

Jeodezi-II

Elipsoid Yüzeyinde Uygulamalar

Prof. Dr. Sebahattin BEKTAŞ

SAMSUN – 2021

ÖNSÖZ

Jeodezi-II kitabı, Üniversitelerin Mühendislik Fakültelerinin Harita (Geomatik) Mühendisliği Bölümlerinde gösterilen Jeodezi, Koordinat sistemleri adı altında okutulan derslere yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu kitap her ne kadar öğrenciler için düşünülüp hazırlanmışsa da direkt ya da dolaylı olarak jeodezi (haritacılık) faaliyetlerinde bulunacaklar için sürekli bir başvuru kaynağı olarak da kullanılabileceği ümit edilmektedir.

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinde ve ölçme aletlerindeki gelişmeler jeodezide çığır açmıştır. Özellikle GNSS teknolojisi sayesinde yüksek doğruluk ve hızda, noktaların direkt konumları belirlenebilmektedir. Önceleri hesaplamalardaki güçlükler nedeniyle yeğlenen grafik ve yaklaşık çözümler, bilgisayarın sağladığı geniş, hızlı ve doğru işlem yapma yeteneklerinden dolayı yerlerini kesin çözüm yöntemlerine bırakmıştır. Böylelikle jeodezik hesaplamalar gerçeğe daha yakın bir biçimde yapılabilmektedir.

Kitap 7 bölümden oluşturulmuştur. Kitap da sırasıyla; Elips, Yüzeyler ve Eğriler, Harita projeksiyonları, Elipsoidde jeodezik uygulamalar, Elipsoidin düzleme Gauss-Krüger projeksiyonu, Haritalardan yararlanma ve Üç boyutlu Jeodezi konuları teorik açıklamalı ve sayısal uygulamalı olarak verilmiştir.

Kitabın konuyla ilgilenecekler yararlı olmasını diler, basımda emeği geçenlere teşekkür ederim.

Eylül, 2021-Samsun

Prof. Dr. Sebahattin BEKTAŞ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
2. ELİPS ve ELİPSOİD GEOMETRİSİ	2
2.1 Dünya Elipsoidinin Boyutlarının Belirlenmesi.....	5
2.2 Elipsoidal Coğrafi Koordinatlar	10
2.3 Elipsoidde Enlem Çeşitleri:.....	14
2.4 Elipsoid Üzerinde Bazı Büyüklüklerin Hesabı.....	17
3. YÜZEYLER VE EĞRİLER	27
3.1 Uzay Eğrileri.....	30
3.2 I. Dereceden Temel Büyüklükler E, F, G	31
3.3 Eğrilik.....	35
3.4 II. Dereceden Temel Büyüklükler $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$	37
3.5 Normal Kesit Ve Eğik Kesit	39
3.6 Jeodezik Eğri.....	41
3.7 Jeodezik Eğrilik.....	42
3.8 Clairaut Denklemi.....	46
4. ELİPSOİD YÜZEYİNDE UYGULAMALAR	49
4.1 Elipsoidde I. Dereceden Temel Büyüklükler	50
4.2 Elipsoidde II. Dereceden Temel Büyüklükler	55
4.1 Gauss eğrilik yarıçapı.....	57
4.1 Elipsoidde Yerine Kürenin Kullanılması	59
5. ELİPSOİDDE JEODEZİK HESAPLAMALAR	157
7.1. Dönel Elipsoidin Yerleştirilmesi ve Yöneltilmesi.....	157
7.2. Elipsoid Yüzeyine İzdüşümler.....	158
. Ölçülerin Elipsoid Yüzeyine İndirgenmesi.....	159
8.1. Yatay Doğrultuların Elipsoid Yüzeyine İndirgenmesi.....	160
8.2. Uzunlukların Elipsoid Yüzeyine İndirgenmesi.....	163
8.3.. Elipsoidde Üçgen Hesabı.....	169
8.4. Elipsoidal Koordinat Sistemleri.....	170
8.4.1. Elipsoidal Jeodezik Dik Koordinat Sistemi.....	170
8.5. Elipsoidal Coğrafi Koordinatlarla Temel Ödev Hesapları.....	174
8.6. Elipsoid Yüzeyinde Jeodezik Dik Koordinatlarla Temel Ödev Çözümleri...	179
8.7. Küresel Hesaplamalarla Elipsoidde Temel Ödev Çözümleri.....	184
6. ELİPSOİDİN DÜZLEME GAUSS-KRÜGER PROJeksiYONU	187
9.1. Gauss-Krüger Projeksiyonunda Yaklaşma Açısı.....	187
9.2. Coğrafi Koordinatlardan Gauss-Krüger Koordinatlarının Eldesi	188
9.3. Harita Paftalarının Bölümlemesi ve Pafta Köşe Noktalarının Koordinatlarının Bulunması.....	191
9.4. Gauss-Krüger Koordinatlarından Coğrafi Koordinatların Bulunması.....	194
9.5. Gauss-Krüger Projeksiyon Yüzeyinde Hesaplamalar.....	196
9.6. Ölçülerin Gauss-Krüger Projeksiyon Yüzeyine İndirgenmesi.....	196
9.7. UTM Projeksiyonu	200
9.7.1. Değiştirilmiş UTM Projeksiyonu	204
9.8. Gauss-Krüger Projeksiyonunda Komşu Dilimler Arasında Koordinat Dönüşümü.....	205
Haritalardan Yararlanma.....	205

7. ÜÇ BOYUTLU JEODEZİ ve GPS	209
10.1. Üç Boyutlu Jeodezi.....	210
10.1.1 Global ve Yerel Dik Koordinat Sistemi ve Aralarında Dönüşümler.....	212
10.2. Uydu Jeodezisi Sistemleri.....	216
10.2.1. GPS Küresel Konumlama Sistemi.....	216
10.2.2. GPS Koordinatlarından Ülke Koordinatlarına Dönüşüm.....	219
20.2.3. GPS Yüksekliklerinden Ortometrik Yüksekliklerin Eldesi.....	222
KAYNAKLAR	225

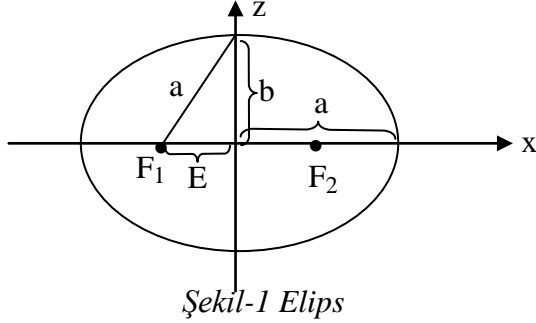
1.GİRİŞ

Yeryüzünün şekli olarak alınan jeoidin ölçme ve hesaplamalar için uygun bir yüzey olmaması nedeniyle bilim adamları yeryüzünün gerçek şekline uygun yeni geometrik yüzey arayışlarına yönelmiş bu nedenle üç eksenli (Triaxial) elipsoid ve hatta meridyen kesiti elipsoidden biraz farklı dönel şekiller denenmiştir. Şüphesiz triaxial elipsoid (3 eksenli elipsoid) dönel elipsoidden yeryuvarına daha iyi model olur. Fakat dönel elipsoidden farklı olarak seçilen yüzeylerle pratiğe yarar sağlayacak bir neticeye ulaşılamamıştır. Sonuç olarak dönel elipsoidin jeoide en uygun düzgün geometrik şekil olduğu bir kez daha ortaya çıkmıştır.

Bu nedenle jeodezik uygulamalarda ölçme ve hesaplamalara kolaylık sağlayan geometrik yüzeyler kullanılır. Söz konusu geometrik yüzeyler sırasıyla; dönel elipsoid, küre ve düzlemdir. Çok büyük alanların (ülkeleri, kıtaları kapsayan alanların) ölçülmesinde dönel elipsoid referans (dayanak) yüzeyi olarak kullanılır.

Konuya altlık oluşturması açısından önce elips daha sonra elipsoid geometrileri ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

2. ELİPS ve ELİPSOİD GEOMETRİSİ



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{Elips denklemi}$$

Elips: Tanım olarak F_1 ve F_2 gibi iki odak noktasına uzaklıkları sabit olan noktaların geometrik yeri olarak tanımlanır. Bir elips, büyük ve küçük yarı eksen uzaklıkları olan a ve b ile tanımlanır.

Bir elipsin basıklığı

$$f = \alpha = \frac{a-b}{a}$$

Şeklinde hesaplanır

Elipsin doğrusal dış merkezliği E , odak noktasının elipsin merkezine olan uzaklığıdır. Dolayısıyla ;

$$E =$$

E ile 1.eksentrisite (dış merkezlik) e^2 ve 2.eksentrisite e'^2

$$e^2 = E^2 / a^2$$

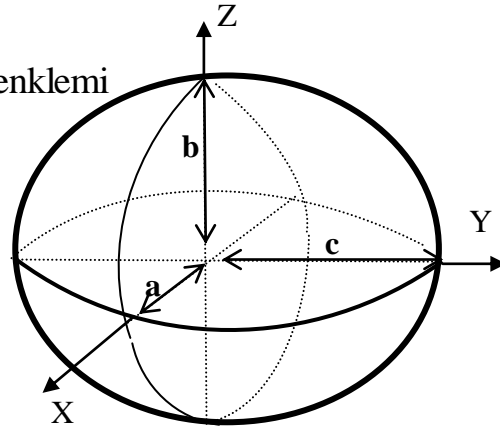
$$e'^2 = E^2 / b^2$$

olarak ifade edilir. Elips geometrik şekillerden çemberin genel durumudur. Diğer bir deyişle elipsin özel bir durumu çemberdir. Elipsin yarı eksenlerinin birbirine eşit olması ($a = b$) durumunda elips bir çembere dönüşür ve çemberin yarıçapı ($R = a = b$) elipsin yarı eksen uzunluğu olur.

Elipsoid

Elipsoid dendiğinde, üç yarı eksenli elipsoidi (*Genel Elipsoid, Triaxial Elipsoid*) anlamalıyız. Elipsoid deyimi aslında merkezi üç boyutlu bir dik koordinat sisteminin (XYZ) orjininde, X eksen yönünde yarı eksen uzunluğu a , Y eksen yönünde yarı eksen uzunluğu c ve Z eksen yönünde yarı eksen uzunluğu b olan ve denklemi aşağıdaki gibi olan kapalı düzgün bir şekildir (şekil-2).

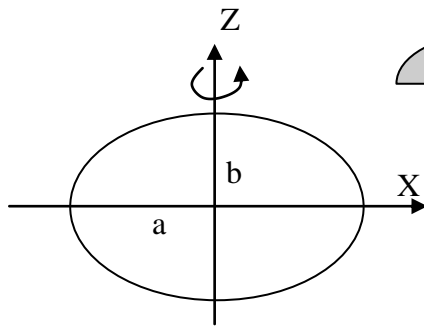
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{Genel Elipsoid Denklemi}$$



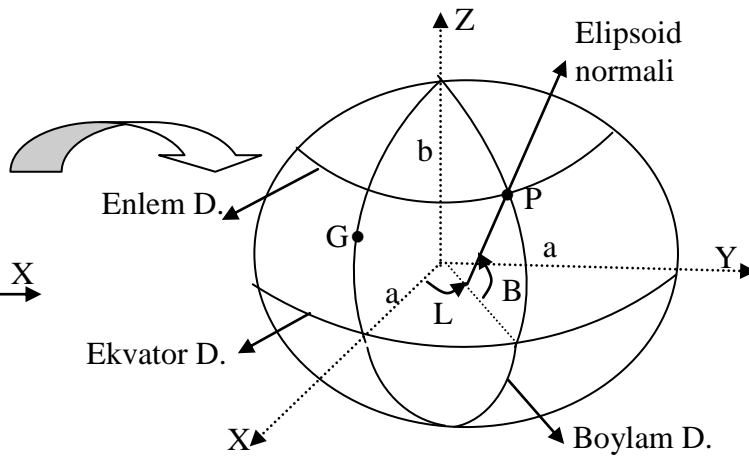
Şekil-2 Elipsoid

Dönel Elipsoid

Jeodezide kullanılan dönel elipsoid, bir elipsin (meridyen elipsinin) (şekil-3) düşey Z eksenini (küçük yarı eksenini) etrafında 180° döndürülmesiyle elde edildiğinden X ve Y eksenleri boyunca yarı eksen uzunlukları birbirine ($a = c$) eşit olur (şekil-4). Elipsoid üç boyutlu geometrik kapalı şekillerden kürenin genel bir halidir. Diğer bir deyişle küre elipsoidin özel bir halidir ($a = b = c = R$).



Şekil-3 Elips



Şekil-4 Dönel Elipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{Dönel elipsoidin denklemi}$$

Dönel elipsoid jeodezik uygulamalarda çokça kullanıldığından dolayıdır ki dönel elipsoid kavramı yerine sadece elipsoid kelimesinin kullanıldığını görmekteyiz.

Elipsoid Parametreleri: Dönel elipsoid, meridyen elipsinin verilmesiyle tanımlanır. Meridyen elipsi de a büyük yarı eksen, b küçük yarı eksen

değerlerinin verilmesiyle belirlenir. Yarı eksen uzunluklarının her ikisinin verilmesiyle elipsin (elipsoidin) büyüklüğü ve şekli belirli olur. Aşağıdaki parametreler elipsin sadece şeklini belirler. Bunlar; Elipsoidin basıklığı (f ya da α), birinci eksentrisite (e^2) ve ikinci eksentrisite (e'^2) dir. Buradan bir elipsin büyüklüğünün belirlenebilmesi için en az bir yarı eksen uzunluğunun, elipsin şeklinin belirlenebilmesi için basıklık veya eksentrisitelerden herhangi birinin bilinmesinin ya da hesaplanabilmesinin yeterli olduğu ortaya çıkar.

$$f = \alpha = \frac{a - b}{a};$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$

Elips geometrisinden kaynaklanan nedenlerden dolayı elips ve elipsoid ile ilgili çoğu hesaplamalar kapalı formüllerle yapılamaz uygun sayısal teknikler kullanmak suretiyle yeteri doğruluk veren yaklaşık hesaplama yöntemlerine başvurulur. Bu yöntemlerden biride seriye açma yöntemidir. Basıklık ve eksentrisite değerlerinin 1 den küçük sifıra oldukça yakın sayısal değerler olmaları itibariyle bunlara dayanan seri açılımları hemen yakınsar,serilerin ilk birkaç terimiyle yetinilmesi halinde bile amaçlanan doğruluk elde edilir.

Eksentrisiteler ve yarı eksenler arasındaki diğer ilişkiler aşağıdaki gibidir ;

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{e}{e'} = 1 - \alpha$$

$$c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 + e'^2} = \frac{b}{1 - e^2} = b(1 + e'^2) = \frac{a}{1 - \alpha}$$

c : kutup noktasındaki meridyen eğrilik yarıçapı

Elipsoid üzerinde eğrilik ve eğrilik yarıçapı bulunulan enleme göre değiştiği gibi aynı zamanda doğrultuya göre de değişmektedir. Yani elipsoid üzerinde bir P noktasındaki eğrilik eğrilik ve eğrilik yarıçapı değeri sabit olmayıp bakılan

doğrultuya göre değişik değerler almaktadır. Bunun tek istisnası Kuzey ve Güney kutup noktalarıdır. Bu noktalarda eğrilik yarıçapı doğrultudan bağımsız olup sabit “ $c = a^2 / b$ ” ye eşittir.

DÜNYA ELİPSOİDİNİN BOYUTLARININ BELİRLENMESİ

Dünya elipsoidinin büyüklüğü ve basıklığının belirleme yöntemleri iki ana grupta toplanabilir. Bunlar geometrik yöntem ve dinamik yöntemdir. Geometrik yöntemde yer üzerinde yapılan yay boyu ölçümlerinden ve astronomik gözlemlerden yararlanır. Dinamik yöntem ise sarkaç veya gravimetri aletleri yardımıyla yapılan yer çekimi ölçülerine dayanır. Karalarda olduğu kadar denizlerde ve havada da gravite ölçüleri yapılabildiğinden dinamik yöntem daha pratik ve daha doğru sonuçlar verir. Ancak dinamik yöntemle yalnız elipsoidin basıklık değeri bulunabilir.

a) Geometrik Yöntem

Dünya elipsoidinin (dönel elipsoidin) büyüklüğünün ve şeklinin belirlenebilmesi için meridyen elipsinin (elipsoidin dönme ekseninden geçen bir düzlemle arakesiti) belirlenmesi yeterlidir. Bir elipsin belirlenmesi büyük ve küçük yarı eksenlerinin (a, b) bilinmesi ya da bir yarı eksenle elipsin şeklini veren basıklık (f) ya da eksentrisitenin (e^2 veya e'^2) bilinmesiyle mümkündür. Dünyayı temsil edecek bir elipsoid için bu ölçüleri direkt olarak yapmak mümkün değildir. Pratikte bu boyut belirleme işlemi için aynı meridyen elipsi üzerinde iki yay boyu ΔS_1 ve ΔS_2 ölçülür ve bu yayların uçlarındaki elips normalleri arasındaki açılar ΔB_1 ve ΔB_2 bilinirse ΔS_1 ve ΔS_2 küçük elips yayları, yaklaşık daire yayları olarak alınırsa, meridyen yönünde eğrilik yarıçapları M_1 ve M_2

$$M_1 = \frac{\Delta S_1}{\Delta B_1} \rho \quad M_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta B_2} \rho$$

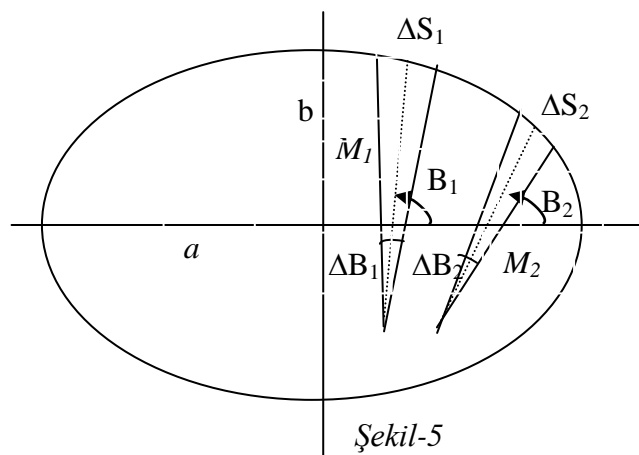
eşitliklerinden hesaplanabilir(Şekil-5).

Diğer taraftan meridyen elipsininin eksentrisitesi

$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ olmak üzere

$$M_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^{3/2}}$$

$$M_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_2)^{3/2}}$$



Şekil-5

Yukarıdaki M_1, M_2 denklemlerinden e^2

$$e^2 = \frac{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} - 1}{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} \sin^2 B_1 - \sin^2 B_2}$$

şeklinde çekilir ve daha sonra örneğin bulunan e^2 değeri örneğin M_1 denkleminde yerine konarak a değeri ve istenirse $b = a\sqrt{1 - e^2}$ eşitliğinden de b değeri hesaplanır. Yukarıdaki şekildeki B_1 ve B_2 enlemleri ilgili yayların orta noktalarının elipsoidal enlemleridir. B_1 ve B_2 enlemleri astronomik gözlemlerle belirlenir.

Görüldüğü gibi meridyen elipsinin boyutlarını belirlemek için bir çift yay ölçüsü yeterlidir. Eğer yerin şekli gerçekten bir dönel elipsoid olsaydı, ayrı ayrı yay çiftlerinden hesaplanacak a, b değerleri ölçülerin doğruluk dereceleriyle orantılı farklılıklar gösterecektir. Oysa yerin değişik kesimlerinde yapılan yay ölçüleri çiftlerinden elde edilen a, b değerlerinde ölçü hatalarıyla açıklanamayacak büyüklükte farklar çıkmıştır. Buradan yerin gerçek şeklinin elipsoid olmadığı ortaya çıkmıştır ve bunu ilk defa ünlü jeodezi bilgini Helmert ileri sürmüştür. Bu konuda diğer bir önemli kanıtta çekül sapmalarıdır. Bilindiği gibi çekül sapması bir yer noktasında elipsoid normali ile çekül doğrultusu (jeoid normali) arasındaki açıdır. Yapılan jeodezik ve astronomik ölçüler elipsoid normallerinin çekül doğrultusunda olmadığını göstermiştir. Yerin gerçek şeklinin (jeoidin) tam bir dönel elipsoid olmayışı bilim adamlarını yeni arayışlara itmiş bu nedenle üç eksenli elipsoid (üç eksenli bir elipsoid tartışmasız olarak geometrik açıdan dünyaya dönel elipsoidten daha iyi uyum sağlar) ve hatta meridyen kesiti elipsten biraz farklı dönel şekiller denenmiş ancak pratiğe yarar sağlayacak bir sonuca ulaşamamış ve sonuç olarak dönel elipsoidin jeoide en uygun düzgün geometrik şekil olduğu bir kez daha ortaya çıkmıştır.

