) = N \cos B \cos L \\ y &= y(B,L) = N \cos B \sin L \\ z &= z(B,L) = N\,(1-e^2)\sin B \end{aligned}\right\}\quad \text{elipsoidin parametrik denklemi elde edilir.}$$

Benzer şekilde kürenin φ coğrafi enlemi ve λ coğrafi boylamı cinsinden parametrik denklemini elde etmek için, kürenin elipsoidin özel hali olduğu dikkate alınarak, elipsoid için verilen eşitliklerde B yerine φ, L yerine λ, N eğrilik yarıçapı yerine R küre yarıçapı ve eksentirisite yerine $e^2 = 0$ alınarak;

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varphi,\lambda) = R \cos\varphi \cos\lambda \\ y &= y(\varphi,\lambda) = R \cos\varphi \sin\lambda \\ z &= z(\varphi,\lambda) = R \sin\varphi \end{aligned}\right\}\quad \text{kürenin parametrik denklemleri kurulur.}$$



Şekil-Yüzeyin parametrik gösterimi

Burada; $\overrightarrow{OP_o} = \overrightarrow{r} = x\ i + y\ j + z\ k$: yarıçap vektörüdür (yer vektörü); $\overrightarrow{r}$ yer vektörünün skaler değeri (normu); $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir. Burada (x,y,z) P noktasının dik koordinatlarını, (i,j,k) ise x,y,z doğrultularındaki birim vektörlerdir. Yani,

$$|i| = |j| = |k| = 1 \quad , \quad i.j = i.k = j.k = 0 \quad , \qquad i.i = j.j = k.k = 1$$

Yüzeyin bir P_o noktasındaki parametre eğrileri boyunca yüzey teğetlerini elde etmek için r yer vektörünün P_o noktasında türevleri alınır.

u eğrisinin $u = u_o$ noktasındaki teğeti $\overrightarrow{r_u}$

$$\overrightarrow{r_u} = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)_o = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right).\ i + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right).\ j + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).k = x_u\ .\ i + y_u\ .j + z_u\ .\ k$$

v eğrisinin $v = v_o$ noktasındaki teğeti $\overrightarrow{r_v}$

$$\overrightarrow{r_v} = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)_o = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right).\ i + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right).\ j + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right).k = x_v\ .\ i + y_v\ .\ j + z_v\ .\ k$$

şeklinde olur.

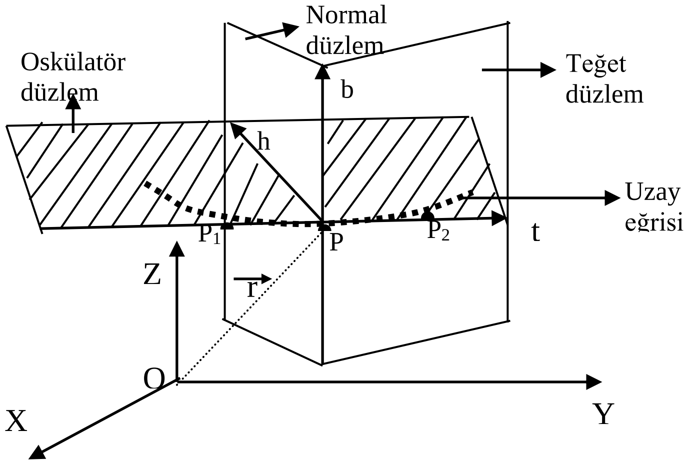
$\vec{r_u}$ *ve* $\vec{r_v}$ vektörlerinin vektörel çarpımı bu noktadaki yüzey normalini verir. P_o noktasındaki yüzey normali ;

$$\vec{N} = \vec{r_u} \times \vec{r_v} \quad \text{dir.}$$

3.1 UZAY EĞRİLERİ

Eğer koordinatlar bir *t* parametresine bağlı ise *t* nin değişmesi ile yüzey üzerinde bir eğri meydana gelir.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$



$|t| = |h| = |b| = 1$

t : Teğet vektör
h : Asal normal vektör
b : Binormal vektör

Şekil- Uzay eğrisi, Oskülatör, Teğet ve Normal Düzlemler

Burada eğrinin yer vektörü $\vec{r} = x(t)i + y(t)j + z(t)\,k$ dir. Herhangi bir uzay eğrisinin P teğet noktası için aşağıdaki düzlem ve vektör tanımlamaları yapılabilir.

Uzay eğrisi üzerinde birbirine çok yakın P_1, P ve P_2 noktalarından geçen düzleme "*oskülatör düzlem*" ,eğrinin P noktasındaki teğetini içeren oskülatör düzleme dik düzleme "*teğet düzlem*" denir. Teğet ve oskülatör düzlemlere dik olan ve P den geçen düzleme "*normal düzlem*" denir. Normal düzlemle teğet düzlemin ara kesiti *binormal vektörü (b)*,normal düzlem ile oskülatör düzlemin arakesiti *asal normal vektörü (h)*, (*t*) ise eğrinin oskülatör düzlem üzerindeki *teğet vektörü*dür.

t, b ve h vektörlerine ek üçlü adı verilir.

$\vec{r}(s) = x(s).\vec{i} + y(s).\vec{j} + z(s).\vec{k}$ (s, yay uzunluğunu parametre olarak alırsak)

$\vec{t}$ teğet vektörü $\vec{r}$ yer vektörünün türevine eşittir.

$\vec{t} = \vec{r'} = \frac{dr(s)}{ds}$ = **Error! Error!** $\vec{}$ +**Error! Error!**+**Error! Error!**

Asal normal birim vektörü ise teğet vektörün birim vektörüne eşittir.

$$h = \frac{t'}{|t'|} = \frac{r''}{|r''|} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}i + \frac{d^2y}{ds^2}j + \frac{d^2z}{ds^2}k}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}}$$

$$b = t \, x \, h = r' \, x \, \frac{r''}{|r''|}$$

3.2 I. DERECEDEN TEMEL BÜYÜKLÜKLER E , F , G

Koordinatları $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n$ olan n boyutlu bir koordinat sisteminde en genel yay elemanı formülü;

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \, dq_i \, dq_j$$

biçimindedir.

$i \neq j$ iken $h_{ij} = 0$ ise q_i = değişken ile q_j = değişken çizgileri birbirini dik açıyla keser.

$i = j$ iken $h_{ii} = h_{jj} = 1$ ise q_i ve q_j değişken koordinat çizgileri doğrusaldır.

Herhangi bir yüzey üzerinde birbirine çok yakın iki nokta arasındaki yay uzunluğu için ;

dik koordinatlar türünden ;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

eşitliği yazılabilir.

Koordinatları *u, v* yüzey parametreleri cinsinden yazar,

$$x = x(u,v) \quad , \qquad y = y(u,v) \quad , \qquad z = z(u,v)$$

ve gerekli türevleri alırsak

$$dx^2 = (x_u\ d_u + x_v\, d_v)^2 \qquad x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$dy^2 = (y_u\, d_u + y_v\, d_v)^2 \qquad y_u = \frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$dz^2 = (z_u\, d_u + y_v\, d_v)^2 \qquad z_u = \frac{\partial z}{\partial u} \quad , \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = (x_u\ d_u + x_v\, d_v)^2 + (y_u\, d_u + y_v\, d_v)^2 + (z_u\, d_u + y_v\, d_v)^2$$

$$ds^2 = \underbrace{(x_u^{\,2} + y_u^{\,2} + z_u^{\,2})}_{E} du^2 + \underbrace{(x_u\, x_v + y_u\, y_v + z_u\, z_v)}_{F} 2du\, dv + \underbrace{(x_v^{\,2} + y_v^{\,2} + z_v^{\,2})}_{G} dv^2$$

I = ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 **I. temel form**

E, F , G büyüklükleri I. derece temel büyüklükler olup, yeryüzündeki bir nokta için sabit olup ancak yüzey değişirse değişirler.

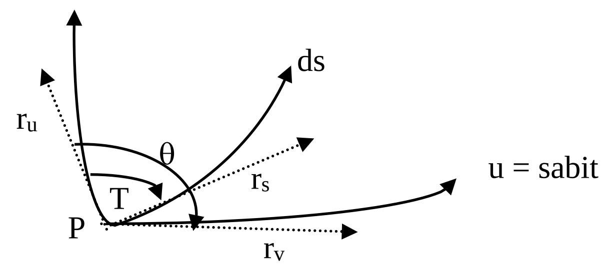
E = $|r_u|^2$ (E, r_u ´nun modülünün karesine eşittir.)
G = $|r_v|^2$ (G, r_v ´nin " " ")

F = $r_u\ r_v$ (F, r_u ve r_v vektörlerinin skaler çarpımına eşittir.)

Buradan, $|r_u| = \sqrt{E}$ ve $|r_v| = \sqrt{G}$ olur.

Parametre Eğrileri Arasındaki Açı

u ve *v* parametre eğrileri arasındaki θ açısı bu eğrilerin kesim noktasındaki çizilen ve aynı zamanda yüzeye de teğet olan teğet vektörler arasındaki açıdır. Söz konusu θ açısı teğet vektörler r_u ve r_v nin skaler çarpımından aşağıdaki şekilde bulunur.



Şekil-Parametre eğrileri arasındaki açı

$\vec{r_u}\,\vec{r_v} = |r_u|\,|r_v|\cos\theta$ ($\vec{r_u}$ ve $\vec{r_v}$ vektörlerinin skaler çarpımı)

$$\cos\theta = \frac{r_u r_v}{|r_u|\,|r_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$u \perp v$ ise $\theta = 90°$ ve $\cos\theta = 0$ olur ve dolayısıyla $F = 0$ dır.

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}} = \frac{W^*}{\sqrt{EG}}$$

$W^* = \sqrt{EG-F^2}$ (I. temel formun diskriminant formülü)

T Açısının Değerini Veren Formüller:

Herhangi bir parametre eğrisi örneğin yukarıdaki şekilde *u (v = sabit)* eğrisiyle bir yüzey eğrisi arasındaki T açısı da yine teğet vektörlerin skaler çarpımından bulunur. *s* parametreli yüzey eğrisinin teğet vektörü $r_s = \dfrac{dr}{ds}$ birim vektördür.

$\vec{r_u}\ \vec{r_s} = |r_u|\,|r_s| \cos T$

$\cos T = \dfrac{r_u r_s}{|r_u|\,|r_s|}$ $|r_u| = \sqrt{E}$ $|r_s| = 1$ olacağından

$\cos T = \dfrac{r_u r_s}{\sqrt{E}}$ olur. Diğer yandan *r* yer vektörü $r = r\,\{u(s),v(s)\}$ şeklinde yay uzunluğunun fonksiyonu olarak yazarsak r_s nin değeri,

$\dfrac{dr}{ds} = r_s = \dfrac{\partial r}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial r}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} = r_u\dfrac{du}{ds} + r_v\dfrac{dv}{ds}$ olur. Buradan $r_u\ r_s$ çarpımını teşkil edersek,

$$r_u\ r_s = r_u\, r_u \frac{du}{ds} + r_u\, r_v \frac{dv}{ds}$$

$r_u\ r_s = E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds}$ olur. Bu değeri açı eşitliğinde yerine koyarsak

$$\cos T = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}ds} \qquad \sin T = \frac{\sqrt{EG-F^2}\,dv}{\sqrt{E}ds} \qquad \tan T = \frac{\sqrt{EG-F^2}\,dv}{Edu+Fdv}$$

eşitlikleri çıkar. Parametre eğrileri ortogonal ise $F = 0$ olacağından açı değerleri,

$$\cos T = \frac{\sqrt{E}du}{ds} = \frac{ds_{(u)}}{ds} \qquad \sin T = \frac{\sqrt{G}dv}{ds} = \frac{ds_{(v)}}{ds} \qquad \tan T = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du} = \frac{ds_{(v)}}{ds_{(u)}}$$

olur.