Örnek: Dünya elipsoidinin boyutlarının belirlenmesine yönelik olarak iki farklı enlemde yay boyu ölçümleri yapılmış ve ölçü değerleri aşağıda verilmiştir. Elipsoidin boyutlarını (a, b), basıklığını (f) ve eksentrisite (e^2, e'^2) değerlerini bulunuz.

Enlem(B)	1° lik yay boyu (ΔS)
$B_1=30^\circ$	$\Delta S_1= 110\ 848.129\text{m}$
$B_2=45^\circ$	$\Delta S_2= 111\ 128.610\text{m}$

Çözüm:

Önce B_1 ve B_2 enlemlerindeki meridyen yönündeki eğrilik yarıçaplarını M_1 ve M_2 yi bulalım

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = 1^\circ$$

$$M_1 = \frac{\Delta S_1}{\Delta B_1} \rho = 6351129.959\text{m}$$

$$M_2 = \frac{\Delta S_2}{\Delta B_2} \rho = 6367200.337\text{m}$$

I.eksentrisite değeri e^2

$$e^2 = \frac{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} - 1}{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} \sin^2 B_1 - \sin^2 B_2} = 0.006721999$$

büyük yarıksen a

$$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B_1)^{3/2}} \quad \text{den çekilirse}$$

$$a = \frac{M_1(1-e^2 \sin^2 B_1)^{3/2}}{(1-e^2)} = 6377\,999.996\text{m}$$

küçük yarıksen b

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 6356\,527.396\text{m}$$

Geometrik basıklık f

$$f = \frac{a-b}{a} = 1/297.0296979 = 0.003366666$$

II.eksentrisite değeri e'^2

$$e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2 = 0.00676749$$

b) Dinamik Yöntem

1602'de Galile basit sarkacı inceleyerek modern mekaniğin temelini oluşturan

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ilişisini buldu. Yani l uzunluğunda bir sarkacın T salınım süresi gözlenerek herhangi bir yerin g yerçekimi

$$g = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 l$$

hesaplanabilecektir. Yerçekimi ivmesi birimi cm/s^2 olup Galile isminin anısına “Gal” denmiştir ($1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$).

Yeryüzü üzerindeki her nokta iki kuvvetin etkisi altındadır. Bunlardan birisi merkezkaç kuvveti, diğeri ise yerin çekim kuvvetidir. Bu iki kuvvetin bileşkesi o noktadaki gravite değeridir. Merkezkaç kuvveti, kutuplarda sıfır olup en büyük değerini aldığı ekvatorda bile yerçekiminin 0,0035 i kadardır. Bu değer yaklaşık $0,0339 \text{ m/s}^2$ dir. Merkezkaç kuvveti olmasa bile kutupların, yerin merkezine yaklaşık 21 km daha yakın olması dolayısı ile yerçekimi ekvatordakinden daha büyüktür. Bu iki kuvvetin bileşkesi olan gravite de dolayısı ile ekvatordan kutuplara doğru artmaktadır.

Clairaut, coğrafi enlemlerle gravite arasındaki ilişkiyi

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \phi - \beta' \sin^2 2\phi)$$

formülü ile verilmiştir. Burada;

g : herhangi bir ϕ enlemindeki gravite

g_0 : ekvatordaki gravite

β : dinamik basıklık = $\frac{g_{90} - g_0}{g_0}$

α : geometrik basıklık = $\frac{a - b}{a}$

g_{90} : kutuptaki gravite

β' : sabit bir sayı

Geometrik basıklıkla dinamik basıklık arasındaki ilişkiyi 1743 yılında Clairaut

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \frac{w^2 a}{g_0}$$

olarak verilmiştir. Burada ;

w : yerin açısal hızı ,

a : büyük yarı eksen uzunluğu,

$w^2 a$ değeri ekvatordaki merkezkaç kuvvetidir.

Yeryüzü üzerinde çeşitli enlemlerde ölçülen gravite değerlerinden yukarıda verilen formüller yardımı ile geometrik basıklık α

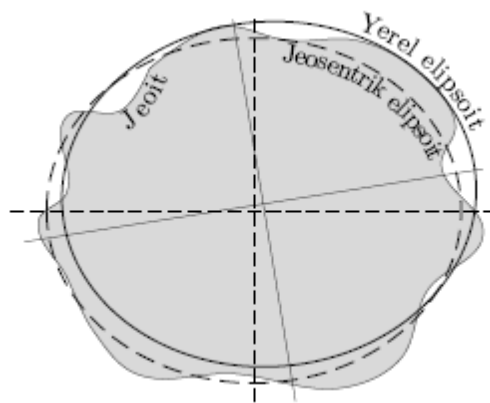
$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{w^2 a}{g_0} - \beta$$

şeklinde hesaplanabilir.

Böylece yeryuvarı boyutlarının saptanmasında jeodezik ve astronomik ölçülerin yanında fiziksel ölçülerin de birlikte düşünülmesi ilkesinin gereği ortaya çıkmıştır. Başlangıçta yavaş bir ilerleme gösteren ve yalnız sarkaçta kalan gravite ölçülerinde teorik çalışmaların derinleştirilmesi, aletlerin geliştirilmesi ile presizyon yükseltilebilmiştir. Pratikte genellikle gravite farklarını ölçmek daha kolaydır. Bunun için gravitesi belli olan bir noktada bir sarkacın salınım süresi gözlenip, yeni noktalarda da aynı gözlem yapılarak salınım süresi farklarından gravite farkları hesaplanmıştır. Bu değerlerin birbirleri ile karşılaştırılabilmesi için hepsinin belli bir noktaya bağlanmış olması gerekir. Bu nokta Avrupa'da Potsdam 'daki jeodezi enstitüsündedir. Bu noktanın mutlak gravite değeri Helmert yönetiminde on yıllık ölçülerden hesaplanmıştır. Yani Paris'teki uluslararası metre, uzunluk ölçülerinde ne anlama geliyorsa, Potsdam'daki gravite değeri de gravite ölçüleri için aynı anlamı taşımaktadır. Sarkaçların yanısıra başka ilkelere göre çalışan gravimetre aletleri yapılmıştır. Bu aletlerle 0,01 miligal inceliğinde gravite değerleri elde etmek mümkün olup arazi çalışmalarında kolaylık sağlayacak şekilde küçük ve hafif yapılmışlardır.

Referans Elipsoidi

Referans elipsoidi iki yaklaşım vardır. Bunlardan biri yeryuvarının tamamını temsil eden *ortalama yer elipsoidi(jeosentrik elipsoid)* diğeri ise *yerel elipsoid* dir. Ortalama yer elipsoidinin merkezi dünyanın ağırlık merkezi ile çakışır. Ünlü jeodezi bilgini Helmert seçilecek böyle bir ortalama yer elipsoidi ile jeoid arasındaki farkların $\pm 100m$ den fazla olamayacağını ileri sürmüştür.



Şekil- Jeosentrik elipsoid ve yerel elipsoid

Günümüze kadar dünya için pek çok ortalama yer elipsoidi tanımlanmıştır. Teknolojideki ilerlemeye paralel olarak gelişen jeodezik ölçüm ve değerlendirme teknikleri sayesinde dünya için daha gerçekçi elipsoid

parametreleri saptanmıştır. Tarihsel süreç içinde tanımlanan elipsoidlere örnek olarak: Delambre (1810), Airy (1830), Bessel Elipsoidi 1841, Hayford Elipsoidi 1910, Krassowsky Elipsoidi 1940, GRS80 Elipsoidi, WGS84 Elipsoidi sayılabilir. Bunlardan en çok kullanılan Hayford Elipsoidi (International-Uluslararası Elipsoid) dir. Ülkemizde de temel jeodezik çalışmalarda bu elipsoid kullanılmıştır. Son yıllarda GPS uygulamalarının yaygınlaşması nedeniyle ülkemizde de WGS84 elipsoidi kullanılmaya başlamıştır. Aşağıda her iki elipsoide ait parametreler tabloda verilmiştir.

Parametreler		Hayford Elipsoidi	WGS84 Elipsoidi
Büyük yarıksen	a	6 378 388m	6 378 137.0000m
Küçük yarıksen	b	6 356 911.94613m	6 356 752.3141m
Kutup noktası meridyen eğrilik yarıçapı	c	6 399 936.60811m	6 399 593.6258m
Basıklık	f, α	1 / 297 = 0.00336703367	1 / 298.257223563 =0.0033528106
I.eksentrisite	e^2	0.00672 26700 22333	0.00669437999013
II.eksentrisite	e'^2	0.00676 81701 97224	0.00673949674227

Ülkelerarası ya da kıtalararası büyük çaplı jeodezik faaliyetlerde hep ortalama yer elipsoidleri kullanılır. Klasik jeodezik faaliyetlerde ise Türkiye’de olduğu gibi her ülke jeodezik datumunu (ED50) kendi yerel elipsoidinde tanımlamıştır.

Elipsoidal Coğrafi Koordinatlar

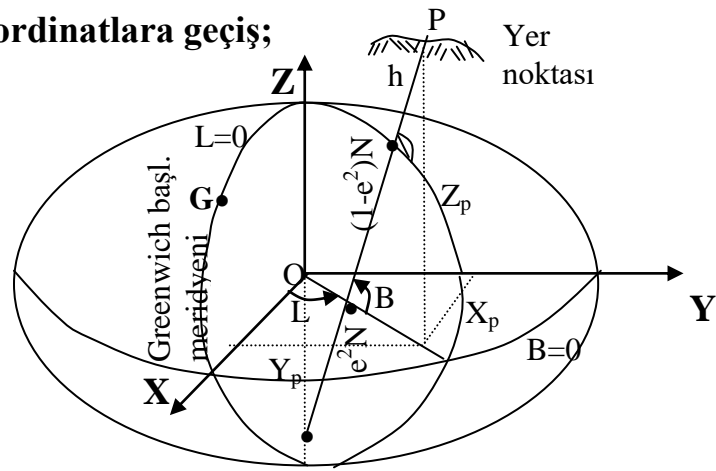
Elipsoidal coğrafi koordinatlar (B,L,h) ve Elipsoidal üç boyutlu dik koordinatlar (X,Y,Z), elipsoidin merkezine yerleştirilmiş, Z eksenini dönme eksenine paralel bir (XYZ) üç boyutlu dik koordinat sisteminde tanımlanabilir (Şekil-6). Bu sisteme Jeosentrik (yer merkezli) dik koordinat sistemi ya da Global dik koordinat sistemi de denir. Elipsoidin XY düzlemini içeren düzleme **ekvator düzlemi**, Z dönme eksenini içeren düzlemlere de **meridyen düzlemleri** denir. P noktasındaki meridyen düzleminin, XZ düzlemi(Greenwich’ten geçen başlangıç meridyen düzlemi) ile yaptığı L açısına **elipsoidal (coğrafi) boylam** denir. Boyamlar X ekseninin pozitif yönünden itibaren doğuya doğru 0° ile $+180^\circ$ arasında, X ekseninin pozitif yönünden itibaren batıya doğru 0° ile -180° arasında değerler alır.

Elipsoidin bir P noktasındaki yüzey normalinin ekvator düzlemi ile yaptığı B açısına **elipsoidal (coğrafi) enlem** denir. Elipsoidal enlem ekvatorundan kuzeye

doğru 0° ile $+90^\circ$ arasında, ekvator'dan güneye doğru 0° ile -90° arasında değerler alır. Bu şekilde tanımlanan enlem ve boylam, elipsoid üzerinde coğrafi koordinat sistemi oluşturur. Elipsoidal coğrafi koordinatlar ile fiziksel yeryüzünde noktaların yüksekliklerini tanımlamak için de (h) **elipsoidal yüksekliğinden** yararlanır. Bir noktanın elipsoidal yüksekliği, ilgili noktadan referans elipsoidine indirilen dikin uzunluğudur.

Elipsoidal coğrafi koordinatlardan elipsoidal üç boyutlu dik koordinatlara geçiş;

$$(B, L, h) \Rightarrow (X, Y, Z)$$



Şekil-6 (X,Y,Z) Global dik koordinat sistemi ile (B,L,h) Elipsoidal coğrafi koordinat sistemi

Elipsoidal coğrafi koordinatlar verildiğinde Kartezyen koordinatların hesabı,

$$(B, L, h) \Rightarrow (X, Y, Z)$$

$$X = (N+h) \cos B \cos L$$

$$Y = (N+h) \cos B \sin L$$

$$Z = [(1-e^2)N+h] \sin B$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

eşitlikleri ile gerçekleştirilir. Burada; N meridyene dik doğrultudaki normal kesit eğrilik yarıçapı, e^2 ise elipsoidin I.eksentrisitesidir.

Örnek: Elipsoidal coğrafi koordinatları $B=39^\circ$, $L=40^\circ$ ve $h=1200\text{m}$ olarak verilen noktanın Kartezyen koordinatlarını hesaplayınız (Hayford elipsoidine göre).

Çözüm:
$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = 6386896.14m$$

$$X = (N+h) \cos B \cos L = 3803014.704m$$

$$Y = (N+h) \cos B \sin L = 3191108.236m$$

$$Z = [(1-e^2)N+h] \sin B = 3993138.034m$$

olarak bulunur.

Kartezyen koordinatlar verildiğinde elipsoidal coğrafi koordinatların hesabı,

$$(X, Y, Z) \Rightarrow (B, L, h)$$

Elipsoidal boylam L,

$$L = \arctan (Y / X) \quad X \geq 0$$

$$L = 180^\circ + \arctan (Y / X) \quad X < 0 \quad \text{ve} \quad Y \geq 0$$

$$L = -180^\circ + \arctan (Y / X) \quad X < 0 \quad \text{ve} \quad Y < 0$$

şeklinde hesaplanır.

Elipsoidal enlem B direkt veya iteratif olarak hesaplanabilir

i) B'nin direkt hesabı,

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} \quad f = (a - b) / a$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{Z((1-f) + e^2 \frac{a}{r})}{P} \right) \quad \text{ve}$$

$$B = \arctan \left(\frac{Z(1-f) + e^2 a \cdot \sin^3 \theta}{(1-f)(P - e^2 a \cdot \cos^3 \theta)} \right)$$

ii) B'nin iteratif hesabı (Bektaş,S.,1991)

$$B_{i+1} = \arctan \left(\frac{Z}{P - e^2 N_i \cos B_i} \right) \quad (i=0,1,2,\dots)$$

B₀ başlangıç değeri için B₀ = arctan (Z / P) değeri alınabileceği gibi her durumda sıfır olarak da alınabilir.

Elipsoidal yükseklik h,

$$h = -N + Y / (\sin L \cos B)$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek: Kartezyen koordinatları $X=3803014.704\text{m}$, $Y= 3191108.236\text{m}$ ve $Z=3993138.034\text{m}$. olarak verilen noktanın elipsoidal coğrafi koordinatlarını hesaplayınız (Hayford elipsoidine göre).

Çözüm : $L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = 40^\circ$

i) B'nin direkt hesabı,

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4964483.116\text{m} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} = 6371125.801\text{m}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z((1-f) + e^2 \frac{a}{r})}{P}\right) = 38.90514001^\circ = 38^\circ 54' 18.5''$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z(1-f) + e^2 a \sin^3 \theta}{(1-f)(P - e^2 a \cos^3 \theta)}\right) = 39^\circ$$

B'nin iteratif hesabı,

B_0 başlangıç değeri için $B_0 = \arctan (Z / P) = \arctan (0.804341145)$ değeriyle iterasyona başlanırsa

$$B_{i+1} = \arctan\left(\frac{Z}{P - e^2 N_i \cos B_i}\right) \quad (i=0,1,2,\dots)$$

$$B_0 = 38.8115161^\circ \rightarrow B_1 = 39.00050509^\circ \rightarrow B_2 = 38.99999865^\circ \rightarrow B_3 = 39^\circ$$

$B_0 = 0$ değeriyle iterasyona başlanırsa

$$B_1 = 39.05443939^\circ \rightarrow B_2 = 38.99985402^\circ \rightarrow B_3 = 39.00000039^\circ \rightarrow B_4 = 39^\circ$$

Elipsoidal yükseklik h ,

$$h = -N + Y / (\sin L \cos B) = 1200\text{m}$$

Örnek: Global dik koordinatları $X_Q=3820105.00\text{m}$ $Y_Q=3111905.00\text{m}$ $Z_Q=4036898.00\text{m}$ olan bir Q noktasının Hayford Elipsoidine göre coğrafi koordinatlarını bulunuz. Q noktasında jeoid yüksekliği $N= +5\text{m}$ olduğuna göre bu noktanın (H) ortometrik yüksekliğini bulunuz.

$$L = \arctan \frac{Y}{X} \quad \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} \quad f = (a - b)/a$$

$$Q = \arctan\left(\frac{Z\left(\frac{(1-f)+e^2\frac{a}{r}}{r}\right)}{P}\right)$$

$$h = -N + Y/(\sin L \cos B)$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z(1-f)+e^2\frac{a\sin^3 Q}{r}}{(1-f)(p-e^2\frac{a\cos^3 Q}{r})}\right)$$

Cevap:

$$L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = 39,16668818 = 39^\circ 10' 08''$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4927185,296\text{m}$$

$$r = \sqrt{P^2 + Z^2} = 6369748,849\text{m}$$

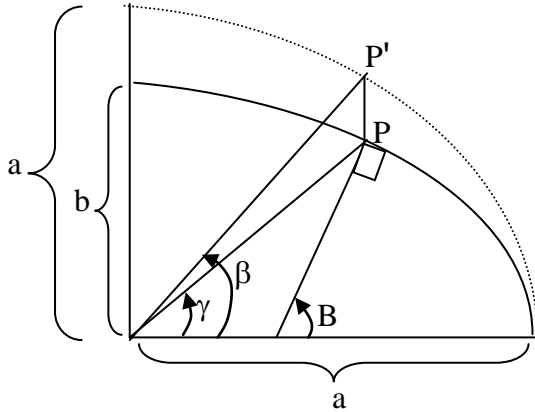
$$B = 39.51773865^\circ = 39^\circ 31' 3.85''$$

$$h = 12,894\text{m} \quad \text{elipsoidal yükseklik}$$

$$H = h - N_j = 7.894\text{m} \quad \text{ortometrik yükseklik}$$

2.3 Elipsoidde Enlem Çeşitleri:

Elipsoid üzerinde coğrafi enlemin yanında, çeşitli amaçlarla başka enlemler de tanımlanmıştır. Bunlar; coğrafi enlem (B), indirgenmiş enlem (β), jeosentrik enlem (γ) ve izometrik enlem (q) dır (şekil-7).



Şekil-7 :Bir P elipsoid noktasının farklı enlemleri yanda gösterilmektedir.

1) Coğrafi Enlem (B): Elipsoidin bir P noktasındaki yüzey normalinin ekvator düzlemi ile yaptığı açıdır.

2) İndirgenmiş Enlem (β): P elipsoid noktası, dönme eksenine paralel bir doğru ile, elipsoid ile aynı merkezli ve a yarıçaplı bir küre üzerine izdüşürülürse P' noktası elde edilir. P' noktasını merkeze birleştiren doğrunun ekvator düzlemi ile yaptığı açıdır.

3) Jeosentrik Enlem (γ): P elipsoid noktasını ile elipsoidin merkezini birleştiren doğrunun ekvator düzlemi ile yaptığı açıdır. Jeosentrik enleme merkezi enlem de denir.

4) İzometrik Enlem (q): Elipsoid üzerinde, coğrafi boylamın diferansiyel artımı dL ' ye eşit metrik diferansiyel artımı olan enleme izometrik enlem denir.

Coğrafi enleme ve izometrik enleme göre herhangi bir elipsoid eğrisinin yay elemanı

$$dS^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2 \quad (\text{coğrafi koordinatlara göre})$$

$$dS^2 = N^2 \cos^2 B (dq^2 + dL^2) \quad (\text{izometrik enleme göre})$$

şeklinde ifade edilir. O halde coğrafi koordinatlar sistemi izometrik değildir. Yani q izometrik enlemi ile L coğrafi boylamı elipsoid üzerinde $F = 0$ ve $E = G = N^2 \cos^2 B$ olan ortogonal bir parametre ağı meydana getirirler. Bunun gerçekleşmesi için izometrik enlem

$$q = \int_0^B \frac{M}{N \cos B} dB$$

integralinden hesaplanmalıdır.

Bu dört enlem arasındaki bağıntılar aşağıda verilmiştir:

$$\beta = \arctan\left(\frac{b}{a} \tan B\right) = \arctan(\sqrt{1-e^2} \tan B)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \gamma\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \tan \gamma\right)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{b^2}{a^2} \tan B\right) = \arctan((1-e^2) \tan B)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \beta\right) = \arctan(\sqrt{1-e^2} \tan \beta)$$

$$B = \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \beta\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \tan \beta\right)$$

$$B = \arctan\left(\frac{a^2}{b^2} \tan \gamma\right) = \arctan\left(\frac{1}{1-e^2} \tan \gamma\right)$$

İzometrik enleme coğrafi enlem arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$q = \arctanh(\sin B) - e \arctanh(e \sin B) \quad e = +\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$B_{i+1} = \arcsin \{ \tanh [q + e \arctanh (e \sin B_i)] \} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

İteratif hesaplama için coğrafi enlemin yaklaşık değeri $B_0 = \arcsin(\tanh q)$ alınabilir. q izometrik enleminden B coğrafi enlemini direkt olarak iterasyonsuz biçimde aşağıdaki gibi seri açılımından hesaplanabilir.

$$\chi = \arcsin(\tanh q)$$

$$B = \chi + C_2 \sin 2\chi + C_4 \sin 4\chi + C_6 \sin 6\chi + C_8 \sin 8\chi + \dots$$

Bu serideki C katsayıları ;

$$C_2 = 0.193\ 131\ 2717^\circ$$

$$C_4 = 0.000\ 379\ 7387^\circ$$

$$C_6 = 0.000\ 001\ 0239^\circ$$

$$C_8 = 0.000\ 000\ 0031^\circ$$

Bilgi : Hiperbolik fonksiyonların açık eşitlikleri aşağıda verilmiştir. ($e = 2.718281828\dots$)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

hiperbolik fonksiyonlarda argüman (x) her zaman birimsiz, radyan olmalıdır.

Örnek: Coğrafi enlemi $B=39^\circ$ olan elipsoid noktasının indirgenmiş, jeosentrik ve izometrik enlemini bulunuz (Hayford elipsodine göre).

$$e^2 = 0.006\ 722\ 670\ 022 \text{ (Hayford elipsodinin I.eksentrisitesi)}$$

$$\beta = \arctan(\sqrt{1 - e^2} \tan B) = 38^\circ 54' 19.8878''$$

$$\gamma = \arctan((1 - e^2) \tan B) = 38^\circ 48' 40.0177''$$

$$q = \arcsin(\sin B - e \sin \beta)$$

$$q = \rho^\circ \{ \arcsin(\sin B - e \sin \beta) \}$$

$$q = \rho^\circ (0.7402900835 - 0.004234474)$$

$$q = 42^\circ 10' 22.3677''$$

Örnek: İndirgenmiş enlemi $\beta = 38^\circ 54' 19.8878''$, jeosentrik enlemi $\gamma = 38^\circ 48' 40.0177''$ ve izometrik enlemi $q = 42^\circ 10' 22.3677''$ olan elipsoid noktasının B coğrafi enlemini bulunuz(Hayford elipsodine göre).

$$B = \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \beta\right) = \arctan\left(\frac{\tan \beta}{\sqrt{1 - e^2}}\right) = 39^\circ$$

$$B = \arctan\left(\frac{a^2}{b^2} \tan \gamma\right) = \arctan\left(\frac{\tan \gamma}{(1 - e^2)}\right) = 39^\circ$$

i) B coğrafi enlemin direkt hesabı $q = 42^\circ 10' 22.3677''$

$$\begin{aligned}\chi &= \arcsin(\tanh q) = 38.811199^\circ \\ B &= \chi + C_2 \sin 2\chi + C_4 \sin 4\chi + C_6 \sin 6\chi + C_8 \sin 8\chi + \dots \\ B &= \chi + 0.1931312717^\circ \sin 2\chi + 0.0003797387^\circ \sin 4\chi + \\ & 0.0000010239^\circ \sin 6\chi + 0.0000000031^\circ \sin 8\chi \\ B &= 39^\circ \text{ olarak bulunur.}\end{aligned}$$

ii) B coğrafi enleminin iteratif hesabı

$$B_{i+1} = \arcsin \{ \tanh [q + e \arcsin (e \sin B_i)] \} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

B enlemi için ilk yaklaşık değer her durumda $B_0 = q$ olarak alınabilir ve bu değerle iterasyona başlanırsa

$$B_0 = 42^\circ 10' 22.3677''$$

$$B_1 = 39.01262194^\circ \rightarrow B_2 = 39.00005138^\circ \rightarrow B_3 = 39.00000021^\circ \rightarrow$$

$$B_4 = 39.00000001^\circ$$

İstenen enlem değeri $B = 39^\circ$ olarak bulunur.

Örnek: İzometrik enlemi $q=39^\circ$ olan noktanın coğrafi enlemini bulunuz.

$$q = 39^\circ \rightarrow B_0 = 39^\circ$$

$$B_{i+1} = \arcsin \{ \tanh [q + e \arcsin (e \sin B_i)] \} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_1 = 36.49153406 \quad B_2 = 36.4807868$$

$$B_3 = 36.48073998 \quad B_4 = 36.48073978 = 36^\circ 28' 50.66''$$

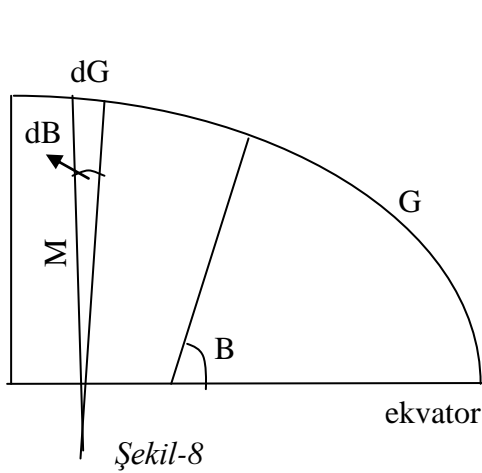
ELİPSOİD ÜZERİNDE BAZI BÜYÜKLÜKLERİN HESABI

a) Elipsoidde Meridyen Yayı Uzunluğu Hesabı

Meridyen elipsinin yay elemanı $dG = M dB$ dir. Bu ifadenin integrali alınır, ekvatordan B enlemine kadar olan G meridyen yayı elde edilir[20].

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B + \dots$$

olur. Buradaki katsayılar;



$$A' = \frac{c}{\rho} \left(1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 + \dots \right)$$

$$B' = c \left(-\frac{3}{8} e'^2 + \frac{15}{32} e'^4 - \frac{525}{1024} e'^6 + \frac{2205}{4096} e'^8 + \dots \right)$$

$$C' = c \left(-\frac{15}{256} e'^4 - \frac{105}{1024} e'^6 + \frac{2205}{16384} e'^8 - \dots \right)$$

$$D' = c \left(-\frac{35}{3072} e'^6 + \frac{315}{12288} e'^8 - \dots \right)$$

Uluslararası Hayford Elipsoidi için bu değerler;

$$A' = 111\,136.536\,655 \text{ m}^\circ$$

$$B' = -16\,107.0347 \text{ m}$$

$$C' = 16.9762 \text{ m}$$

$$D' = -0.0223 \text{ m}$$

dir. Başka elipsoidler kullanılması durumunda katsayılar yukarıda verilen eşitliklerde ilgili elipsoid parametreleri kullanılarak yeniden hesaplanır.

Örnek-1: Ekvatorla $B=39^\circ$ enlemi arasındaki meridyen yayı uzunluğunun hesabı

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B = 4318576.796 \text{ m}$$

b) Meridyen Yayı Uzunluğundan Enlemin Belirlenmesi

Meridyen yay uzunluğunu hesaplamaya yarayan

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B + \dots$$

serisinden B enleminin

$$B_{i+1} = \{G - (B' \sin 2B_i + C' \sin 4B_i + D' \sin 6B_i)\} / A' \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklinde çekilerek iteratif olarak hesaplanabilir.

Örnek-2: Bir meridyen elipsi üzerinde ekvatorдан uzaklığı $G = 4459985.978 \text{ m}$ kadar olan noktanın B enlemini bulunuz.

Çözüm: B enlemi için ilk yaklaşık değer her durumda $B_0 = 0$ alınabilir ve bu değerle iterasyona başlanırsa

$$B_1 = G / A' = 40.1306907^\circ$$

$$B_2 = 40.2734812489^\circ \rightarrow B_3 = 40.2736031038^\circ \rightarrow B_4 = 40.2736032064^\circ \rightarrow$$

$$B_5 = 40.2736032064^\circ = 40^\circ 16' 24.9715''$$

$$\text{İstenen enlem değeri} \quad B = 40^\circ 16' 24.9715''$$

olarak bulunur.

c) Elipsoidde Kısa Meridyen Yaylarının Hesabı

B_1 ve B_2 enlemleri arasında kalacak kısa ΔG meridyen yayları örneğin pafta kenarlarının hesabında olduğu gibi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

olmak üzere B_m ortalama enlemiyle hesaplanacak aşağıdaki değerlerle

$$\Delta B = B_2 - B_1, \quad t = \tan B_m, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m, \quad V^2 = 1 + \eta^2, \quad M = c/V^3$$

$$\Delta G = M \frac{\Delta B}{\rho} + \frac{M \eta^2}{8V^4} \left(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2 \right) \left(\frac{\Delta B}{\rho} \right)^3$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek-3: $B_1=38^\circ$ ve $B_2=39^\circ$ enlemleri arasında kalan meridyen yayı uzunluğunu bulunuz.

Çözüm-1:

$$G_1 = A'B_1 + B' \sin 2B_1 + C' \sin 4B_1 + D' \sin 6B_1$$

$$G_2 = A'B_2 + B' \sin 2B_2 + C' \sin 4B_2 + D' \sin 6B_2$$

$$\Delta G = G_2 - G_1 = 4\,318\,576.796 - 4\,207\,567.793$$

$$\Delta G = 111\,009.003\text{m}$$

olarak bulunur. Burada G_1 ekvatorundan B_1 enlemine kadar meridyen yay uzunluğu, G_2 ekvatorundan B_2 enlemine kadar meridyen yay uzunluğu ΔG , B_1 ve B_2 enlemleri arasındaki meridyen yayıdır.

Çözüm-2:

İkinci çözüm, kısa meridyen yaylarının hesabından;

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$$

$$B_m = 38.5^\circ \quad \Delta B = B_2 - B_1 = 1^\circ$$

$$t = \tan B_m = 0.795\ 435\ 9167$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_m = 0.004\ 145\ 338\ 609$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1.004\ 145\ 338\ 609$$

$$M = \frac{c}{V^3} = 6\ 360\ 346.963$$

$$\Delta G = M \frac{\Delta B}{\rho} + \frac{M \eta^2}{8V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \left(\frac{\Delta B}{\rho} \right)^3 = 111009.003m$$

olarak bulunur.

d) Elipsoidde Paralel Daire Yayı Uzunluğu Hesabı

Elipsoidin bir B enlemli paralel dairesi üzerinde ΔL boylam farkına karşılık gelecek $S=AB$ yay uzunluğu küre üzerinde olduğu gibi hesaplanır (Şekil-9).

$$S = R_B \frac{dL}{\rho}$$

Burada $R_B = N \cos B$ olup, B paralel dairesinin yarıçapını vermektedir.

Örnek Hayford elipsoidinde $B=40^\circ$ enleminde 1° lik paralel daire yayı uzunluğunu metrik olarak bulunuz.

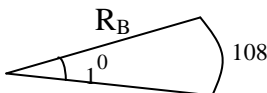
$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = 6387264.947m$$

$$R_B = N * \cos B = 4892928.819m$$

$$S = R_B \frac{dL}{\rho}$$

$$S = 85397.718m$$

Örnek Hayford elipsoidinde B enleminde 1° lik paralel daire yayı uzunluğu 108km olarak ölçülmüştür. B enlemini bulunuz.



Çözüm 1° lik paralel daire yayı uzunluğu 108km olarak verildiğine göre R_B yarıçapını bulabiliriz.

$$\frac{1^\circ}{\rho^0} = \frac{108}{R_B}$$

$$R_B = 6187.944187km$$

$$R_B = N * \cos B$$

$$\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cos B = R_B$$

$$\cos B = \frac{R_B}{a} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$$

Yukarıdaki denklemden B değeri direkt hesaplanamaz. Ancak iteratif çözüm yaparak B enlem değerini bulabiliriz.

$$B_0 = 0^\circ$$

$$B_1 = 19.74997923$$

$$B_2 = 14.1239977$$

$$B_3 = 14.08208742$$

$$B_4 = 14.08182188$$

$$B_5 = 14.0818202$$

$$B_6 = 14.08182019 = 14^\circ 4' 54.55''$$

Ya da

$$\cos B = \frac{R_B}{a} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$$

Denklemi yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir ve buradan B enlem değeri doğrudan

$$\sin B = \sqrt{\frac{1 - (R_B/a)^2}{1 - (R_B/a)^2 e^2}}$$

hesaplanır.

e) Elipsoidde Alan Hesabı

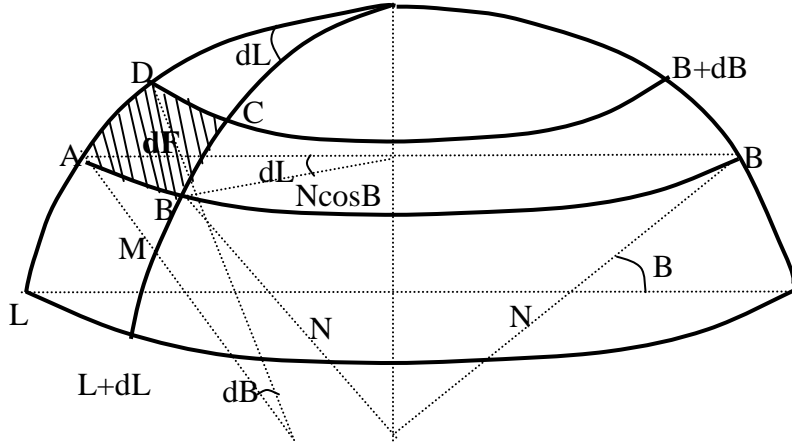
Elipsoidde B ile B+dB paralel daireleri ve L ile L+dL meridyenleri ile sınırlanmış diferansiyel ABCD dörtgeninin dF alanı, Şekil-9 dan,

$$AD = M dB, AB = N \cos B dL \text{ olur.}$$

$$dF = AD \times AB = M N \cos B dB dL$$

Bu diferansiyelin 0 ile 2π arasında integrali alınırsa elipsoid kuşağının alanı

$$dz = 2\pi M N \cos B \, dB$$



Şekil-9 Elipsoidde Alan Hesabı

şeklinde bulunur. M ve N ana eğrilik yarıçaplarının değerleri yerine konursa,

$$dz = 2\pi b^2 \frac{\cos B}{W^4} dB = 2\pi b^2 \frac{\cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB$$

olur. Bu ifadenin B_1 ve B_2 enlemleri arasındaki integralinin

$$z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} dB$$

İntegralin Binom serisi yardımıyla çözümü,

$$\Delta B = B_2 - B_1 \quad B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} \text{ olmak üzere}$$

$$z = 4\pi b^2 \left(A' \sin \frac{1}{2} \Delta B \cos B_m - B' \sin \frac{3}{2} \Delta B \cos 3B_m + C' \sin \frac{5}{2} \Delta B \cos 5B_m \right. \\ \left. - D' \sin \frac{7}{2} \Delta B \cos 7B_m + E' \sin \frac{9}{2} \Delta B \cos 9B - \dots \right)$$

Böylece B_1 ve B_2 enlemleri paralel daireleri arasındaki z elipsoid kuşağının alanı hesaplanır. İstenen F grid alanı

$$F = z \frac{\Delta L}{360^\circ} \text{ eşitliğinden bulunur.}$$

İntegralde geçen katsayıların seri açılımları ile Hayford elipsoidi için sayısal değerleri aşağıda verilmiştir.

$$A' = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \dots = 1.003378378$$

$$B' = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^8 + \frac{35}{192}e^8 + \dots = 1.128976273 * 10^{-3}$$

$$C' = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \dots = 1.713934675 * 10^{-6}$$

$$D' = \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8 + \dots = 2.75262799 * 10^{-9}$$

$$E' = \frac{5}{2304}e^8 + \dots = 4.432560872 * 10^{-12}$$

Örneğin $B_1=0^\circ$ ve $B_2=90^\circ$ değerleri alınırsa elipsoidin yarı alanı ve bunun da iki katının alınmasıyla elipsoidin tamamının alanı bulunur.

$$F_e = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \frac{6}{11}e^{10} + \dots \right)$$

Bu formül ile Hayford Elipsoidinin alanı, $F_e = 510\,100\,933.8\text{km}^2$ olarak elde edilir.

Dönel elipsoid için kapalı alan formülü

$$F_e = 2\pi a^2 \left[1 + (1 - e^2) \frac{\arctan h(e)}{e} \right]$$

Bu formül ile Hayford Elipsoidinin alanı, $F_e = 510\,100\,933.858370\text{km}^2$

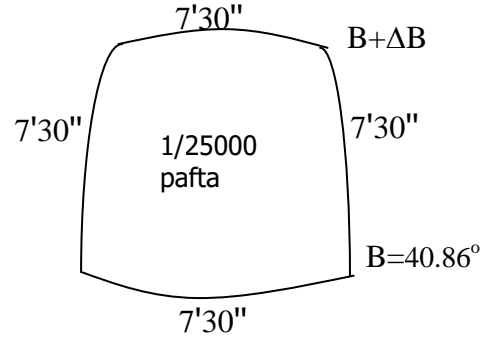
Örnek-4 : Alt kenarının enlemi $B = 40.86^\circ$ olan 1/25000 lik paftanın tüm kenar uzunluklarını ve alanını hesaplayınız.

$$B = 40.86^\circ$$

$$\Delta B = \Delta L = 7' 30'' = 0.125^\circ$$

Paftanın alt kenarının hesabı ($B = 40.86^\circ$)

$$N_{\text{alt}} = \frac{c}{V} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = 6387584.01\text{m}$$



$$r_B = N_{\text{alt}} \cos B = 4830996.092\text{m. (B enlem dairesinin yarıçapı)}$$

$$S_{\text{alt}} = r_B \Delta L / \rho = 10539.595\text{m. (Paftanın alt kenarı)}$$

Benzer şekilde paftanın üst kenarı için ($B = 40.985^\circ$)

$$N_{\text{üst}} = 6387630.513\text{m}$$

$$S_{\text{üst}} = 10519.760\text{m. (Paftanın üst kenarı)}$$

Paftanın sağ ve sol kenarları birbirine eşit olup $B_{\text{alt}} = 40.86^\circ$ ile $B_{\text{üst}} = 40.985^\circ$ enlem daireleri arasındaki ΔG meridyen yay uzunluğu formülünden $S_{\text{sağ ve sol}} = 13881.956\text{m.}$ olarak bulunur.