Yüzey Normali

Yüzeyin bir noktasındaki normal vektörü, bu noktadaki yüzeyin teğet düzlemine diktir. Öte yandan bir yüzey noktasındaki teğet düzlem içindeki herhangi iki vektöre dik olan vektör teğet düzlemine de diktir. O halde böyle bir vektör o noktada yüzey normalidir. Bir yüzey noktasındaki parametre eğrilerinin teğet vektörleri yüzeye de o noktada teğettir, yani o noktadaki teğet düzlem içindedir. Bu durumda bir noktasında parametre eğrilerinin teğet vektörlerine dik olan vektör o noktadaki yüzey normalidir. İki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlere dik bir vektör oluşturur. O halde bir yüzey noktasındaki yüzey normali, bu noktada parametre eğrilerinin teğet vektörlerinin vektörel çarpımı ile oluşan bir vektördür. Böylece yüzey normali

$\vec{N} = \vec{r_u} \times \vec{r_v}$ (x işareti vektörel çarpımı göstermektedir)

olur ve normal vektörü doğrultusundaki birim vektör bu vektörü skaler değerine bölmekle elde edilir birim vektöre $\vec{n}$ denilirse ;

$$\vec{n} = \frac{N}{|N|} = \frac{r_u x r_v}{|r_u x r_v|} = \frac{r_u x r_v}{\sqrt{(r_u x r_v)^2}}$$

diğer taraftan $\sqrt{(r_u x r_v)^2}$ = $|r_u \ x \ r_V| = |r_u|\,|r_V| \sin\theta$

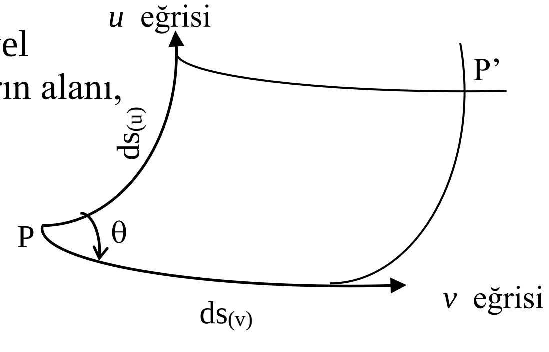
$(r_u x r_v)^2$ = E G - $F^2 = W^{*2}$ elde edilir. Böylece normal doğrultusundaki birim vektör

$$\vec{n} = \frac{r_u x r_v}{W^*} \quad \text{olur.}$$

Yüzey Alan Elemanı

Diferansiyel anlamda alan elemanı olarak parametre eğrilerini $ds_{(u)}$ ve $ds_{(v)}$ diferansiyel yay elemanlarının oluşturduğu paralel kenarın alanı,

$$df = ds_{(u)}\, ds_{(v)} \sin\theta$$



$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{EG-F^2}{EG}} = \dfrac{W^*}{\sqrt{EG}}$ değeri yerine konursa

$ds_{(u)} = \sqrt{E}$ du ve $ds_{(v)} = \sqrt{G}$ dv

df = $\sqrt{EG-F^2}$ du dv = W* du dv

W* = $|\, r_u \ x \ r_v \,|$ olduğu dikkate alınırsa alan elemanı

df = $|\, r_u \ x \ r_v \,|$ du dv olur.

3.3 EĞRİLİK

Düzlemde bir y = f (x) eğrisinin eğriliği,

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

şeklinde hesaplanır. Burada κ eğriliği, R eğrilik yarıçapını, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ve $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevleri göstermektedir. Eğrinin bir $P_o(x_o,y_o)$ noktasındaki eğriliği, eğrilik formülünde P_o noktasının koordinatları yerine yazılmak suretiyle

$\kappa = \dfrac{1}{R} = \dfrac{y_o''}{(1+y_o'^2)^{3/2}}$ hesaplanır. Geometrik olarak eğrinin bir noktasındaki eğriliği, teğet noktada eğriye diferansiyel anlamda uyan çemberin yarıçapının tersidir. Öyle ki teğet noktada bu çemberin eğimi ve eğriliği y = f (x) eğrisinin eğimi ve eğriliğine eşittir.

Soru: Düzlemde denklemi $y = x^3 - 2x^2 + 2$ olan eğrinin $(x_0 = 1)$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Cevap:

$y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'_0 = -1$

$y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''_0 = 2$

$\kappa = \dfrac{2}{(1+1^2)^{3/2}} = 0.707106$

$R = 1.41421$

Soru: Düzlemde denklemi $y = x^3 - 2x^2 + 2$ olan eğrinin $(x_0 = 3)$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Cevap:

$y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'_0 = 15$

$y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''_0 = 14$

$\kappa = \dfrac{2}{(1+1^2)^{3/2}} = 0{,}00412$

$R = 242{,}680$

YÜZEY EĞRİSİNDE EĞRİLİK

Bir yüzey eğrisinin teğet vektörü t ile gösterilir ve eğriyi veren parametre yay uzunluğu olarak alınırsa

$$\frac{dr(s)}{ds} = r_s = r' = t \quad ve \ |t| = 1$$

$$t = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}$$ ya da başka bir gösterimle

$$t = \frac{dr}{ds} = r' = r_u u' + r_v v'$$ olur.

$$|t| = \sqrt{(t)^2} = 1$$

$t^2 = 1$ olur. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$2\,t\,\frac{dt}{ds} = 0 \quad , t\,t' = 0$$ olur.

$$t = \frac{dr}{ds} = r'$$ olduğuna göre

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} = r''$$

$r'r'' = t\,t' = 0$ elde edilir.