Pafta alan hesabı için önce B_{alt} ile $B_{\text{üst}}$ enlem daireleri arasındaki z kuşak alanı hesaplanır.

$$B_m = \frac{B_{\text{alt}} + B_{\text{üst}}}{2} = 40.9225^\circ \quad \Delta B = \Delta L = 7' 30'' = 0.125^\circ$$

$$z = 4\pi b^2 \left(A' \sin \frac{1}{2} \Delta B \cos B_m - B' \sin \frac{3}{2} \Delta B \cos 3B_m + C' \sin \frac{5}{2} \Delta B \cos 5B_m \right. \\ \left. - D' \sin \frac{7}{2} \Delta B \cos 7B_m + E' \sin \frac{9}{2} \Delta B \cos 9B - \dots \right)$$

$$z = 4\pi b^2 (8.270115569\text{E-}4 + 1.999610125\text{E-}6 - 8.498700144\text{E-}9 + \dots)$$

$z = 420977.087 \text{ km}^2$ olarak kuşak alanı bulunur.

pafta alanı ise,

$$F = z \frac{\Delta L}{360^\circ} = 146.17259971 \text{ km}^2 \text{ olur.}$$

Örnek-5: Türkiyenin coğrafi sınırlarını kapsayan; $B_1=36^\circ$, $B_2=42^\circ$ enlemlerle paralel daireleri ile $L_1=26^\circ$, $L_2=45^\circ$ boylamlı meridyenlerin sınırladığı elipsoid gridinin alanını bulunuz.

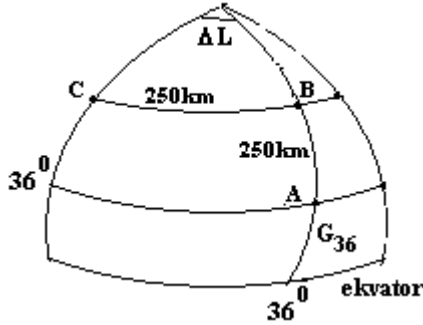
$B_m = 39^\circ$, $\Delta B = 6^\circ$ $\Delta L = 19^\circ$
değerleriyle z kuşak alanı formülünden
 $z = 20764315.63 \text{ km}^2$
olarak bulunur. İstenen grid alanı

$$F = \frac{\Delta L}{360} z = 1095894.436 \text{ km}^2$$

Örnek: Elipsoid üzerinde, coğrafi koordinatları $B=36^\circ$ ve $L=36^\circ$ olan bir A noktasından kuzeye doğru meridyen doğrultusunda 250km gidilerek B noktasına varılıyor. B noktasından da paralel daire boyunca 250km batıya gidilerek C noktasına varılıyor. B ve C noktalarının coğrafi koordinatlarını derece dakika ve saniye olarak bulunuz.

Cevap:

$$G = A'B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B$$



$$G_A = G_{36} = 3985606.611 \text{ m}$$

$$G_B = G_A + 250 \text{ km} = 4235606.611 \text{ m}$$

Hesaplanan G_B değerinden B enlem değeri

$$B_{i+1} = \{G - (B' \sin 2B_i + C' \sin 4B_i + D' \sin 6B_i)\} / A' \quad (i=0,1,2,\dots)$$

Uluslar arası Hayford Elipsoidi için bu değerler;

$$\begin{aligned} A' &= 111136.536 \text{ 655 m} & B' &= -16107.0347 \text{ m} \\ C' &= 16.9762 \text{ m} & D' &= -0.0223 \text{ m} \end{aligned}$$

$$G_B \rightarrow B_B = 38^\circ 15' 9.35'' = 38.25259769$$

$$R_B = N \cdot \cos B = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = 6386622.29 \times \cos B$$

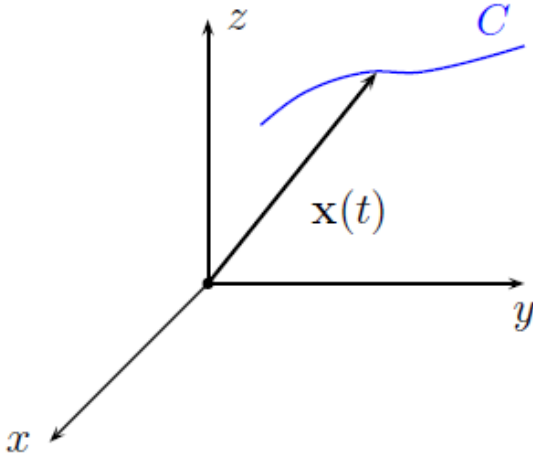
$$R_B = 5015343.347 \text{ m}$$

$$\Delta L = \frac{250}{R_B} \rho \quad \Delta L = 2.85602478^\circ = 2^\circ 51' 21.69''$$

$$C_L = 33.1439752 = 33^{\circ}8'31''2$$

Nokta	B enlem	L boylam
B	38 ⁰ 15'9.35''	36 ⁰
C	38 ⁰ 15'9.35''	33 ⁰ 8'38.31''

3. YÜZEYLER VE EĞRİLER



Şekil-Uzay eğrisi

Eğer bir C uzay eğrisi söz konusu ise eğrinin üzerindeki noktaların koordinatları tek bir eğri parametresi adı verilen bir değişkenin (t) fonksiyonu olan üç koordinat $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ile tanımlanır. C uzay eğrisi yer vektörü $\mathbf{x}(t)$, ile genel olarak

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

ifade edilebilir.

Eğrinin (t) parametresi yerine yay uzunluğu s kullanılabilir. Bu durumda yer vektörü,

$$\mathbf{x}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

olur.

Eğer bir yüzey söz konusu ise yüzey üzerindeki noktaların koordinatları (u, v gibi) iki parametreye bağlı olarak

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v), \quad Z = Z(u, v)$$

olarak ifade edilebilir.

Üç boyutlu (x, y, z) uzay dik koordinat sisteminde bir yüzey kapalı, açık ve parametrik olmak üzere üç farklı biçimde gösterilebilir.

- 1) $f(x, y, z) = 0$ (Kapalı)
- 2) $z = f(x, y)$ (Açık)

u ve v şeklinde iki yüzey parametresi ile yüzeyin herhangi bir noktasının (x, y, z) üç boyutlu dik koordinatları ;

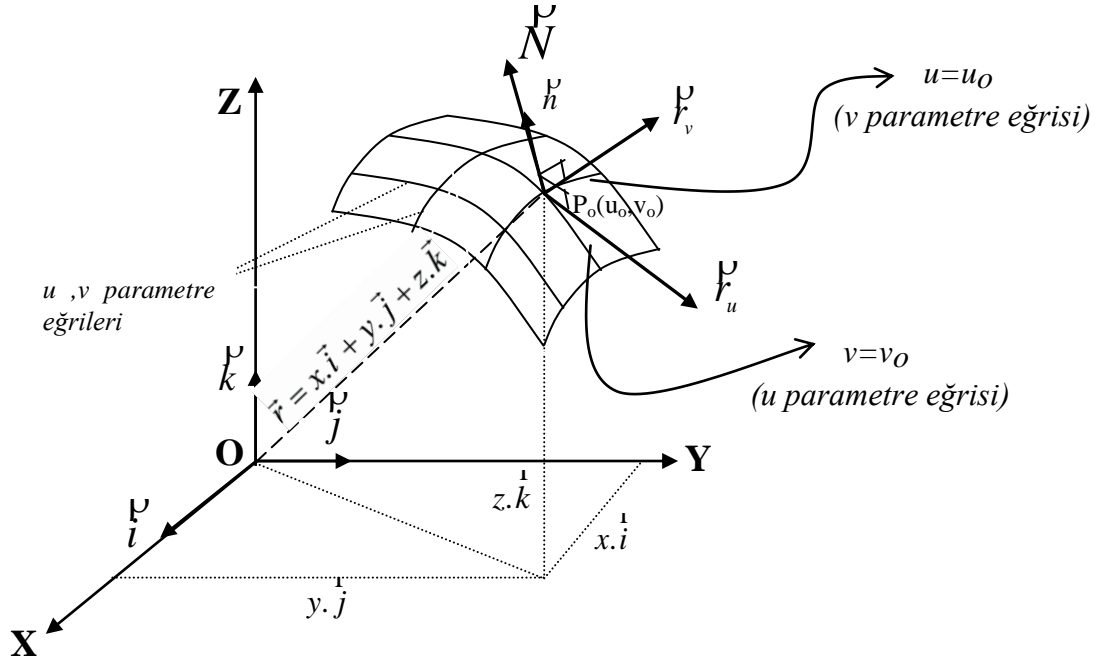
$$3) \quad \left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right\} \text{Parametrik}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu gösterim tarzına “Gauss parametrik gösterimi” de denir. Herhangi bir yüzey yerine dönel elipsoid alınırsa yüzey parametresi olarak B coğrafi enlemi ve L coğrafi boylamı seçersek

$$\left. \begin{array}{l} x = x(B, L) = N \cos B \cos L \\ y = y(B, L) = N \cos B \sin L \\ z = z(B, L) = N (1 - e^2) \sin B \end{array} \right\} \text{elipsoidin parametrik denklemi elde edilir.}$$

Benzer şekilde kürenin φ coğrafi enlemi ve λ coğrafi boylamı cinsinden parametrik denklemini elde etmek için, kürenin elipsoidin özel hali olduğu dikkate alınarak, elipsoid için verilen eşitliklerde B yerine φ , L yerine λ , N eğrilik yarıçapı yerine R küre yarıçapı ve eksentrisite yerine $e^2 = 0$ alınarak;

$$\left. \begin{array}{l} x = x(\varphi, \lambda) = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = y(\varphi, \lambda) = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = z(\varphi, \lambda) = R \sin \varphi \end{array} \right\} \text{kürenin parametrik denklemleri kurulur.}$$



Şekil-Yüzeyin parametrik gösterimi

Burada; $\vec{OP}_0 = \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$: yarıçap vektörüdür (yer vektörü); r yer vektörünün skaler değeri (normu); $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir. Burada (x,y,z) P noktasının dik koordinatlarını, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ise x,y,z doğrultularındaki birim vektörlerdir. Yani,

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Yüzeyin bir P_0 noktasındaki parametre eğrileri boyunca yüzey teğetlerini elde etmek için r yer vektörünün P_0 noktasında türevleri alınır.

u eğrisinin $u = u_0$ noktasındaki teğeti \vec{r}_u

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right)_o = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \vec{k} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j} + z_u \cdot \vec{k}$$

v eğrisinin $v = v_0$ noktasındaki teğeti \vec{r}_v

$$\vec{r}_v = \left(\frac{\partial r}{\partial v} \right)_o = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \vec{k} = x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j} + z_v \cdot \vec{k}$$

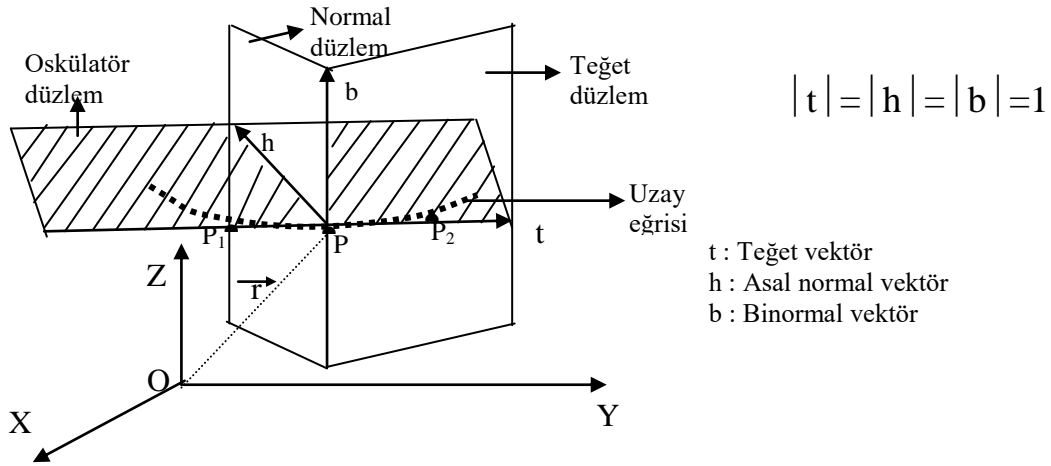
şeklinde olur.

\vec{r}_u ve \vec{r}_v vektörlerinin vektörel çarpımı bu noktadaki yüzey normalini verir. P_0 noktasındaki yüzey normali ;
 $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ dir.

3.1 Uzay Eğrileri

Eğer koordinatlar bir t parametresine bağlı ise t nin değişmesi ile yüzey üzerinde bir eğri meydana gelir.

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$



Şekil- Uzay eğrisi, Oskulator, Teğet ve Normal Düzlemler

Burada eğrinin yer vektörü $\vec{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ dir. Herhangi bir uzay eğrisinin P teğet noktası için aşağıdaki düzlem ve vektör tanımlamaları yapılabilir.

Uzay eğrisi üzerinde birbirine çok yakın P_1 , P ve P_2 noktalarından geçen düzleme “oskulator düzlem” ,eğrinin P noktasındaki teğetini içeren oskulator düzleme dik düzleme “teğet düzlem” denir. Teğet ve oskulator düzlemlere dik olan ve P den geçen düzleme “normal düzlem” denir. Normal düzlemle teğet düzlemin ara kesiti binormal vektörü (b),normal düzlem ile oskulator düzlemin arakesiti asal normal vektörü (h), (t) ise eğrinin oskulator düzlem üzerindeki teğet vektörüdür.

t , b ve h vektörlerine ek üçlü adı verilir.

$$\vec{r}(s) = x(s) \cdot \vec{i} + y(s) \cdot \vec{j} + z(s) \cdot \vec{k} \quad (s, \text{ yay uzunluğunu parametre olarak alırsak})$$

\vec{t} teğet vektörü \vec{r} yer vektörünün türevine eşittir.

$$\vec{t} = \vec{r}' = \frac{dr(s)}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} \vec{i} + \frac{dy(s)}{ds} \vec{j} + \frac{dz(s)}{ds} \vec{k}$$

Asal normal birim vektörü ise teğet vektörün birim vektörüne eşittir.

$$h = \frac{t'}{|t'|} = \frac{r''}{|r''|} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2} \vec{k}}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}}$$

$$b = t \times h = r' \times \frac{r''}{|r''|}$$

3.2 I. Dereceden Temel Büyüklükler E , F , G

Koordinatları $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ olan n boyutlu bir koordinat sisteminde en genel yay elemanı formülü;

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} dq_i dq_j$$

biçimindedir.

$i \neq j$ iken $h_{ij} = 0$ ise $q_i =$ değişken ile $q_j =$ değişken çizgileri birbirini dik açıyla keser.

$i = j$ iken $h_{ii} = h_{jj} = 1$ ise q_i ve q_j değişken koordinat çizgileri doğrusaldır.

Herhangi bir yüzey üzerinde birbirine çok yakın iki nokta arasındaki yay uzunluğu için ;

dik koordinatlar türünden ;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

eşitliği yazılabilir.

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \cos \theta \quad (\vec{r}_u \text{ ve } \vec{r}_v \text{ vektörlerinin skaler çarpımı})$$

$$\cos \theta = \frac{r_u r_v}{|\vec{r}_u| |\vec{r}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$u \perp v$ ise $\theta = 90^\circ$ ve $\cos \theta = 0$ olur ve dolayısıyla $F = 0$ dır.

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} = \frac{W^*}{\sqrt{EG}}$$

$$W^* = \sqrt{EG - F^2} \quad (\text{I. temel formun diskriminant formülü})$$

T Açısının Değerini Veren Formüller:

Herhangi bir parametre eğrisi örneğin yukarıdaki şekilde u ($v = \text{sabit}$) eğrisiyle bir yüzey eğrisi arasındaki T açısı da yine teğet vektörlerin skaler çarpımından bulunur. s parametrelili yüzey eğrisinin teğet vektörü $r_s = \frac{dr}{ds}$ birim vektördür.

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_s = |\vec{r}_u| |\vec{r}_s| \cos T$$

$$\cos T = \frac{r_u r_s}{|\vec{r}_u| |\vec{r}_s|} \quad |\vec{r}_u| = \sqrt{E} \quad |\vec{r}_s| = 1 \text{ olacağından}$$

$\cos T = \frac{r_u r_s}{\sqrt{E}}$ olur. Diğer yandan r yer vektörü $r = r\{u(s), v(s)\}$ şeklinde yay uzunluğunun fonksiyonu olarak yazarsak r_s nin değeri,

$\frac{dr}{ds} = r_s = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}$ olur. Buradan $r_u r_s$ çarpımını teşkil edersek,

$$r_u r_s = r_u r_u \frac{du}{ds} + r_u r_v \frac{dv}{ds}$$

$r_u r_s = E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}$ olur. Bu değeri açılı eşitliğinde yerine koyarsak

$$\cos T = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E} ds} \quad \sin T = \frac{\sqrt{EG - F^2} dv}{\sqrt{E} ds} \quad \tan T = \frac{\sqrt{EG - F^2} dv}{Edu + Fdv}$$

eşitlikleri çıkar. Parametre eğrileri ortogonal ise $F = 0$ olacağından açılı değerleri,

$$\cos T = \frac{\sqrt{E} du}{ds} = \frac{ds_{(u)}}{ds} \quad \sin T = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} = \frac{ds_{(v)}}{ds} \quad \tan T = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} = \frac{ds_{(v)}}{ds_{(u)}}$$

olur.

Yüzey Normali

Yüzeyin bir noktasındaki normal vektörü, bu noktadaki yüzeyin teğet düzlemine diktir. Öte yandan bir yüzey noktasındaki teğet düzlem içindeki herhangi iki vektöre dik olan vektör teğet düzlemine de diktir. O halde böyle bir vektör o noktada yüzey normalidir. Bir yüzey noktasındaki parametre eğrilerinin teğet vektörleri yüzeye de o noktada teğettir, yani o noktadaki teğet düzlemindedir. Bu durumda bir noktada parametre eğrilerinin teğet vektörlerine dik olan vektör o noktadaki yüzey normalidir. İki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlere dik bir vektör oluşturur. O halde bir yüzey noktasındaki yüzey normali, bu noktada parametre eğrilerinin teğet vektörlerinin vektörel çarpımı ile oluşan bir vektördür. Böylece yüzey normali

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \quad (\times \text{ işareti vektörel çarpımı göstermektedir})$$

olur ve normal vektörü doğrultusundaki birim vektör bu vektörü skaler değerine bölmekle elde edilir birim vektöre \vec{n} denilirse ;

$$\vec{n} = \frac{N}{|N|} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{(r_u \times r_v)^2}}$$

diğer taraftan $\sqrt{(r_u \times r_v)^2} = |r_u \times r_v| = |r_u| |r_v| \sin \theta$

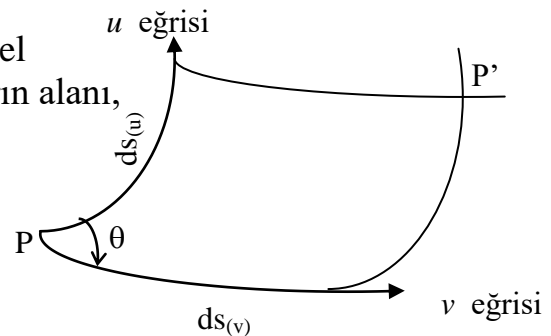
$(r_u \times r_v)^2 = E G - F^2 = W^{*2}$ elde edilir. Böylece normal doğrultusundaki birim vektör

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{W^*} \text{ olur.}$$

Yüzey Alan Elemanı

Diferansiyel anlamda alan elemanı olarak parametre eğrilerini $ds_{(u)}$ ve $ds_{(v)}$ diferansiyel yay elemanlarının oluşturduğu paralel kenarın alanı,

$$df = ds_{(u)} ds_{(v)} \sin \theta$$



$$\sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} = \frac{W^*}{\sqrt{EG}} \text{ değeri yerine konursa}$$

$$ds_{(u)} = \sqrt{E} du \text{ ve } ds_{(v)} = \sqrt{G} dv$$

$$df = \sqrt{EG - F^2} du dv = W^* du dv$$

$W^* = |r_u \times r_v|$ olduğu dikkate alınırsa alan elemanı

$$df = |r_u \times r_v| du dv \text{ olur.}$$

3.3 Eğrilik

Düzlemde bir $y = f(x)$ eğrisinin eğriliği,

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

şeklinde hesaplanır. Burada κ eğriliği, R eğrilik yarıçapını, $y' = \frac{dy}{dx}$ ve $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ türevleri göstermektedir. Eğrinin bir $P_0(x_0, y_0)$ noktasındaki eğriliği, eğrilik formülünde P_0 noktasının koordinatları yerine yazılmak suretiyle

$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{y_0''}{(1 + y_0'^2)^{3/2}}$ hesaplanır. Geometrik olarak eğrinin bir noktasındaki eğriliği, teğet noktada eğriye diferansiyel anlamda uyan çemberin yarıçapının tersidir. Öyle ki teğet noktada bu çemberin eğimi ve eğriliği $y = f(x)$ eğrisinin eğimi ve eğriliğine eşittir.

Soru: Düzlemde denklemi $y = x^3 - 2x^2 + 2$ olan eğrinin $(x_0 = 1)$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Cevap:

$$y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'_0 = -1$$

$$y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''_0 = 2$$

$$\kappa = \frac{2}{(1 + 1^2)^{3/2}} = 0.707106$$

$$R = 1.41421$$

Soru: Düzlemde denklemi $y = x^3 - 2x^2 + 2$ olan eğrinin $(x_0 = 3)$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Cevap:

$$y' = 3x^2 - 4x \Rightarrow y'_0 = 15$$

$$y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''_0 = 14$$

$$\kappa = \frac{2}{(1 + 1^2)^{3/2}} = 0,00412$$

$$R = 242,680$$

Yüzey Eğrisinde Eğrilik

Bir yüzey eğrisinin teğet vektörü t ile gösterilir ve eğriyi veren parametre yay uzunluğu olarak alınırsa

$$\frac{dr(s)}{ds} = r_s = r' = t \quad \text{ve } |t|=1$$

$$t = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} \quad \text{ya da başka bir gösterimle}$$

$$t = \frac{dr}{ds} = r' = r_u u' + r_v v' \quad \text{olur.}$$

$$|t| = \sqrt{(t)^2} = 1$$

$t^2 = 1$ olur. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$2t \frac{dt}{ds} = 0 \quad , \quad t' = 0 \quad \text{olur.}$$

$$t = \frac{dr}{ds} = r' \quad \text{olduğuna göre}$$

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} = r''$$

$$r' r'' = t t' = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

İki vektörün skaler çarpımının sıfır olması için bu iki vektörün birbirlerine dik ya da vektörlerden birinin sıfır olması gerekmektedir. O halde t ve t' vektörlerinin birbirlerine dik oldukları ortaya çıkmaktadır. Eğrinin bir noktasındaki teğete dik olan t' özel vektörüne “*asal normal*” ya da *eğrilik vektörü* denir. Asal normal vektörü birim vektör değildir. Bu vektör doğrultusundaki birim vektör h ile gösterilirse, κ skaler bir sayı olmak üzere

$$t' = r'' = \kappa h \quad \text{yazılabilir.}$$

Bu eşitlikte κ , s ye bağlı bir fonksiyondur ve uzay eğrisinin eğriliği adını alır. Eğrilik aynı zamanda bir eğrinin küçük bir alanda bir doğrudan sapmasını gösterir.

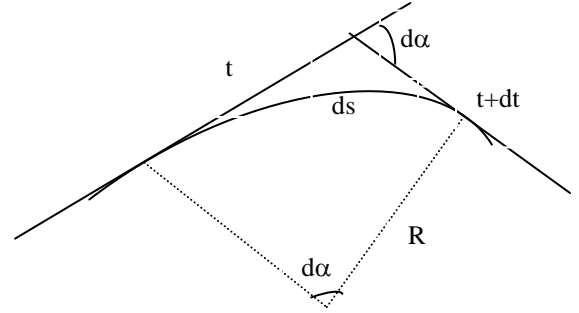
Eğriliğin geometrik yorumunu yapmak için eğri üzerinde birbirine diferansiyel anlamda yakın iki nokta alınır. Bu noktadaki teğetler t ve $t + dt$ ve aralarındaki açı $d\alpha$ olmak üzere

$$\frac{dt}{ds} = \kappa h$$

$|t \cdot t| = 1$ ve $|t \cdot h| = 0$ olduğundan

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} \text{ eğrilik ve}$$

$$R = 1 / \kappa = \frac{ds}{d\alpha} \text{ eğrilik yarıçapıdır.}$$



3.4 II. Dereceden Temel Büyüklükler \bar{L} , \bar{M} , \bar{N}

Bir yüzey eğrisinin teğeti, o noktada yüzeye de teğet olduğu için yüzey normaline diktir. O halde,

$$n \cdot t = 0 \quad (\text{skaler çarpım})$$

$$n \times t = 1 \quad (\text{vektörel çarpım})$$

olur. birinci eşitliğin s ' ye göre türevi alınırsa ,

$$\frac{dn}{ds} \cdot t + n \cdot \frac{dt}{ds} = 0 \quad \text{ve} \quad t = r' = \frac{dr}{ds} \text{ olmak üzere ,}$$

$$\frac{dn}{ds} \frac{dr}{ds} + n \frac{d^2r}{ds^2} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

$n = n(u, v)$ olmak üzere n , u ve v parametrelerine bağlı olduğu için

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial n}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

ve aynı şekilde,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

bu değerleri $\frac{dn}{ds} \frac{dr}{ds} + n \frac{d^2r}{ds^2} = 0$ eşitliğinde yerine koyarsak

$$\left(\frac{\partial n}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial n}{\partial v} \frac{dv}{ds}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{ds}\right) + n \frac{d^2 r}{ds^2} = 0$$

yukarıdaki eşitliğin son terimindeki ikinci türev yerine $\frac{d^2 r}{ds^2} = \kappa h$ yazarsak

$$n_u r_u \frac{du^2}{ds^2} + (n_u r_v + n_v r_u) \frac{dudv}{ds^2} + n_v r_v \frac{dv^2}{ds^2} + \kappa n h = 0$$

$$\kappa n h = \frac{-n_u r_u du^2 - (n_u r_v + n_v r_u) dudv - n_v r_v dv^2}{ds^2}$$

eşitliğin paydası I.temel form olup payına da II. temel form dersek,

$$\text{II. Temel Form} = -n_u r_u du^2 - (n_u r_v + n_v r_u) dudv - n_v r_v dv^2$$

$$\text{II. Temel Form} = \bar{L} du^2 + 2\bar{M} dudv + \bar{N} dv^2$$

olur. Burada ikinci derece temel büyüklükler olan ; \bar{L} , \bar{M} ve \bar{N} nin değerleri aşağıdaki gibi determinantlardan da hesaplanabilir.

$$\bar{L} = -n_u r_u = n r_{uu} = \frac{r_u r_v r_{uu}}{W^*} = \frac{1}{W^*} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}$$

$$\bar{M} = -1/2 (n_u r_v + n_v r_u) = n r_{uv} = \frac{r_u r_v r_{uv}}{W^*} = \frac{1}{W^*} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}$$

$$\bar{N} = -n_v r_v = n r_{vv} = \frac{r_u r_v r_{vv}}{W^*} = \frac{1}{W^*} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}$$

$$\kappa n h = \frac{\bar{L} du^2 + 2\bar{M} dudv + \bar{N} dv^2}{ds^2}$$

$$\kappa n h = \frac{\text{II. Temel Form}}{\text{I. Temel Form}}$$

burada ,

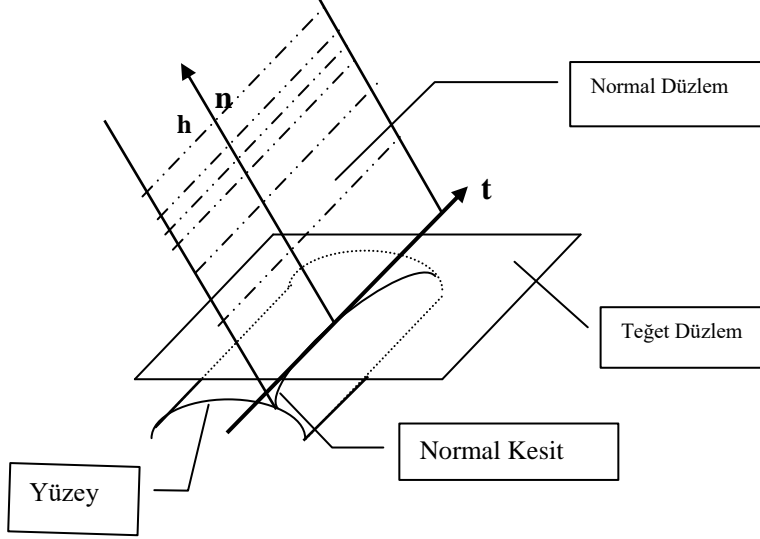
κ : yüzey eğrisinin bir noktasındaki eğriliği

h : yüzeyin asal normalindeki birim vektör

n : o noktadaki yüzey normalinin birim vektörüdür.

3.5 Normal Kesit Ve Eğik Kesit

Yüzeyin bir noktasındaki normalinden sonsuz düzlem geçer. Bu düzlemlerin yüzey ile arakesitlerine *normal kesit* denir.

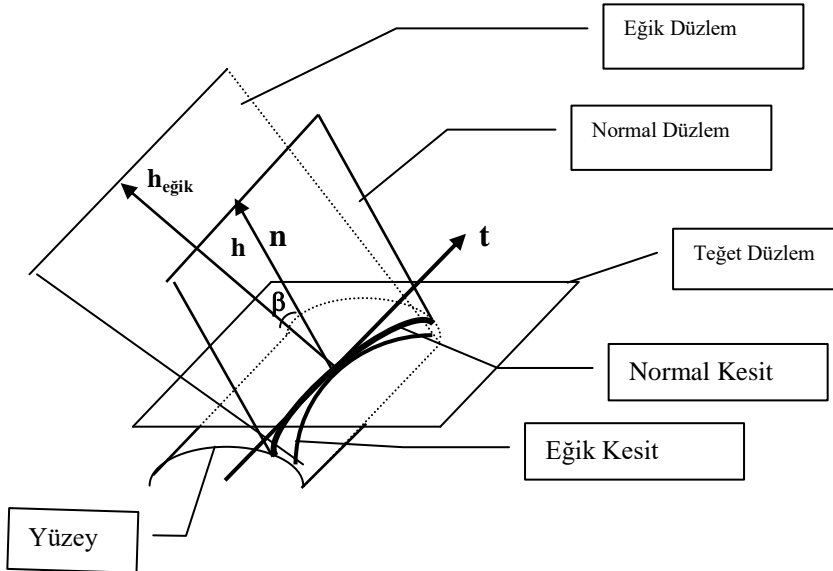


Burada; N hem yüzeyin normalidir, hem de normal kesitin asal normalidir. n ve h çakışınca

$\beta = 0$ ve $\cos 0 = 1$ dir. Buradan normal eğrilik , $n \equiv h$ ve $n \cdot h = 1$

$$\kappa_{NOR} = \frac{1}{R_{NOR}} = \frac{II}{I}$$

şeklinde II. temel formun I.temel forma oranlanmasıyla elde edilir.



Şekil- Normal ve Eğik Kesit

Yüzey normalini içermeyen düzlemlerin yüzey ile arakesitlerine *eğik kesit* denir. Aşağıdaki şekilde bir yüzey üzerinde normal kesit ile eğik kesit bir arada gösterilmektedir.

Eğik düzlemlerle normal düzlem arasındaki açı β ise

$$\kappa_n h = \kappa \cdot |n| \cdot |h| \cos \beta = \kappa \cos \beta = \frac{\Pi}{I}$$

n ve h birim vektörler olduğu için çarpımları bir'e eşit olur.

$$\kappa \cos \beta = \frac{1}{r} \cos \beta = \frac{1}{R_{NOR}}$$

R_{NOR} : Normal kesitin eğrilik yarıçapı

r : eğik kesitin eğrilik yarıçapı

$r = R_{NOR} \cos \beta$ Eğik kesitle normal kesitin eğrilik yarıçapları arasındaki bağıntı (Meusnier teoremi)

Yüzey Eğriliği

Bir yüzeyin herhangi bir noktasındaki eğrilik söz konusu olduğunda; o noktadan yüzey normalini içeren sonsuz sayıda düzlem geçer bu düzlemlerle yüzeyin arakesitleri yine sonsuz sayıda normal kesit eğrileri (NKE) oluşturur. Birer düzlem eğri olan NKE lerin eğrilikleri buldukları düzlemin doğrultusuna göre farklı değerler alırlar. Ancak bunların içinde öyle iki NKE vardır ki bunların birinde eğrilik en küçük diğerinde eğrilik en büyüktür. Bunlara anormal kesit eğrileri, eğriliklerine de ana eğrilikler denir ve eğrilik yarıçapları R_{min} ve R_{max} ile gösterilirse yüzey eğriliği için aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

1) Gauss Eğrilik Ölçütü (K) :

Bir yüzey noktasındaki eğrilik ölçütü K , Gauss'a göre R_{min} ve R_{max} ana eğrilik yarıçapı olmak üzere;

$$K = \frac{1}{R_{min} R_{max}} \text{ olur.}$$

2) Ortalama Eğrilik (H) :

Bir yüzey noktasındaki iki ana eğrilik ortalamasıdır.

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{min}} + \frac{1}{R_{max}} \right)$$

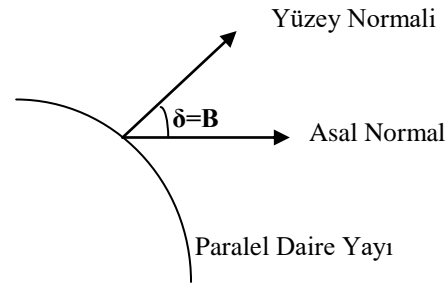
3.6 Jeodezik Eğri

Jeodezik eğri; Jeodezik eğriliği sıfır olan bir yüzey eğrisidir. Jeodezik eğrinin belli bir bölgede tanımlanması gerekir. Jeodezik eğrinin ana normalleri her noktada yüzey normalleri ile çakışır. İki nokta arasındaki en kısa yol jeodezik eğridir (Jeodezik eğrinin küre üzerindeki karşılığı büyük daire yayı ve düzlem üzerindeki karşılığı da iki noktayı birleştiren doğrudur). Bu tanımın yanında; Jeodezik eğri, her noktasında jeodezik eğriliği sıfır olan yüzey eğrisi olarak da tanımlanır.

Jeodezik Eğrinin Özellikleri:

- 1-Jeodezik eğrinin jeodezik eğriliği sıfıra eşittir.
- 2-Her noktasında asal normal ile yüzey normali çakışır.
- 3-Bir yüzey üzerindeki iki nokta arasında en kısa yol jeodezik eğridir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Yani iki noktayı birleştiren her jeodezik eğri en kısa yol değildir. Bunun için jeodezik eğrinin sınırlı bir bölgede tanımlanması gerekir.
- 4-Yüzey üzerindeki bir noktadan verilen bir teğet doğrultuda yalnız bir jeodezik eğri vardır.

Elipsoid üzerinde, meridyen yayları, ekvator yayları birer jeodezik eğridir. Ancak paralel daire yayları birer jeodezik eğri değildirler. Çünkü paralel daire üzerindeki bir noktada yüzey normali ile asal normal çakışmaz aralarında B enlemi kadar açı farkı olur.



Jeodezik eğriliği gösteren κ_j yerine sıfır konursa jeodezik eğrinin diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\kappa_j = -\frac{dA}{ds} - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{E}}{dv} \cos A - \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d\sqrt{G}}{du} \sin A = 0$$
$$\frac{dA}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{d\sqrt{E}}{dv} \cos A - \frac{d\sqrt{G}}{du} \sin A \right)$$

Küre yüzeyinde jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri;

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos A}{\sqrt{E}} = \frac{\cos A}{R}$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin A}{\sqrt{G}} = \frac{\sin A}{R \cos \varphi}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R} \tan \varphi \sin A \quad \text{şeklindedir.}$$

Bu eşitliklerin oranlanmasından,

$$\frac{dA}{d\varphi} = \tan \varphi \tan \lambda$$

$$\frac{dA}{d\lambda} = \sin \varphi \quad \text{denklemler elde edilir.}$$

Elipsoid yüzeyinde jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri;

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{N} \tan B \sin A \quad \text{şeklindedir.}$$

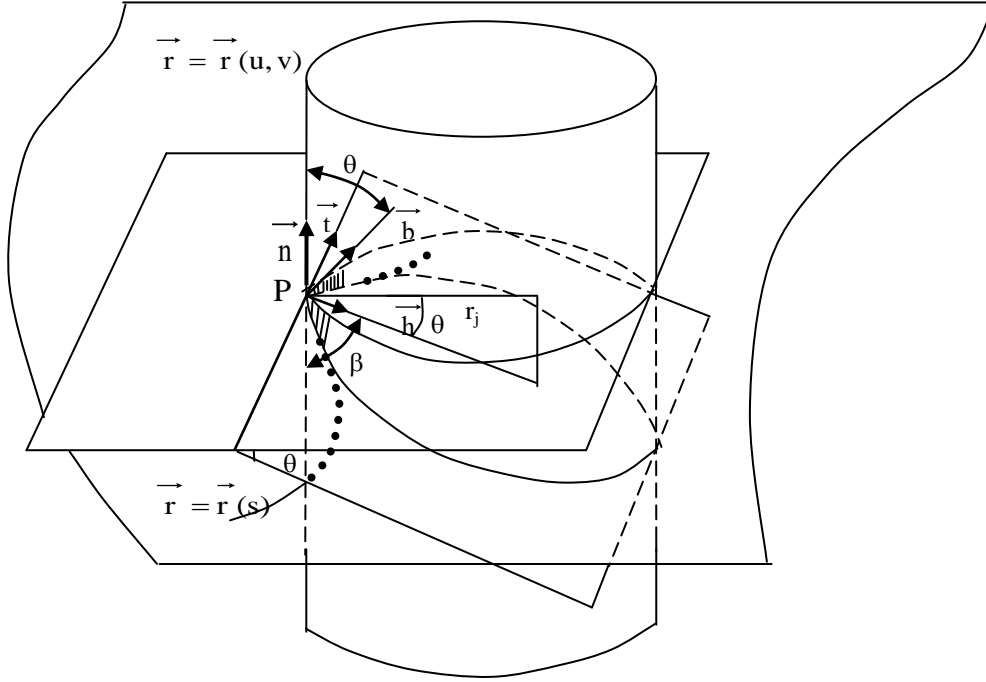
Bu eşitliklerin oranlanmasından,

$$\frac{dA}{dB} = \frac{M}{N} \tan B \tan A = \frac{t}{V^2} \tan A$$

$$\frac{dA}{dL} = \sin B \quad \text{denklemler elde edilir.}$$

3.7 Jeodezik Eğrilik

Bir yüzey eğrisinin bir noktasında, sonsuz küçük bir kesiminin o noktada yüzeye teğet düzleme dik izdüşümünün eğriliğine *jeodezik eğrilik* denir. jeodezik eğriliğin diferansiyel denklemi değişik yollardan bulunabilir. Örneğin yüzey eğrisine, bir noktasında teğet ve o noktada yüzey teğet düzlemine dik bir silindir geçirilirse, silindirin yüzey teğet düzlemi ile diferansiyel anlamda arakesiti olan eğrinin eğriliği, yüzey eğrisinin jeodezik eğriliğidir.

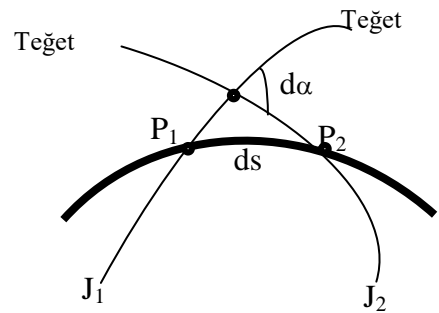


şekilde;

- r_j : yüzey eğrisinin jeodezik eğrilik yarıçapı
- r : yüzey eğrisinin eğrilik yarıçapı
- \vec{h} : yüzey eğrisinin asal normal birim vektörü
- \vec{b} : yüzey eğrisinin binormal birim vektörü
- \vec{n} : yüzey normali birim vektörüdür.