İki vektörün skaler çarpımının sıfır olması için bu iki vektörün birbirlerine dik ya da vektörlerden birinin sıfır olması gerekmektedir. O halde t ve t' vektörlerinin birbirlerine dik oldukları ortaya çıkmaktadır. Eğrinin bir noktasındaki teğete dik olan t' özel vektörüne *"asal normal" ya da eğrilik vektörü* denir. Asal normal vektörü birim vektör değildir. Bu vektör doğrultusundaki birim vektör h ile gösterilirse, κ skaler bir sayı olmak üzere

$t' = r'' = \kappa\, h$ yazılabilir.

Bu eşitlikte κ, s ye bağlı bir fonksiyondur ve uzay eğrisinin eğriliği adını alır. Eğrilik aynı zamanda bir eğrinin küçük bir alanda bir doğrudan sapmasını gösterir.

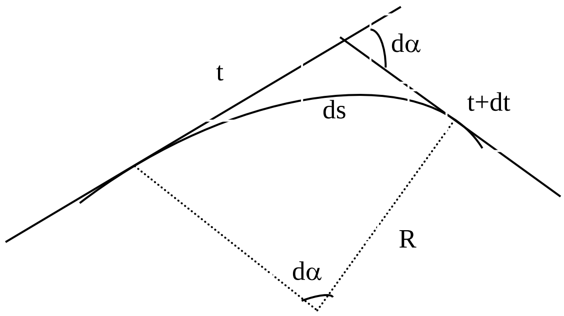
Eğriliğin geometrik yorumunu yapmak için eğri üzerinde birbirine diferansiyel anlamda yakın iki nokta alınır. Bu noktadaki teğetler t ve $t + dt$ ve aralarındaki açı $d\alpha$ olmak üzere

$$\frac{dt}{ds} = \kappa\, h$$

$/t\ t\ /=1$ ve $/t\ h\ /= 0$ olduğundan

$\kappa = \dfrac{d\alpha}{ds}$ eğrilik ve

$R = 1 / \kappa = \dfrac{ds}{d\alpha}$ eğrilik yarıçapıdır.



3.4 II. DERECEDEN TEMEL BÜYÜKLÜKLER $\overline{L}$, $\overline{M}, \overline{N}$

Bir yüzey eğrisinin teğeti, o noktada yüzeye de teğet olduğu için yüzey normaline diktir. O halde,

$n\ t = 0$ *(skaler çarpım)*

$n\ x\ t = 1$ *(vektörel çarpım)*

olur. birinci eşitliğin s' ye göre türevi alınırsa ,

Error!$t + n$ **Error!**$= 0$ *ve* $t = r' = \dfrac{dr}{ds}$ olmak üzere ,

Error!$\dfrac{dr}{ds} + n\ \dfrac{d^2r}{ds^2} = 0$ elde edilir.

$n= n(u,v)$ olmak üzere n, u ve v parametrelerine bağlı olduğu için

Error! $= \dfrac{\partial n}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial n}{\partial v}\dfrac{dv}{ds}$

ve aynı şekilde,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

bu değerleri **Error!**$\dfrac{dr}{ds} + n\ \dfrac{d^2r}{ds^2} = 0$ eşitliğinde yerine koyarsak

$$\left(\frac{\partial n}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) + n\ \frac{d^2r}{ds^2} = 0$$

yukarıdaki eşitliğin son terimindeki ikinci türev yerine $\frac{d^2 r}{ds^2} = \kappa\, h$ yazarsak

$$n_u\ r_u \frac{du^2}{ds^2} + (n_u\ r_v + n_v\ r_u) \frac{dudv}{ds^2} + n_v\ r_v \frac{dv^2}{ds^2} + \kappa\, n\, h = 0$$

$$\kappa\, n\, h = \frac{-n_u r_u du^2 - (n_u r_v + n_v r_u)dudv - n_v r_v dv^2}{ds^2}$$

eşitliğin paydası I.temel form olup payına da II. temel form dersek,

$$\text{II. Temel Form} = -n_u r_u du^2 - (n_u r_v + n_v r_u)dudv - n_v r_v dv^2$$

$$\text{II. Temel Form} = \overline{L}\, du^2 + 2\overline{M}\ dudv + \overline{N}\, dv^2$$

olur. Burada ikinci derece temel büyüklükler olan ; $\overline{L}$, $\overline{M}$ ve $\overline{N}$ nin değerleri aşağıdaki gibi determinantlardan da hesaplanabilir.

$$\overline{L} = -n_u\, r_u = n\, r_{uu} = \frac{r_u r_v r_{uu}}{W^*} = \frac{1}{W^*}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}$$

$$\overline{M} = -1/2\ (n_u\, r_v + n_v\, r_u\,) = \text{n } \text{r}_{\text{uv}} = \frac{r_u r_v r_{uv}}{W^*} = \frac{1}{W^*}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}$$

$$\overline{N} = -n_v\, r_v = n\, r_{vv} = \frac{r_u r_v r_{vv}}{W^*} = \frac{1}{W^*}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}$$

$$\kappa\, n\, h = \frac{\overline{L}du^2 + 2\overline{M}dudv + \overline{N}dv^2}{ds^2}$$

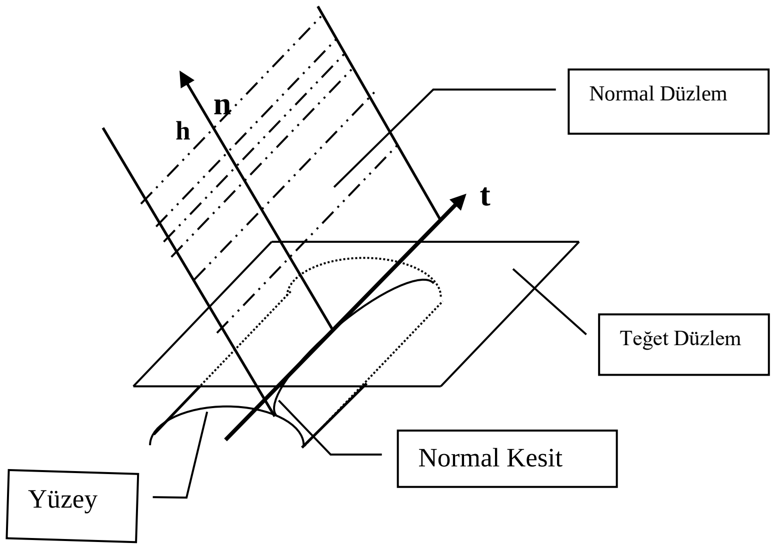
$$\kappa\, n\, h = \frac{II.Temel\ Form}{I.Temel\ Form}$$

burada ,

κ : yüzey eğrisinin bir noktasındaki eğriliği
h : yüzeyin asal normalindeki birim vektör
n : o noktadaki yüzey normalinin birim vektörüdür.