Jeodezik eğrilik şu şekilde de tanımlanabilir: yüzey üzerinde bulunan bir eğrinin jeodezik eğriliği birbirine diferansiyel anlamda (çok yakın) P_1 ve P_2 gibi iki noktada eğriye çizilen teğetler P_1J_1 ve P_2J_2 jeodezik eğrileri arasındaki $d\alpha$ açısı ve ds yayı yardımıyla tanımlanır. Eğrilik formülü,

$$\kappa_j = \frac{d\alpha}{ds} \text{ dır.}$$



Eğik kesitle normal kesit eğrilik yarıçapları arasındaki ilişkiyi veren Meusnier formülünden

$$r = R \cdot \cos \beta$$

yazılabilir.

yüzey normaline dik olan izdüşüm eğrisi asal normali ile yüzey eğrisi asal normali (b ile n vektörü) arasındaki açı θ

$$\theta + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \theta$$

yine Meusnier formülünden

$$r = R \cos(90^\circ - \theta) = R \sin \theta \quad \text{olur.}$$

Yüzey eğrisinin binormal birim vektörü b , asal normal birim vektörü h ya dik olduğundan, iki vektörün skaler çarpımından aralarındaki açı,

$$\cos \theta = b \cdot n \quad \text{elde edilir.}$$

Yüzey eğrisi ile bunun aynı zamanda normal kesit eğrisi olan izdüşüm eğrisinin eğrilik yarıçapları arasında Meusnier formülünden,

$r = r_j \cdot \cos \theta$ eşitliği yazılabilir. Buradan jeodezik eğrilik,

$$\kappa_j = \frac{1}{r_j} = \frac{1}{r} \cos \theta \quad \text{olur.}$$

yüzey eğrisinin eğriliği,

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

olmak üzere

$$\kappa_j = \kappa \cos \theta$$

$$\kappa_j = \kappa \cdot b \cdot n$$

elde edilir.

Diğer taraftan yer vektörünün ikinci türevi,

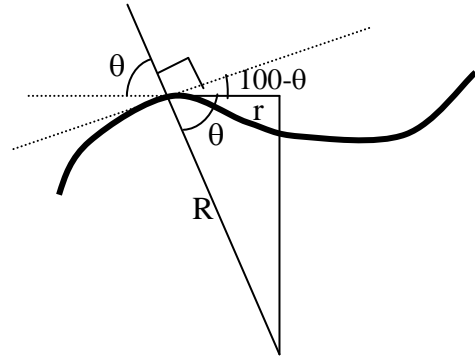
$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r'' = \kappa h \quad \text{eşitliği } t = r' \quad \text{ile soldan}$$

vektörel çarpılırsa,

$$t \times h = b$$

$$r' \times r'' = \kappa (t \times h) = \kappa b$$

elde edilir ve bu vektör eşitliğinin de n ile skaler çarpımından



$$\kappa_j = \kappa b n = (r' \times r'')n$$

bulunur ve n yerine değeri yazılırsa, jeodezik eğrilik

$$\kappa_j = (r' \times r'').n = \frac{1}{W^*} (r' \times r'').(r_u \times r_v) = \frac{1}{W^*} \begin{vmatrix} r'r_u & r'r_v \\ r''r_u & r''r_v \end{vmatrix}$$

yukarıdaki gibi olur. Burada;

$$\begin{aligned} r' &= r_u u' + r_v v' \\ r'' &= r_{uu} (u')^2 + r_{vv} (v')^2 + 2r_{uv} u'v' + r_u u'' + r_v v'' \end{aligned}$$

u ve v parametrelerin dik ve $v = \text{sabit}$ (u parametre eğrisi) ile ds yüzey eğrisinin yaptığı açı T olmak üzere jeodezik eğrilik

$$\kappa_j = \frac{dT}{ds} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \sin T - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cos T \right) \text{ olur.}$$

u ve v parametrelerinin ortogonal oldukları dikkate alınarak bu parametre eğrilerin jeodezik eğrilikleri

u parametre eğrisi ($v = \text{sabit}, T = 0$)

$$\kappa_{ju} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$

v parametre eğrisi ($u = \text{sabit}, T = 90^\circ$)

$$\kappa_{jv} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

κ_{ju} ve κ_{jv} parametre eğrilerinin jeodezik eğriliklerinden yararlanarak bir yüzey eğrisinin jeodezik eğriliği

$$\kappa_j = \kappa_{ju} \cos T + \kappa_{jv} \sin T + \frac{\partial T}{\partial s} \text{ olur.}$$

u, v parametreleri yerine coğrafi koordinatlar kullanıldığında küre ve elipsoid üzerinde değişik yüzey eğrilerinin eğrilikleri aşağıda tablo halinde verilmiştir.

	Küre	Elipsoid
Coğrafi koord. (<i>enlem, boylam</i>)	φ, λ	B, L
Yay uzunluğu	$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi \cdot d\lambda^2$	$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B \cdot dL^2$
I. derece temel büyüklükler (E,F,G)	$E = R^2, F = 0, G = R^2 \cdot \cos^2 \varphi$	$E = M^2, F = 0, G = N^2 \cdot \cos^2 B$
$u = \textit{enlem}$ parametre eğrisinin jeodezik eğriliği ve eğrilik yarıçapı	$\kappa_{j\varphi} = 0$ (R sabit) $r_{j\varphi} = \infty$	$\kappa_{jB} = 0$ $r_{jB} = \infty$
$v = \textit{boylam}$ parametre eğrisinin jeodezik eğriliği ve eğrilik yarıçapı	$\kappa_{j\lambda} = -\frac{1}{R} \tan \varphi$ $r_{j\lambda} = R \cot \varphi$	$\kappa_{jL} = -\frac{\tan B}{N}$ $r_{jL} = \frac{N}{\tan B}$
$u = \textit{enlem}$ parametre eğrisiyle A açısı yapan yüzey eğrisinin jeodezik eğriliği	$\kappa_j = -\frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \sin A + \frac{dA}{ds}$	$\kappa_j = -\frac{1}{N} \tan B \cdot \sin A + \frac{dA}{ds}$
$u = \textit{enlem}$ parametre eğrisiyle A açısı yapan jeodezik eğrinin diferansiyel denklemi $\kappa_j = 0$	$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{R} \tan \varphi \cdot \sin A$	$\frac{dA}{ds} = \frac{1}{N} \tan B \cdot \sin A$

3.8 Clairaut Denklemi

Dönel elipsoidde enleme bağlı olarak herhangi bir paralel dairenin yarıçapı, $r_B = N \cos B$ dir. Burada N meridyene dik doğrultudaki eğrilik yarıçapıdır.

$$N = \frac{c}{V} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}}$$

r_B nin B ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{dr_B}{dB} = -\frac{N}{V^2} \sin B = -M \sin B$$

$$dr_B = -M \sin B dB$$

$$\tan A = \frac{N \cos B dL}{MdB} = \frac{r_B dL}{MdB}$$

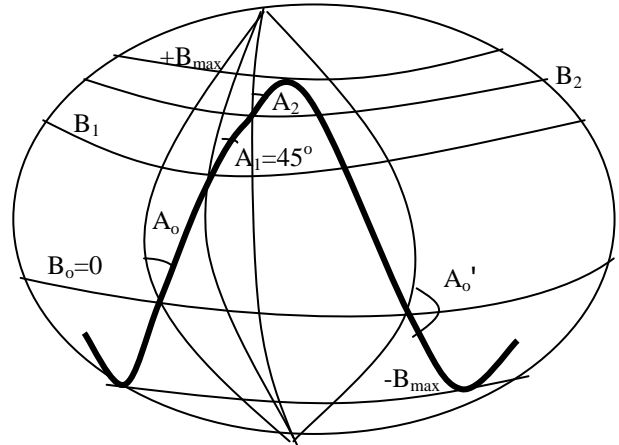
$$dr_B = -\sin B r_B \cot A dL \quad \text{olur.}$$

$$\sin B \text{ yerine } \frac{dA}{dL} \text{ konursa}$$

$$dr_B = -r_B \cot A dA$$

$$\frac{dr_B}{r_B} = -\cot A dA$$

$$\int \frac{dr_B}{r_B} = \int \frac{-\cos A}{\sin A} dA$$



$$\ln r_B = -\ln \sin A + \ln k$$

$$\ln r_B = \ln \frac{k}{\sin A} \Rightarrow r_B = \frac{k}{\sin A} \text{ ya da } k = r_B \sin A$$

eşitliği elde edilir. Yani dönelel elipsoid de jeodezik eğrinin bir noktasında, meridyenle yaptığı açının sinüsü ile o noktadaki paralel daire yarıçapının çarpımı, jeodezik eğrinin her noktasında sabittir. Örneğin ekvatorde meridyenle A açısı yapan bir jeodezik eğri kuzeye doğru gittikçe paralel daire yarıçapı küçüleceğinden eğrinin meridyenle yapacağı A açısı giderek büyüyecektir. A açısının kuzeyde alacağı en büyük değer $A = 90^\circ$ olacaktır. Güneyde de A açısının en büyük değeri $A = 270^\circ$ olacaktır. Bu noktalarda jeodezik eğri dönüş yaparak kuzeyden güneye ve güneyden kuzeye zıt işaretli iki paralel daire arasında sinüzoidal bir yüzey eğrisi çizer.

Örnek:

Elipsoid üzerinde enlemi $B_1 = 30^\circ$ olan bir noktadan geçen ve meridyenle $A_1 = 45^\circ$ açı yapan bir jeodezik eğrinin; $B_2 = 35^\circ$ enlemi ile ekvatorde meridyenle yaptığı açıları bulunuz. Söz konusu jeodezik eğrinin güney ve kuzey yarı kürelerde dönüş yaptığı noktaların B_{\max} enlemlerini bulunuz.

Çözüm:

a) $B_1 = 30^\circ$ ve $A_1 = 45^\circ$ için k sabiti

$$k = r_{30} \sin 45^\circ = N_{30} \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 30^\circ}} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 3909235.438 \text{ m}$$

$B_2 = 35^\circ$ enleminde meridyenle yaptığı açı,

$$k = r_{35} \sin A_2 \Rightarrow \sin A_2 = \frac{k}{r_{35}} = \frac{r_{30} \sin 45^\circ}{r_{35}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{N_{30} \cos 30^\circ}{N_{35} \cos 35^\circ}$$

$$A_2 = 48^\circ 36' 30.5773'' = 48^\circ 21' 47.01''$$

$B = 0^\circ$ enleminde (ekvator) meridyenle yaptığı açı,

$$r_0 = a \text{ olur.}$$

$$\sin A_0 = \frac{k}{a}$$

$$A_0 = 37^\circ 79' 85.9536'' = 37^\circ 47' 54.94''$$

$$A_0' = 142^\circ 20' 14.046'' = 142^\circ 12' 05.06''$$

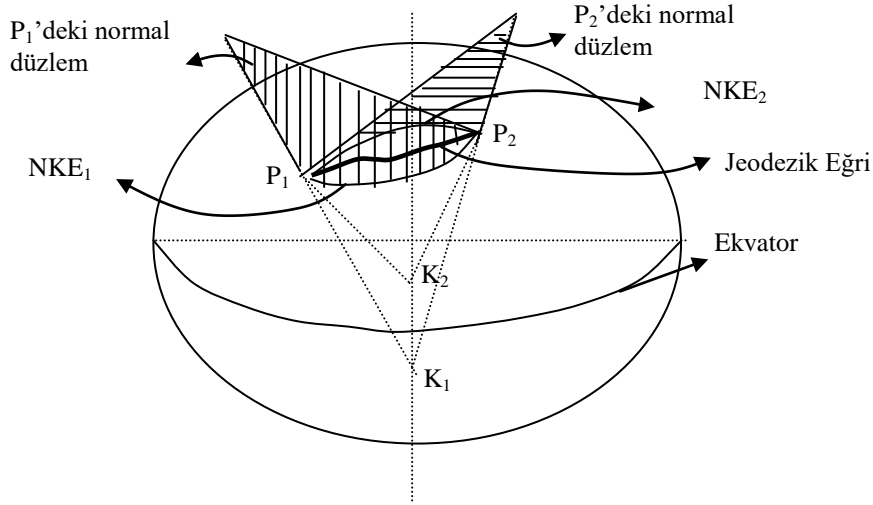
b) jeodezik eğrinin dönüş yaptığı B_{\max} enlemi ise

$A = 90^\circ$ olacağından

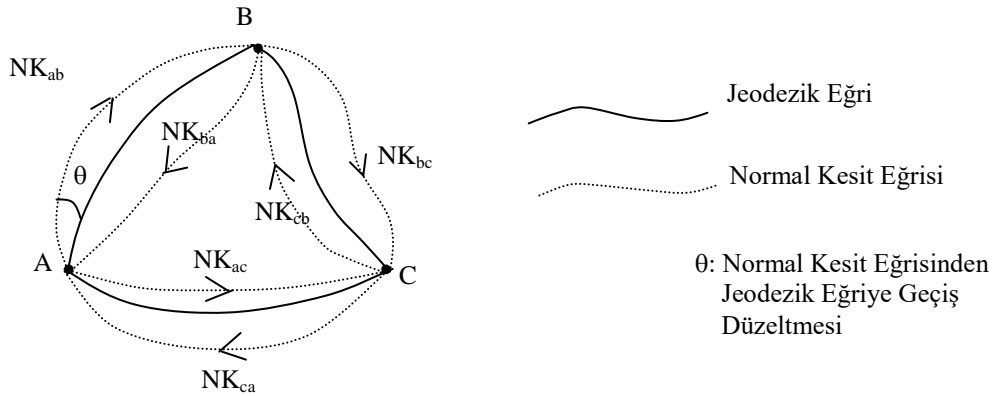
$$k = r_{B_{\max}} \sin 90^\circ \text{ ise } k = r_{B_{\max}} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_{\max}}} \cos B_{\max}$$

$$\cos B_{\max} = \pm \frac{k}{\sqrt{c^2 - e'^2 k^2}} = 0.6115967918 \Rightarrow B_{\max} = \pm 52^\circ 17' 41.82'' \text{ olarak bulunur.}$$

4. ELİPSOİD YÜZEYİNDE UYGULAMALAR



Elipsoid üzerinde herhangi iki noktanın aynı meridyen ya da aynı paralel daire üstünde olmaları özel durumu dışında genelde iki noktadaki yüzey normalleri aykırı doğrular olduğu için (normaller aynı düzlemde olmadıkları için kesişmezler), bu iki noktayı birleştiren iki ayrı normal kesit eğrisi vardır. Bu yüzden elipsoid üzerinde normal kesit eğrileri, iki noktayı birleştiren tek anlamlı bir bağlantı eğrisi olarak kullanılmaz. Elipsoid üzerinde bu iki noktayı tek anlamlı olarak jeodezik eğri birleştirir.



Elipsoid üzerinde A, B ve C gibi üç nokta normal kesit eğrileri ile birbirleriyle birleştirildiğinde tek anlamlı bir üçgen oluşmaz, ancak noktalar jeodezik eğrilerle birleştirildiğinde tek anlamlı bir üçgen oluşur ve buna **jeodezik üçgen** denir. Jeodezik çalışmalarda hep bu jeodezik üçgenler kullanılır.

Elipsoidde I. Derece Temel Büyüklükler:

Elipsoid yüzeyinde Gauss parametreleri u ve v yerine elipsoidde kullandığımız B, L jeodezik enlem ve boylamını yani $u = B$ ve $v = L$ alırsak, r yer vektörü;

$r = x(B,L)i + y(B,L)j + z(B,L)k$
olur. I. derece büyüklükler;

$$E = |r_u|^2 = |r_B|^2 \quad r' \text{ nin } B' \text{ ye göre kısmi türevi}$$

$$F = r_u \cdot r_v = r_B \cdot r_L$$

$$G = |r_v|^2 = |r_L|^2 \quad r' \text{ nin } L' \text{ ye göre kısmi türevi}$$

olur.

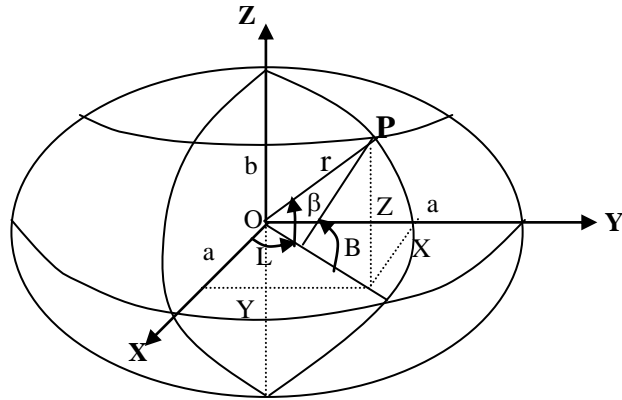
Elipsoid üzerindeki bir P noktasının

uzay dik koordinatları (x, y, z)

$$x = \frac{a \cos B \cos L}{W} = \frac{c}{V} \cos B \cos L$$

$$y = \frac{a \cos B \sin L}{W} = \frac{c}{V} \cos B \sin L$$

$$z = \frac{a(1-e^2) \sin B}{W} = \frac{c \sin B}{V(1+e^2)}$$



merkezi yarıçap r ,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a}{W} \sqrt{\cos^2 B + (1-e^2)^2 \sin^2 B}$$

$$\tan \beta = \frac{b^2}{a^2} \tan B \quad \text{eşitliğinden}$$

$$r = \frac{a \cos B}{W \cos \beta} \text{ olarak bulunur.}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + \eta^2}$$

$$r_B = \frac{\partial r}{\partial B} = \frac{\partial x}{\partial B} i + \frac{\partial y}{\partial B} j + \frac{\partial z}{\partial B} k$$

B' ye göre kısmi türevleri alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= \frac{c}{V} \cos L (-\sin B) - \frac{1}{V^2} c \cdot \cos B \cdot \cos L \frac{dV}{dB} \\ \frac{dV}{dB} &= \frac{-2e'^2 \cos B \sin B}{2V} = \frac{-e'^2 \cos^2 B \tan B}{V} & e'^2 \cos^2 B &= \eta^2 \\ \frac{\partial x}{\partial B} &= -\frac{c}{V} \cos L \sin B + \frac{c}{V^3} \cos B \cos L \eta^2 \tan B \\ M &= \frac{c}{V^3} \end{aligned}$$

uzay dik koordinatlara göre türevler

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -M \cos L \sin B \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -M \sin L \sin B \\ \frac{\partial z}{\partial B} &= M \cos B \end{aligned}$$

olur. Buradan r_B yi tekrar yazarsak

$$r_B = -M(\cos L \sin B i + \sin B \sin L j - \cos B k)$$

olur. Benzer şekilde r_L yi hesaplamak için

$$r_L = \frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\partial x}{\partial L} i + \frac{\partial y}{\partial L} j + \frac{\partial z}{\partial L} k$$

L' ye göre kısmi türevleri alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L} &= -N \cos B \sin L & \frac{\partial y}{\partial L} &= N \cos B \cos L & \frac{\partial z}{\partial L} &= 0 \\ r_L &= -N \cos B (\sin L i - \cos L j) \end{aligned}$$

$$E = |r_B|^2 \quad F = r_B r_L \quad G = |r_L|^2$$

E, F ve G yerine yukarıdaki değerleri yazılırsa, elipsoidde I. derece temel büyüklükler;

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{(-M \cos L \sin B)^2 + (-M \sin L \sin B)^2 + (M \cos B)^2} \right)^2 \\ E &= M^2 \\ F &= 0 \text{ (u ve v dik oldukları için)} \\ G &= N^2 \cos^2 B \end{aligned}$$

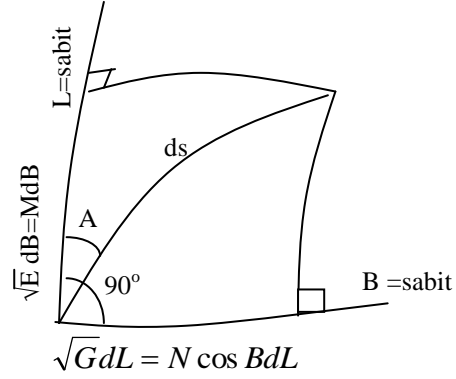
Elipsoidde I. temel form

$$I = ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2$$

$$\sin A = \sqrt{G} \frac{dL}{ds} = N \cos B \frac{dL}{ds}$$

$$\cos A = \sqrt{E} \frac{dB}{ds} = M \frac{dB}{ds}$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{G} dL}{\sqrt{E} dB} = \frac{N \cos B dL}{M dB}$$



yüzey normal birim vektörü

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{W^*} \quad \text{idi.}$$

Elipsoid yüzeyinde normal birim vektörünü hesaplamak için elipsoid parametrelerini yerine yazarsak , $W^{*2} = E G - F^2$ değeri elipsoid yüzeyinde

$W^* = M N \cos B$ olur.