3.5 NORMAL KESİT VE EĞİK KESİT

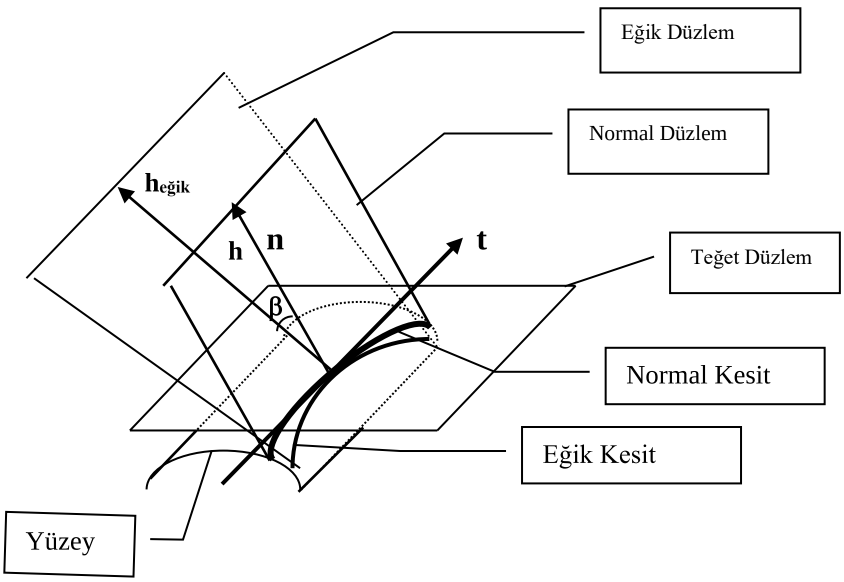
Yüzeyin bir noktasındaki normalinden sonsuz düzlem geçer. Bu düzlemlerin yüzey ile arakesitlerine *normal kesit* denir.



Burada; *N* hem yüzeyin normalidir,hem de normal kesitin asal normalidir. *n ve h* çakışınca
$\beta = 0$ ve $\cos 0 = 1$ dir. Buradan normal eğrilik , $n \equiv h$ ve $n\,h = 1$

$$\kappa_{NOR} = \frac{1}{R_{NOR}} = \textbf{Error!}$$

şeklinde II. temel formun I.temel forma oranlanmasıyla elde edilir.



Şekil- Normal ve Eğik Kesit

Yüzey normalini içermeyen düzlemlerin yüzey ile arakesitlerine *eğik kesit* denir. Aşağıdaki şekilde bir yüzey üzerinde normal kesit ile eğik kesit bir arada gösterilmektedir.

Eğik düzlemle normal düzlem arasındaki açı β ise

$$\kappa\, n\, h = \kappa\ |n|\ |h|\ cos\ \beta = \kappa\ \ cos\ \beta = \textbf{Error!}$$

n ve h birim vektörler olduğu için çarpımları bire eşit olur.

$$\kappa\ \ cos\ \beta = \frac{1}{r}\ \cos\beta = \frac{1}{R_{NOR}}$$

R_{NOR} : Normal kesitin eğrilik yarıçapı
r : eğik kesitin eğrilik yarıçapı

$r = R_{NOR} \cos\ \beta$ Eğik kesitle normal kesitin eğrilik yarıçapları arasındaki bağıntı (Meusnier teoremi)

Yüzey Eğriliği

Bir yüzeyin herhangi bir noktasındaki eğrilik söz konusu olduğunda; o noktadan yüzey normalini içeren sonsuz sayıda düzlem geçer bu düzlemlerle yüzeyin ara kesitleri yine sonsuz sayıda normal kesit eğrileri (NKE) oluşturur. Birer düzlem eğri olan NKE lerin eğrilikleri bulundukları düzlemin doğrultusuna göre farklı değerler alırlar. Ancak bunların içinde öyle iki NKE vardır ki bunların birinde eğrilik en küçük diğerinde eğrilik en büyüktür. Bunlara ananormal kesit eğrileri, eğriliklerine de ana eğrilikler denir ve eğrilik yarıçapları R_{min} ve R_{max} ile gösterilirse yüzey eğriliği için aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

1) Gauss Eğrilik Ölçütü (K) :
Bir yüzey noktasındaki eğrilik ölçütü K, Gauss'a göre R_{min} ve R_{max} anaeğrilik yarıçapı olmak üzere;

$$K = \frac{1}{R_{min}\, R_{max}} \quad \text{olur.}$$

2)Ortalama Eğrilik (H) :
Bir yüzey noktasındaki iki ana eğriliğin ortalamasıdır.