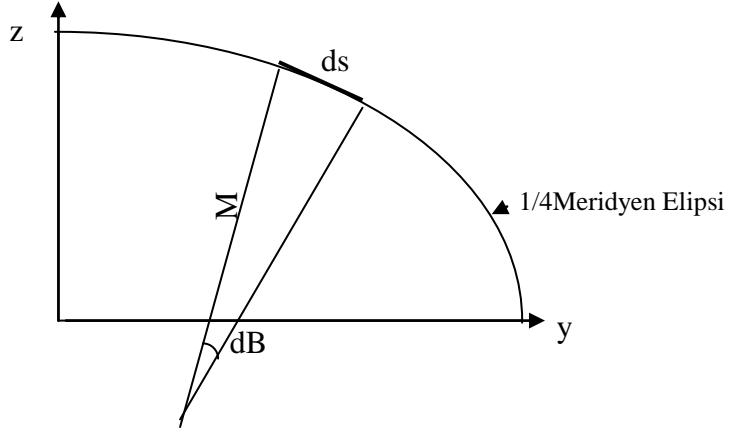
$$\vec{n} = \frac{r_B \times r_L}{MN \cos B} = \frac{1}{MN \cos B} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial B} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial B} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial B} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial L} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial L} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial L} \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = -(\cos B \cos L \mathbf{i} + \cos B \sin L \mathbf{j} + \sin B \mathbf{k})$$

olur.

Elipsoidde Meridyen Yönündeki Eğrilik Yarıçapı (M)

Meridyen yönündeki eğrilik yarıçapı M ile gösterilmektedir. Meridyenin eğriliği sabit değildir. Çünkü geometrisi elipstir. Meridyenin herhangi bir noktasındaki eğriliği hesaplanabilir. Yandaki şekilden enlem değerine bağlı olarak M eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi bulunabilir.



$$dB = \frac{ds}{M} \quad \text{den} \quad M = \frac{ds}{dB} \quad \text{ve}$$

$$M^2 = \left(\frac{ds}{dB}\right)^2 \quad \text{ayrıca}$$

$ds^2 = dz^2 + dy^2$ yay uzunluğu dik koordinatlara göre yazılır.

$$M^2 = \left(\frac{dy}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dB}\right)^2 = \left(\frac{dy}{d\beta} \frac{d\beta}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta} \frac{d\beta}{dB}\right)^2$$

$$M^2 = \left(\frac{d\beta}{dB}\right)^2 \left\{ \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2 \right\}$$

z ve y dik koordinatlarını β indirgenmiş enlemi cinsinden yazarsak,

$z = b \sin \beta$ $y = a \cos \beta$ olur. Bu ifadelerin β' ya göre türevleri

$$\frac{dz}{d\beta} = b \cos \beta \quad \frac{dy}{d\beta} = -a \sin \beta$$

$\tan \beta = \sqrt{1-e^2} \tan B$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = \sqrt{1-e^2} \frac{dB}{\cos^2 B}$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \sqrt{1-e^2} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 B} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{W^2} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 B} \quad \text{den}$$

$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B$ ve $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B$ kısaltmalarıyla

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{1}{W^2} \sqrt{1-e^2} \text{ olur.}$$

bunlar yerine konursa;

$$M^2 = \frac{(1-e^2)}{W^4} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)$$

burada b^2 yerine $b^2 = a^2 (1-e^2)$ değeri alınır

$$M^2 = \frac{(1-e^2)}{W^4} (a^2 \sin^2 \beta + a^2 (1-e^2) \cos^2 \beta)$$

$$M^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{W^4} (1-e^2 \cos^2 \beta)$$

$$M^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{W^4} \left\{ \frac{(1-e^2 \sin^2 B - e^2(1-\sin^2 B))}{W^2} \right\}$$

$$M^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{W^6}$$

Kutup noktasındaki eğrilik yarıçapı $c = a^2 / b$

Meridyen yönünde eğrilik yarıçapını veren eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M = \frac{c}{V^3} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}$$

Elipsoidde Meridyene Dik Yöndeki Eğrilik Yarıçapı (N)

Meridyene dik yöndeki eğrilik yarıçapı

N ile gösterilmektedir.

$$r = R_N \cos \delta$$

y koordinatı ile B elipsoidal enlemi

$$\text{arasındaki ilişki } y = \frac{a \cos B}{W}$$

r yerine y, R_N yerine N ve δ yerine

B değeri kullanılırsa

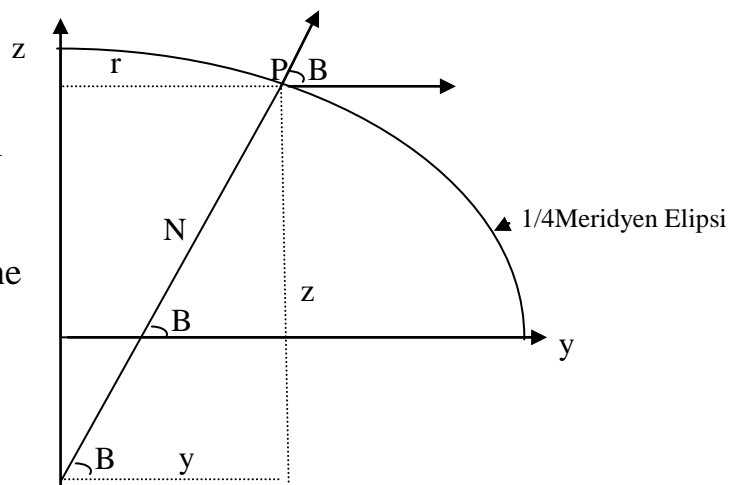
$$y = N \cos B \text{ bulunur. Buradan}$$

meridyene dik yöndeki eğrilik

yarıçapı,

$$N = \frac{c}{V} = \frac{a}{W} = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}}$$

olarak bulunur.



Elipsoidde II. Derece Temel Büyüklükler:

Elipsoidde II. Derece temel büyüklükler olan \bar{L} , \bar{M} ve \bar{N} nin değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\bar{L} = -n_B \cdot r_B$$

$$\bar{M} = -\frac{1}{2}(n_B r_L + n_L r_B)$$

$$\bar{N} = -n_L \cdot r_L$$

yukarıdaki eşitliklerde n_B , r_B , n_L ve r_L yerine aşağıdaki değerleri yazılırsa

$$n = -(\cos B \cos Li + \cos B \sin Lj + \sin Bk)$$

$$n_B = \sin B \cos Li + \sin B \sin Lj - \cos Bk$$

$$n_L = \cos B \sin Li - \cos B \cos Lj$$

$$r_B = (-M \cos L \sin Bi - M \sin B \sin Lj + M \cos Bk)$$

$$r_L = -N \cos B (\sin Li - \cos Lj)$$

buradan elipsoid yüzeyinde II. Derece temel büyüklükler,

$$\bar{L} = (-\sin B \cos Li - \sin B \sin Lj + \cos Bk)(-M \cos L \sin Bi - M \sin B \sin Lj + M \cos Bk)$$

$$\bar{L} = M$$

$$\bar{M} = 0$$

$$\bar{N} = N \cos^2 B$$

olarak bulunur.

$$\text{II. Temel Form} = \bar{L} du^2 + 2\bar{M} dudv + \bar{N} dv^2 \text{ olduğuna göre}$$

Elipsoidde II. Temel form:

$$\text{II. Temel Form} = M dB^2 + N \cos^2 B dL^2$$

olur.

Elipsoid Yüzeyinde Bir Doğrultudaki Eğrilik

Elipsoidde eğrilik tanım gereği II. Temel formun I. temel forma bölünmesiyle elde edilir. Elipsoidin normal eğriliği K_{NOR} aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$K_{NOR} = \frac{1}{R_{NOR}} = \frac{II}{I} = \frac{MdB^2 + N \cos^2 BdL^2}{M^2 dB + N^2 \cos^2 BdL^2}$$

$$\frac{1}{R_{NOR}} = \frac{1}{M} \frac{M^2 dB^2}{M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 BdL^2} + \frac{1}{N} \frac{N^2 \cos^2 BdL^2}{M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 BdL^2}$$

$$\frac{1}{R_{NOR}} = \frac{1}{M} \frac{1}{1 + \left(\frac{N \cos BdL}{MdB} \right)^2} + \frac{1}{N} \frac{1}{1 + \left(\frac{MdB}{N \cos BdL} \right)^2}$$

$$\frac{1}{R_{NOR}} = \frac{1}{M} \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{N} \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$$

Elipsoidin herhangi bir noktasında A azimutundaki doğrultunun normal eğrilik ve eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K_{NOR} = \frac{1}{R_{NOR}} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N} \quad \rightarrow \text{EULER FORMÜLÜ}$$

$$R_{NOR} = \frac{MN}{M \sin^2 A + N \cos^2 A}$$

elipsoidde eğriliğin maximum ve minimum olduğu doğrultuları bulmak için yukarıdaki eşitliğin türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial R_{NOR}}{\partial A} = N \frac{\sin 2A(V^2 - 1)}{(V^2 \cos^2 A + \sin^2 A)^2} = 0$$

burada eşitliğin payı; $N \sin 2A(V^2 - 1) = 0$ olmalıdır. N ve V sıfır olamayacağı için

$\sin 2A = 0$ olmalıdır. Buradan ;

$$2A = 0^\circ \Rightarrow A_1 = 0^\circ \Rightarrow R_1 = R_{\min} = M$$

$$2A = 180^\circ \Rightarrow A_2 = 90^\circ \Rightarrow R_2 = R_{\max} = N$$

$$K_{NOR} = \frac{1}{R_{NOR}} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N} \quad \text{Euler eğrilik formülü şu şekilde de ifade}$$

edilebilir.

$$K_{NOR} = K_1 \cos^2 A + K_2 \sin^2 A = K_1 + (K_2 - K_1) \cos^2 A$$

$K_1=1/N$ ve $K_2=1/M$ dönül elipsoid için ana eğrilikler olmak üzere

Elipsoidde Eğrilik Yarıçapları ve Eğrilik Ölçütleri :

Yukarıda tanımlanan elipsoidin ana eğrilik yarıçaplarından biri, dönel bir yüzey olarak elipsoidde meridyen eğrisidir. Bu yöndeki ana eğrilik maximum dolayısıyla meridyen eğrilik yarıçapı M minimumdur. Meridyene dik yöndeki anormal kesit eğrisinin eğriliği minimum, eğrilik yarıçapı N maximumdur. Buna enine eğrilik yarıçapı da denir.

Elipsoid yüzeyi için başlıca eğrilik ölçütleri;

1) Minimum Normal Eğrilik :

$$K_{\min} = \frac{1}{R_{\max}} = \frac{1}{N}$$

2) Maximum Normal Eğrilik :

$$K_{\max} = \frac{1}{R_{\min}} = \frac{1}{M}$$

3) Gauss Eğrilik Ölçütü (K) :

$$K = \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{MN} \quad \text{olur.}$$

4) Ortalama Eğrilik (H) :

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{\min}} + \frac{1}{R_{\max}} \right) = \frac{M + N}{2MN}$$

Gauss Eğrilik Yarıçapı (R_g):

Gauss eğrilik yarıçapı her iki ana eğrilik yarıçapının geometrik ortalamasıdır. R_g yarıçaplı bu küre, söz konusu noktadan elipsoidle aynı Gauss eğrilik ölçüsüne sahip ve aynı zamanda elipsoidin konform tasviri olan Gauss küresidir.

$$R_g = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{R_{\min} R_{\max}} = \sqrt{MN}$$

Elipsoidin ana eğrilik yarıçapları olan M ve N değerleri arasında $M \leq R_g \leq N$ eşitsizliği vardır. Eşitlik hali elipsoidde yalnız kutup noktalarında geçerlidir. Kutup noktalarında $M = R_g = N = c$ olur. (c : kutup noktası eğrilik yarıçapıdır.)

Gauss küresi, elipsoidal enlemi B olan bir elipsoid noktasında elipsoide yüzeysel teğettir. Buna karşılık M yarıçaplı küre elipsoide meridyen yayı boyunca, N yarıçaplı küre ise elipsoide B enlemlili paralel daire boyunca çizgisel teğet olur. Gauss eğrilik yarıçapı bir döneel elipsoid noktasında tüm normal eğrilik yarıçaplarının ortalamasıdır.

$R_g = \sqrt{MN}$ Gauss eğrilik yarıçapının jeodezide önemi büyüktür. Jeodezik çalışma yapılan bölgenin 150km. yarıçaplı bir daireden büyük olmaması durumunda elipsoid yüzeyinde hesap yapmak yerine elipsoide o noktada teğet R_g yarıçaplı Gauss küresinin kullanılmasıyla teorik olarak farklı sonuçlar elde edilmesine karşın pratikte bu farklar anlamsız sayılacak düzeydedir. Hesaplamalarda elipsoid yerine kürenin kullanılması büyük kolaylık sağlar.

Quadratic yüzeylerde eğrilik

Genel elipsoid (triaxial), hiperboloid , paraboloid vs gibi yüzeylerde eğrilik hesabı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Önce yüzeyin I. ve II.temel form bağıntılarından

I. fundamental form $I = E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2$

II. fundamental form $II = e.du^2 + 2.f.du.dv + g.dv^2$

yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğrilik değerleri bulunur.

$$K = \frac{e.g - f^2}{E.G - F^2} = \frac{II}{I}$$

$$H = \frac{G.e - 2F.f + E.g}{2(E.G - F^2)}$$

Bu eğriliklerden yüzeyin ana eğrilikleri

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

$$H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$$

$$R_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{H - \sqrt{H^2 - K}} \quad \text{Maximum eğrilik yarıçapı}$$

$$R_2 = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{1}{H + \sqrt{H^2 - K}} \quad \text{Minimum eğrilik yarıçapı}$$

Bu quadratic yüzey üzerindeki bir \mathbf{P}_0 noktasından \mathbf{P}_1 noktasına giden normal kesit eğrisinin eğriliği Kartezyen koordinatlar üzerinden

$$\Delta x = x_1 - x_0 \quad \Delta y = y_1 - y_0 \quad \Delta z = z_1 - z_0$$
$$\theta = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) = \arctan \left(\frac{-\Delta x \sin \lambda + \Delta y \cos \lambda}{-\Delta x \sin \Phi \cos \lambda - \Delta y \sin \lambda \sin \Phi + \Delta z \cos \Phi} \right)$$

\mathbf{P}_0 noktasının coğrafi koordinatları (Φ, λ) noktanın kartezyen koordinatlarından (x_0, y_0, z_0) hesaplanabilir (URL-1).

Ana eğriliklerin doğrultuları da

$$(F g) \lambda^2 + (E g - G e) \lambda - F e = 0$$

Denkleminin köklerinden

$$r_{max} = \arctan(\lambda_1)$$

$$r_{min} = \arctan(\lambda_2)$$

hesaplanır. Eğriliği hesaplayabilmek için r_{min} minimum eğrilik doğrultusunun indirgenmesi gerekir.

$$W = \sqrt{EG - F^2}$$

$$r = \arctan \left(\frac{W \tan(r_{min})}{E + F \tan(r_{min})} \right)$$

Dönel elipsoid ve küre yüzeylerinde r_{min} ve r sıfır olurlar.

Ve Genel eğrilik formülü için Bektaş formülünü verebiliriz [32].

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \cos^2(\theta - r) \quad \text{Bektaş Formülü (*)}$$

(*) Bektaş, S (2016) "Generalized Euler Formula For Curvature", International Journal of Research in Engineering and Applied Sciences, Volume 6, Issue 3 (March, 2016) (ISSN 2249-3905)

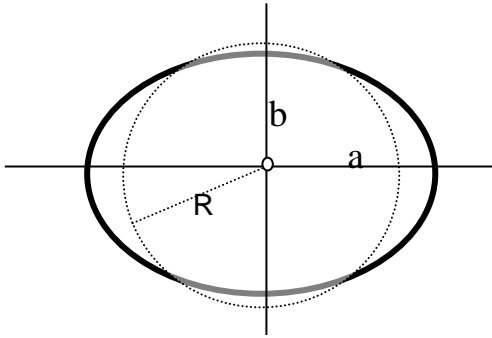
Elipsoid Yerine Kürenin Kullanılması

Daha önceki bölümlerde söylendiği gibi jeodezik çalışmalarda hesap yüzeyi olarak elipsoid yerine kürenin kullanılmasıyla doğruluktan bir miktar ödün vermekle beraber hesaplamalarda büyük kolaylık sağlanır. Jeodezik çalışma yapılan bölgenin büyüklüğüne ve istenen doğruluk derecesine göre elipsoidin tamamı yerine bir küre alınabileceği gibi biraz daha fazla doğruluk için elipsoidin küçük parçaları yerine de bir küre hesap yüzeyi olarak alınabilir. Örneğin çok küçük ölçekli haritaların (atlaslar gibi) yapımında ve özellikle

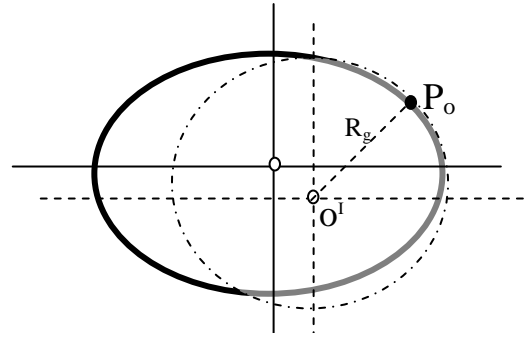
kartografik çalışmalar için elipsoidin tamamı yerine kürenin kullanılması son derece yeterli olur. Burada seçilecek kürenin elipsoide göre konumu ve yarıçapı önemlidir. Bu konuda iki farklı yaklaşım vardır.

Birinci yaklaşımda; elipsoidin merkezi ile kürenin merkezi çakıştırılır ve dünya elipsoidinin tamamı yerine bir küre kullanılır. Ancak bu şekilde elipsoidinin tamamı yerine bir kürenin alınmasında duyarlık düşük olur ve bu nedenle de bu yaklaşım jeodezik amaçlı çalışmalar için uygun olmaz.

İkinci yaklaşımda; sınırlı bir bölgede (yarıçapı 150km den küçük) yapılacak jeodezik çalışmalar için sadece o bölgede elipsoide en iyi uyan küre alınır. Doğaldır ki bu durumda küre ile elipsoidin merkezlerinin çakışması düşünülmez. Ölçü bölgesinin ortasında her iki yüzeyin en az bir ortak noktasının olması, eğriliklerin eşit olması ve bu noktadaki yüzey normallerinin çakışması yeterlidir. Jeodezik uygulamalarda sınırlı çalışma bölgelerinde genellikle Gauss küreleri kullanılmaktadır.



Şekil-12.a



Şekil-12.b

Yukarıdaki şekil-12.a da elipsoidin tamamı yerine kürenin alınması gösterilmektedir. Bu durumda elipsoid ile kürenin merkezi çakışmakla beraber, küre bazı enlemlerde elipsoide çok yakın (hatta teğet) olduğu halde bazı enlemlerde de elipsoidten büyük ölçüde uzaklaşır. Şekil-12.b de ise R_g yarıçaplı Gauss küresi çalışma bölgesinin ortalarındaki bir P_o noktasında elipsoide teğet duruma getirilmektedir.

a) Elipsoidin Tamamı Yerine Kürenin Kullanılması

Elipsoidin merkezi ile kürenin merkezinin çakışması ön koşuluyla elipsoid yerine alınacak kürenin yarıçapının belirlenmesi farklı kabullere göre yapılabilir. Aşağıda dört farklı kabule göre elipsoidin tamamı yerine kullanılacak küre

yarıçapının nasıl hesaplanacağı ve uluslararası Hayford elipsoidi parametrelerine göre R yarıçapının sayısal değerleri verilmiştir.