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{min}} + \frac{1}{R_{max}}\right)$$

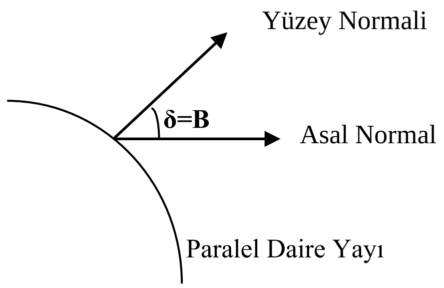
3.6 JEODEZİK EĞRİ

Jeodezik eğri; Jeodezik eğriliği sıfır olan bir yüzey eğrisidir. Jeodezik eğrinin belli bir bölgede tanımlanması gerekir. Jeodezik eğrinin ana normalleri her noktada yüzey normalleri ile çakışır. İki nokta arasındaki en kısa yol jeodezik eğridir(Jeodezik eğrinin küre üzerindeki karşılığı büyük daire yayı ve düzlem üzerindeki karşılığı da iki noktayı birleştiren doğrudur). Bu tanımın yanında; Jeodezik eğri, her noktasında jeodezik eğriliği sıfır olan yüzey eğrisi olarak da tanımlanır.

Jeodezik Eğrinin Özellikleri:

1-Jeodezik eğrinin jeodezik eğriliği sıfıra eşittir.
2-Her noktasında asal normal ile yüzey normali çakışır.
3-Bir yüzey üzerindeki iki nokta arasında en kısa yol jeodezik eğridir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Yani iki noktayı birleştiren her jeodezik eğri en kısa yol değildir. Bunun için jeodezik eğrinin sınırlı bir bölgede tanımlanması gerekir.
4-Yüzey üzerindeki bir noktadan verilen bir teğet doğrultuda yalnız bir jeodezik eğri vardır.

Elipsoid üzerinde, meridyen yayları, ekvator yayları birer jeodezik eğridir.Ancak paralel daire yayları birer jeodezik eğri değildirler. Çünkü paralel daire üzerindeki bir noktada yüzey normali ile asal normal çakışmaz aralarında B enlemi kadar açı farkı olur.



Jeodezik eğriliği gösteren κ_j yerine sıfır konursa jeodezik eğrinin diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\kappa_j = -\frac{dA}{ds} - \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}\cos A - \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\sin A = 0$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{d\sqrt{E}}{dv}\cos A - \frac{d\sqrt{G}}{du}\sin A\right)$$

Küre yüzeyinde jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri;

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos A}{\sqrt{E}} = \frac{\cos A}{R}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin A}{\sqrt{G}} = \frac{\sin A}{R\cos\varphi}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R}\tan\varphi \sin A$$ şeklindedir.

Bu eşitliklerin oranlanmasından,

$$\frac{dA}{d\varphi} = \tan\varphi \tan\lambda$$

$$\frac{dA}{d\lambda} = \sin\varphi$$ denklemleri elde edilir.

Elipsoid yüzeyinde jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri;

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N\cos B}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{N}\tan B \sin A$$ şeklindedi r.

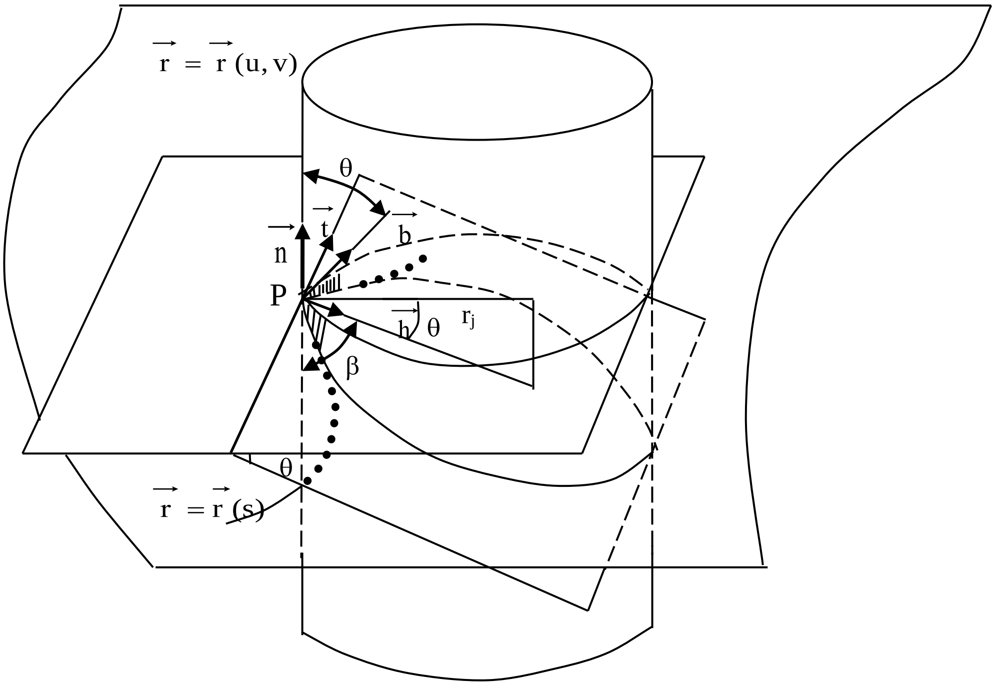
Bu eşitliklerin oranlanmasından,

$$\frac{dA}{dB} = \frac{M}{N}\tan B \tan A = \frac{t}{V^2}\tan A$$

$$\frac{dA}{dL} = \sin B$$ denklemleri elde edilir.

3.7 JEODEZİK EĞRİLİK

Bir yüzey eğrisinin bir noktasında, sonsuz küçük bir kesiminin o noktada yüzeye teğet düzleme dik izdüşümünün eğriliğine *jeodezik eğrilik* denir. jeodezik eğriliğin diferansiyel denklemi değişik yollardan bulunabilir. Örneğin yüzey eğrisine, bir noktasında teğet ve o noktada yüzey teğet düzlemine dik bir silindir geçirilirse, silindirin yüzey teğet düzlemi ile diferansiyel anlamda arakesiti olan eğrinin eğriliği, yüzey eğrisinin jeodezik eğriliğidir.

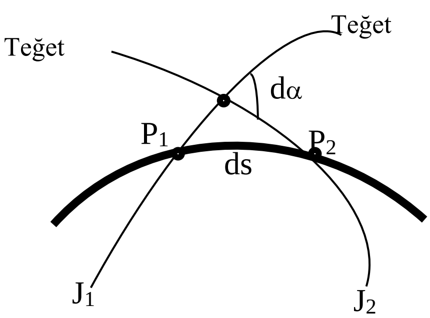


şekilde;

r_j : yüzey eğrisinin jeodezik eğrilik yarıçapı
r : yüzey eğrisinin eğrilik yarıçapı
$\vec{h}$: yüzey eğrisinin asal normal birim vektörü
$\vec{b}$: yüzey eğrisinin binormal birim vektörü
$\vec{n}$: yüzey normali birim vektörüdür.

Jeodezik eğrilik şu şekilde de tanımlanabilir: yüzey üzerinde bulunan bir eğrinin jeodezik eğriliği birbirine diferansiyel anlamda (çok yakın) P_1 ve P_2 gibi iki noktada eğriye çizilen teğetler P_1J_1 ve P_2J_2 jeodezik eğrileri arasındaki $d\alpha$ açısı ve ds yayı yardımıyla tanımlanır. Eğrilik formülü,

$$\kappa_j = \frac{d\alpha}{ds}$$ dır.



Eğik kesitle normal kesit eğrilik yarıçapları arasındaki ilişkiyi veren Meusnier formülünden

$r = R.\cos\beta$

yazılabilir.

yüzey normaline dik olan izdüşüm eğrisi asal normali ile yüzey eğrisi asal normali (*b* ile *n* vektörü) arasındaki açı θ

$\theta + \beta = 90^o \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^o - \theta$

yine Meusnier formülünden

$r = R\cos(90^o - \theta) = R\sin\theta$ olur.

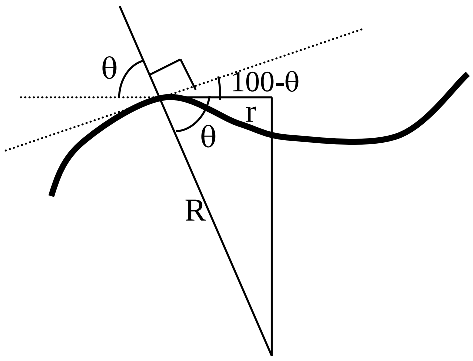
Yüzey eğrisinin binormal birim vektörü *b*, asal normal birim vektörü *h* ya dik olduğundan, iki vektörün skaler çarpımından aralarındaki açı,

$\cos\theta = b\,n$ elde edilir.

Yüzey eğrisi ile bunun aynı zamanda normal kesit eğrisi olan izdüşüm eğrisinin eğrilik yarıçapları arasında Meusnier formülünden,

$r = r_j.\cos\theta$ eşitliği yazılabilir. Buradan jeodezik eğrilik,

$\kappa_j = \frac{1}{r_j} = \frac{1}{r}\cos\theta$ olur.



yüzey eğrisinin eğriliği,

$\kappa = \frac{1}{r}$

olmak üzere

$\kappa_j = \kappa\ \cos\theta$

$\kappa_j = \kappa\ b\,n$

elde edilir.

Diğer taraftan yer vektörünün ikinci türevi,

$\frac{d^2r}{ds^2} = r'' = \kappa\,h$ eşitliği $t = r'$ ile soldan vektörel çarpılırsa,

$t \times h = b$

$r' \times r'' = \kappa\,(t \times h) = \kappa\,b$

elde edilir ve bu vektör eşitliğinin de *n* ile skaler çarpımından

$$\kappa_j = \kappa\, b\, n = (\, r' x\, r'')n$$

bulunur ve *n* yerine değeri yazılırsa, jeodezik eğrilik

$$\kappa_j = (r' \times r'').n = \frac{1}{W^*}(r' \times r'').(r_u \times r_v) = \frac{1}{W^*}\begin{vmatrix} r' r_u & r' r_v \\ r'' r_u & r'' r_v \end{vmatrix}$$

yukarıdaki gibi olur. Burada;

$$r' = r_u u' + r_v v'$$
$$r'' = r_{uu}(u')^2 + r_{vv}(v')^2 + 2 r_{uv} u'v' + r_u u'' + r_v v''$$

u ve *v* parametrelerin dik ve *v = sabit* (*u* parametre eğrisi) ile *ds* yüzey eğrisinin yaptığı açı T olmak üzere jeodezik eğrilik

$$\kappa_j = \frac{dT}{ds} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sin T - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos T\right) \text{ olur.}$$

u ve *v* parametrelerinin ortogonal oldukları dikkate alınarak bu parametre eğrilerin jeodezik eğrilikleri

u parametre eğrisi (v = sabit, T = 0)

$$\kappa_{ju} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

v parametre eğrisi (u = sabit, T = 90°)

$$\kappa_{jv} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

κ_{ju} ve κ_{jv} parametre eğrilerinin jeodezik eğriliklerinden yararlanarak bir yüzey eğrisinin jeodezik eğriliği

$$\kappa_j = \kappa_{ju}\cos T + \kappa_{jv}\sin T + \frac{\partial T}{\partial s} \text{ olur.}$$

u, v parametreleri yerine coğrafi koordinatlar kullanıldığında küre ve elipsoid üzerinde değişik yüzey eğrilerinin eğrilikleri aşağıda tablo halinde verilmiştir.

	Küre	Elipsoid
Coğrafi koord. (*enlem, boylam*)	φ, λ	B, L
Yay uzunluğu	$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2\varphi . d\lambda^2$	$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B . dL^2$
I. derece temel büyüklükler (E,F,G)	$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2 . \cos^2\varphi$	$E = M^2,\ F = 0,\ G = N^2 . \cos^2 B$
u = enlem parametre eğrisinin jeodezik eğriliği ve eğrilik yarıçapı	$\kappa_{j\varphi} = 0$ (R sabit) $r_{j\varphi} = \infty$	$\kappa_{jB} = 0$ $r_{jB} = \infty$
v = boylam parametre eğrisinin jeodezik eğriliği ve eğrilik yarıçapı	$\kappa_{j\lambda} = -\frac{1}{R}\tan\varphi$ $r_{j\lambda} = R \cot\varphi$	$\kappa_{jL} = -\frac{\tan B}{N}$ $r_{jL} = \frac{N}{\tan B}$
u = enlem parametre eğrisiyle A açısı yapan yüzey eğrisinin jeodezik eğriliği	$\kappa_j = -\frac{1}{R}\tan\varphi . \sin A + \frac{dA}{ds}$	$\kappa_j = -\frac{1}{N}\tan B . \sin A + \frac{dA}{ds}$
u = enlem parametre eğrisiyle A açısı yapan jeodezik eğrinin diferansiyel denklemi $\kappa_j = 0$	$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R}\tan\varphi . \sin A$	$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{N}\tan B . \sin A$

3.8 CLAİRAUT DENKLEMİ

Dönel elipsoidde enleme bağlı olarak herhangi bir paralel dairenin yarıçapı, $r_B = N\cos B$ dir. Burada N meridyene dik doğrultudaki eğrilik yarıçapıdır.

$$N = \frac{c}{V} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}}$$

r_B nin B ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{dr_B}{dB} = -\frac{N}{V^2}\sin B = -M\sin B$$

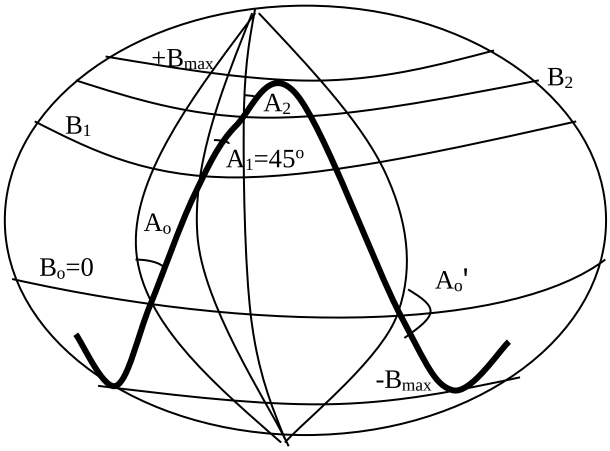
$$dr_B = -M \sin B\, dB$$

$$\tan A = \frac{N\cos B\, dL}{MdB} = \frac{r_B\, dL}{MdB}$$

$$dr_B = -\sin B r_B \cot A\, dL \quad \text{olur.}$$

sinB yerine $\frac{dA}{dL}$ konursa

$$dr_B = -r_B \cot A\, dA$$



$$\frac{dr_B}{r_B} = -r_B \cot A\, dA$$

$$\int \frac{dr_B}{r_B} = \int \frac{-\cos A}{\sin A} dA$$

$$\ln r_B = -\ln \sin A + \ln k$$

$$\ln r_B = \ln \frac{k}{\sin A} \Rightarrow r_B = \frac{k}{\sin A} \quad \text{ya da} \quad k = r_B \sin A$$

eşitliği elde edilir. Yani dönel elipsoid de jeodezik eğrinin bir noktasında, meridyenle yaptığı açının sinüsü ile o noktadaki paralel daire yarıçapının çarpımı, jeodezik eğrinin her noktasında sabittir. Örneğin ekvatorda meridyenle A açısı yapan bir jeodezik eğri kuzeye doğru gittikçe paralel daire yarıçapı küçüleceğinden eğrinin meridyenle yapacağı A açısı giderek büyüyecektir. A açısının kuzeyde alacağı en büyük değer A = 90° olacaktır. Güneyde de A açısının en büyük değeri A =270° olacaktır. Bu noktalarda jeodezik eğri dönüş yaparak kuzeyden güneye ve güneyden kuzeye zıt işaretli iki paralel daire arasında sinüzoidal bir yüzey eğrisi çizer.

Örnek: Elipsoid üzerinde enlemi $B_1 = 30^o$ olan bir noktadan geçen ve meridyenle $A_1 = 45^o$ açı yapan bir jeodezik eğrinin;B_2 =35° enlemi ile ekvatorda meridyenle yaptığı açıları bulunuz.Söz konusu jeodezik eğrinin güney ve kuzey yarı kürelerde dönüş yaptığı noktaların B_{max} enlemlerini bulunuz.

Çözüm:

a) $B_1 = 30^o$ ve $A_1 = 45^o$ için k sabiti

$$k = r_{30} \sin 45^o = N_{30} \cos 30^o \sin 45^o = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 30^o}} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 3909235.438\,\text{m}$$

B_2 =35° enleminde meridyenle yaptığı açı,

$$k = r_{35} \sin A_2 \Rightarrow \sin A_2 = \frac{k}{r_{35}} = \frac{r_{30} \sin 45^o}{r_{35}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{N_{30} \cos 30^o}{N_{35} \cos 35^o}$$

$$A_2 = 48^o36305773 = 48^o 21' 47.01''$$

B = 0° enleminde(ekvator) meridyenle yaptığı açı,

r_o = a olur.

$$\sin A_0 = \frac{k}{a}$$

$$A_0 = 37^o 79859536 = 37^o 47' 54.94''$$

$$A_0' = 142^o 2014046 = 142^o 12' 05.06$$

b) jeodezik eğrinin dönüş yaptığı B_{max} enlemi ise

$A = 90^o$ olacağından

$$k = r_{Bmax} \sin 90^o \text{ ise } k = r_{Bmax} = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_{max}}} \cos B_{max}$$

$$\cos B_{max} = \pm \frac{k}{\sqrt{c^2 - e'^2 k^2}} = 0.6115967918 \quad \Rightarrow B_{max} = \pm 52^o 17' 41.82'' \quad \text{olarak bulunur.}$$