1) Yarıçapı elipsoid yarıçaplarının ortalaması olan küre;

Kürenin yarıçapı $R = \frac{2a + b}{3} = 6371229.31 \text{ m}$

2) Hacmi elipsoidin hacmine eşit olan küre;

Bir dönel elipsoidin hacmi $V_e = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Kürenin hacmi $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$

Buradan $\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{a^2 b} = 6371221.266 \text{ m}$

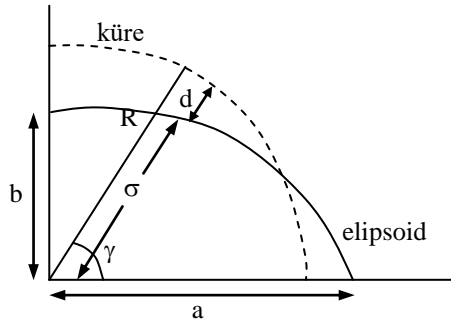
3) Alanı elipsoidin alanına eşit olan küre;

Dönel elipsoidin alanı $F_e = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots\right)$

Kürenin alanı $F_k = 4\pi R^2$

Alanların eşitliğinden; $R = a \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \dots\right) = 6371227.71 \text{ m}$

4) Elipsoidle arasındaki mesafelerin karelerinin toplamı minimum olan küre;



$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{1+e'^2 \sin^2 \gamma}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \gamma}}$$

Elipsoidle eşmerkezli ve R yarıçaplı küre arasındaki mesafeler $d_i = R - \sigma_i$ olur. Yukarıdaki koşul,

$$\sum_{\gamma=0}^{\pi/2} d_i^2 = \sum_{\gamma=0}^{\pi/2} (R - \sigma_i)^2 = \min$$

Buradan hesaplanacak R yarıçapı,

$$R = a \left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{7}{64}e^4 - \frac{17}{256}e^6 - \dots\right) = 6367636.39 \text{ m}$$

Örnek-1:

Hayford Elipsoidinin tamamı yerine bir küre kullanılmak isteniyor. Kürenin hacminin elipsoidin hacmine eşit olacağı ilkesinden hareket ederek söz konusu kürenin yarıçapını belirleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$R = \sqrt[3]{a^2 b} = 6371221.266m$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

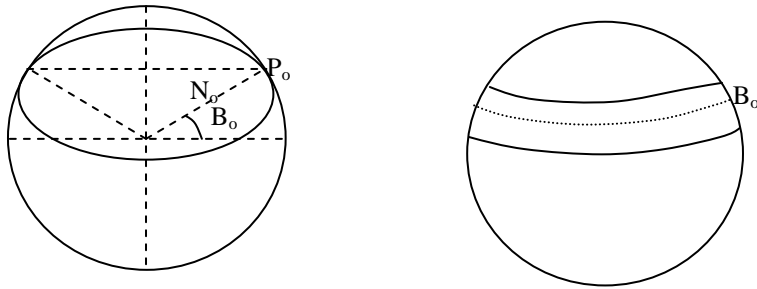
b) Elipsoidin Küçük Parçaları Yerine Kürenin Kullanılması

Elipsoidin tamamı yerine alınacak küre bazı enlemlerde elipsoide çok yakın (hatta teğet) olduğu halde bazı enlemlerde de elipsoidden büyük ölçüde uzaklaşır. Jeodezik uygulamalarda elipsoidin küçük parçaları yerine Soldner ve Gauss küreleri olarak adlandırılan küreler kullanılmaktadır.

1) Soldner Küresi

Çalışma bölgesinin ortasındaki bir P_0 noktasındaki ana eğrilik yarıçapı N_0 kürenin yarıçapı olarak alınır. Bu durumda küre, başlangıç noktasından geçen paralel daire boyunca elipsoide teğet olacaktır. Bu paralel daire dışında hiçbir noktada soldner küresi elipsoidi kesmez, teğet olmaz ve elipsoidi tamamen içine alır.

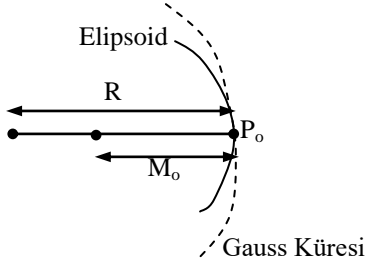
$$R_s = N_0$$

**2) Gauss Küresi**

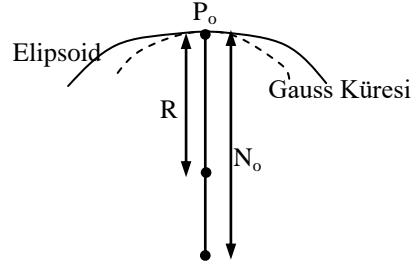
Gauss küresi, ölçü bölgesinin ortasındaki bir P_0 noktasında elipsoidle ortak bir noktaya sahiptir ve bu P_0 noktasında her iki yüzeyin normalleri çakışır. Gauss küresinin yarıçapı,

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} \text{ değeri alınır.}$$

M_o ve N_o elipsoidin P_o noktasındaki ana eğrilik yarıçaplarıdır.



Meridyen düzleminde



Meridyene dik ana normal kesit düzleminde

Şekilden de görüldüğü gibi Gauss küresi bir yönde elipsoidin dışında ve buna dik yönde elipsoidin içinde kalmaktadır. Burada iki yüzeyin birbirine 2. Dereceden teğet olması söz konusudur. Bu teğet P_o noktası civarında iki yüzey soldner küresine göre birbiri ile daha iyi uyum gösterir.

Eğrilik ölçütlerine bakıldığında,

$$\text{Elipsoid için} \quad ; K_e = \frac{1}{M_o N_o}$$

$$\text{Soldner küresi için} \quad ; K_s = \frac{1}{R_s^2} = \frac{1}{N_o^2}$$

$$\text{Gauss Küresi için} \quad ; K_g = \frac{1}{R_g^2} = \frac{1}{M_o N_o}$$

olduğu görülür. Yukarıdan Gauss küresi ile elipsoidin aynı eğrilikleri olduğu ortaya çıkmaktadır.

Yeryüzünün belli bir bölgesinde yapılacak jeodezik hesaplamalarda elipsoid yerine o bölge için hesaplanacak Gauss küresi kullanılır. Gauss küresi ile elipsoid çalışma bölgesinin ortalarındaki bir P_o noktasında birbirine yüzeysel teğettir. Gauss küresi ile elipsoid teğet noktada aynı eğriliğe sahip olup çalışma bölgesinde elipsoid yüzeyi ile çok iyi uyum sağlar. Çalışma yapılacak bölgenin 150 km yarıçaplı bir daireden büyük olmaması halinde çalışma bölgesinin ortalarındaki bir noktanın coğrafi enlemiyle hesaplanacak Gauss küresi hesap yüzeyi olarak alınabilir. Elipsoid yerine Gauss küresinin alınması nedeniyle hesaplamalarda ortaya çıkacak farklar ($<1\text{cm}$) pratik olarak ihmal edilecek düzeydedir. Gauss küresinin yarıçapı çalışma bölgesinin ortalarındaki bir P_o noktasının B_o coğrafi enleminde aşağıdaki gibi hesaplanır. [1],[4]

$$R_g = \sqrt{MN} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 B_0}$$

Yukarıdaki parametreler Hayford elipsoidi için;

Kutup noktası eğrilik yarıçapı $c = a^2 / b = 6\,399\,936.60811\text{m}$

Hayford elipsoidinin II.eksentrisitesi $e'^2 = 0.00676\,81701\,97224$

Örneğin $B = 39^\circ$ için Gauss küresinin yarıçapı $R_g = 6373882.243\text{m}$. olur.

Ülkemiz Enlemlerinde Kullanılacak Gauss Kürelerinin Yarıçapları

B	$N_{(m)}$	$M_{(m)}$	$R = \sqrt{MN}_{(m)}$
36°	6385808.231	6357644.977	6371711.044
39°	6386896.140	6360894.863	6373882.243
42°	6388009.135	6364220.834	6376103.891

Örnek -2:

Elipsoid yüzeyindeki bir P noktasının coğrafi koordinatları $B = 32^\circ 24' 45.62''$ ve $L = 39^\circ 12' 00''$ olarak verilmektedir. Bu P noktası için;

- Meridyen yönündeki eğrilik yarıçapını (M)
- Meridyene dik yöndeki eğrilik yarıçapını (N)
- Gauss küresi yarıçapını (R_g), Soldner küresi yarıçapını (R_s)
- Meridyenle $A = 45^\circ$ azimut açısı yapan doğrultudaki normal kesit eğrisinin eğrilik yarıçapını,
- P noktasındaki elipsoid normaliyile $\theta = 27^\circ$ açı yapan doğrultudaki eğik kesitin eğrilik yarıçapını ve eğriliğini, aynı doğrultudaki jeodezik eğrinin eğriliğini,
- Söz konusu P noktasından diferansiyel anlamda uzak ($dB = 2''$ ve $dL = 3''$) olan Q noktası arasındaki PQ jeodezik eğri uzunluğunu,
- P noktasının üç boyutlu dik koordinatlarını kontrollü olarak hesaplayınız.

Çözüm:

$$B = 32^\circ 24' 45.62'' = 32.41267222 \quad L = 39^\circ 12' 00'' = 39.2000000$$

$$c = 6399936.608\text{m} \quad e'^2 = 0.00676817019$$

$$V = (1 + e^2 \cos^2 B)^{1/2} = 1.002408901$$

a) Meridyen yönündeki eğrilik yarıçapı $M = c / V^3 = 6353908.101\text{m}$

b) Meridyene dik yöndeki eğrilik yarıçapı $N = c / V = 6384556.843\text{m}$

c) Gauss küresi yarıçapı $R_g = c / V^2 = \sqrt{MN} = 6369214.037\text{m}$

Soldner küresi yarıçapı $R_s = N = 6384556.843\text{m}$

d) Meridyenle $A = 45^\circ$ azimut açısı yapan doğrultudaki normal kesit eğrisinin eğrilik yarıçapı

$$R_A = \frac{MN}{M \sin^2 A + N \cos^2 A} = 6369195.603\text{m}$$

Eğrilik,

$$K_A = 1 / R_A = 1.57 \times 10^{-7}$$

e) P noktasındaki elipsoid normaliyle $\theta = 27^\circ$ açı yapan doğrultudaki eğik kesitin eğrilik yarıçapı

$$r = R_A \cos \theta \quad \text{Meusnier teoremi}$$

$$r = 5674994.836\text{m}$$

$$K = 1 / r = 1.762 \times 10^{-7}$$

eğik kesit eğrilik yarıçapı

eğik kesitin eğriliği

Aynı doğrultudaki jeodezik eğrinin eğriliği K_g ,

$$K_g = K_A \tan \theta = K \sin \theta = 8 \times 10^{-8}$$

f) Söz konusu P noktasından diferansiyel anlamda uzak ($dB = 2''$ ve $dL = 3''$) olan Q noktası arasındaki PQ jeodezik eğri uzunluğu

Çözüm için I. Temel Form eşitliğinden yararlanabiliriz.

$$I = ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2$$

$$dB = 2'' \quad \text{ve} \quad dL = 3''$$

$$B = 32^\circ 24' 45.62'' = 32.41267222$$

$$M = 6353908.1010$$

$$N = 6384556.843\text{m}$$

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2 = 9941.154\text{m}^2$$

$$PQ = ds = 99.705\text{m}$$

g)P noktasının üç boyutlu dik koordinatları

$$X = N \cos B \cos L = 4176875.523\text{m}$$

$$Y = N \cos B \sin L = 3406576.552\text{m}$$

$$Z = N(1-e^2) \sin B = 3399202.429\text{m}$$

olur.

Kontrol amacıyla Z değeri için, daha önce bulunan X ve Y değerleri elipsoid denkleminde yerine konursa $Z = [(1-e^2)(a^2-X^2-Y^2)]^{1/2} = 3399202.43\text{m}$ olur.

5. YATAY KONTROL (NİRENGİ) NOKTALARI

Jeodezinin en önemli uğraşlarından biri, fiziksel yeryüzünde yeterli sıklıkta üç boyutlu koordinatları bilinen dayanak (nirenge) noktaları üretmektir. Tüm jeodezik çalışmalarda bu dayanak noktalarından yararlanır. Söz konusu dayanak noktalarının tümünün bir kerede ve aynı doğrulukta üretilmesini beklemek ekonomik olmadığı gibi teknik olarak da fazla bir yarar getirmez. Bu nedenle dayanak noktaları aşama sıralı (hiyerarşik) bir yapıda üretilir[4].

Ulusal Temel Jeodezik Ağlar ve Jeodezi Çalışmaları

Ülkemizde, nirengeye dayalı modern harita yapımına 1895 yılında başlanmıştır. 1942 yılında yapımına başlanılan ülke temel yatay kontrol ağının 1953 yılında tesis ve ölçüleri tamamlanmış, 1954 yılında uluslararası elipsoid (Hayford elipsoidi) üzerine, Lambert konik konform projeksiyon sisteminde bilinmeyenler arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler yöntemine göre, Meşedağ noktası başlangıç alınarak dengelenmiştir. Bu ağda 786 adet birinci derece, 98 adet laplace noktası ile 40 adet baz mevcuttur. Dengeleme sonunda TD-54 datumu oluşturulmuştur. 27 poligon zincirinden oluşan temel yatay kontrol ağı, ülkenin batısında bulunan 8 nokta kullanılarak iki boyutta Avrupa datumuna (ED-50) dönüştürülmüştür. 1,2,3 ve 4 üncü derece olarak sınıflandırılan temel ağ'da sonraları sıklaştırma çalışmaları yapılmış, bugüne kadar yaklaşık 205 000 adedi Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü, 45 000 adedi de Harita Genel Komutanlığı tarafından olmak üzere toplam 250 000 adet nokta üretilmiştir.

NİRENGİ NOKTASI	KENAR UZUNLUĞU	NOKTA SAYISI
1.DERECE	35 km	786
2.DERECE	15-25 km	3320
3.DERECE	3-5 km	55000
4.DERECE	1-3 km	120000

Her tür ölçekte harita üretiminin temelini oluşturan ülke jeodezi ağları, gelişen teknolojiye paralel üretime giren ölçme sistemi ve yöntemleri, giderek artan ve değişen talepler sonucu beklenen duyarlık ve güvenilirlik isteklerine cevap vermemektedir. Uydu jeodezisinin modern yöntemleri, jeodeziye, klasik jeodezik tekniklerle şimdiye kadar erişilemeyen yeni olanaklar ve hedefler getirmiş ve bu hedeflere hızlı, verimli ve ekonomik yoldan ulaşma imkanı sağlamıştır. Uydu jeodezisinin getirdiği olanaklardan yararlanarak en kısa zamanda yeni bir temel jeodezik ağ oluşturulması zorunlu görülerek TKGM tarafından HGK ile ortak yürütülen "Türkiye Ulusal Temel GPS Ağı-TUTGA Projesi" 1997-2000 yılları arasında gerçekleştirildi.

Teknik yönetmelik BÖHHBÜY; haritalardaki konum bilgilerinin, Türkiye Ulusal Temel GPS Ağı (TUTGA) koordinat sistemine dayalı üç boyutlu kartezyen koordinatlar (X,Y,Z) veya GRS80 elipsoidinde jeodezik koordinatlar (enlem, boylam, elipsoit yüksekliği) olarak belirlenmesi gerektiğini emretmektedir.

BÖHHBÜY'ün 8.Maddesinde noktaların hiyerarşik sınıflandırılması:

a) Uzay ve uydu teknikleriyle oluşturulan üç boyutlu ağların ve noktaların derecelendirilmesi aşağıdaki gibidir :

- 1) A Derece Ağlar ve Noktalar : Global (ITRF, WGS84) ve bölgesel (ETRF) ağlar ve noktalarıdır.
- 2) B Derece Ağlar ve Noktalar : Uluslararası veya bölgesel ağlara dayalı Ulusal GPS ağı ve noktalarıdır (TUTGA).
- 3) C Derece Ağlar ve Noktalar : B derece ağın sıklaştırılması ile oluşan ağlardır ve aşağıdaki alt dereceli ağ ve noktalardan oluşur:
- 4) C1 Derece Ağlar ve Noktalar : Üst derecedeki ağlara dayalı, baz uzunluğu 15-20 km olan ağ ve noktalarıdır (Ana GPS Ağı ve noktaları : AGA).
- 5) C2 Derece Ağlar ve Noktalar : Üst derecedeki ağlara dayalı, ortalama kenar uzunluğu 5 km olan ağ ve noktalarıdır (Sıklaştırma GPS Ağı ve Noktaları: SGA).
- 6) C3 Derece Ağlar ve Noktalar : Üst derecedeki ağlara dayalı, en büyük baz uzunluğu 3 km olan ağ ve noktalarıdır (Alım için Sıklaştırma Ağı ve Noktaları: ASN).
- 7) C4 Derece Ağlar ve Noktalar : Üst derecedeki ağlara dayalı poligon ağı ve noktaları ile poligon bağlanabilen fotogrametrik noktalarıdır.

b) Türkiye Yatay Kontrol (Nirengi) Ağı ve bu ağa dayalı olarak yersel tekniklerle üretilen ağların derecelendirilmesi aşağıdaki gibidir :

- 1) I. Derece Ağ ve Noktalar: Kenar uzunluğu 25-35 km olan noktalar.
- 2) II. Derece Ağ ve Noktalar: Kenar uzunluğu 10-30 km olan noktalar.
- 3) III. Derece Ağ ve Noktalar: Kenar uzunluğu 4-15 km olan noktalar ile BÖHY'ye göre oluşturulan ortalama 5 km kenar uzunluğundaki III. Derece ağlar ve noktaları.
- 4) IV. Derece Ağ ve Noktalar: BÖHY'ye göre oluşturulan ara, tamamlayıcı ve dizi nirengi noktaları.
- 5) V. Derece Ağ ve Noktalar: Poligon ağları ve noktaları.

Dizi Nirengi: Çıkış veren nirengiler arasında tesis edilecek poligon hesabı ile belirlenen noktalardır, yeteri kadar çıkış sağlanamayan ormanlık ve benzeri yerlerde tamamlayıcı nirengi yerine dizi nirengi tesis edilebileceği, dizi nirengi güzergahlarının olabildiğince gergin ,kenar uzunluklarının 800m ile 1500m arasında toplam güzergah uzunluğu 7km den kısa ve güzergahtaki nirengi sayısı 7 den az olmalıdır (Madde 44,45).

Dizi nirengilerin koordinat hesapları dayalı poligon hesabındaki esaslara göre yapılır.

Dizi nirengilerde;

Açı kapanma hatası:

$$F_{\beta} = 60^{cc} + 20^{cc} \sqrt{n}$$

Enine hata (metre):

$$F_Q = 0.05 + 0.07 S_{km}$$

Boyuna hata (metre):

$$F_L = 0.05 + 0.10 \sqrt{n-1} \quad (n: \text{açı ölçümü yapılan nokta sayısı})$$

formüllerinin verdiği değerden daha büyük olamaz.

Hiyerarşik yapı gereği, önce üst derece nirengi ağ noktaları tesis edilir, gerekli jeodezik ölçümler yapılarak ağ noktalarının belirli bir sistemde koordinatları dengelemeli olarak belirlenir. Bir alt derece ağın noktaları, üst derece ağ noktalarını sıklaştıracak şekilde tesis edilir ve koordinatlarının hesabında kendinden daha önce hesaplanmış üst seviyedeki noktaların koordinatlarından (hatasız oldukları kabul edilerek) yararlanır. Üst derece ağ noktalarının daha duyarlı olmaları doğaldır. Bunun için üst derece ağ noktaları için yapılan ölçülerin daha duyarlı olması gerekir. Teknik yönetmelikler hangi ağ seviyesinde ölçülerin ne kadar duyarlıkta yapılması gerektiğini ve hesaplama standartlarını belirlerler. Ülkemizde; yukarıda sözü edilen nirengi noktalarından I.derece, II.derece ve kısmen III.derece nirengi noktalarının dengelenmesi tamamlanmış olup alım için sıklaştırma amacıyla atılan üçüncü derece ve dördüncü derece nirengi noktalarının koordinatları daha üst seviyedeki nirengilerden yararlanarak hesaplanmaktadır.

Nirengi ağları, ülke ölçmeleri dışında lokal harita gereksinimleri, büyük mühendislik yapılarındaki olası deformasyonları ve depremlerin önceden kestirilmesine yönelik olarak yer kabuğu hareketlerinin izlenmesi amacıyla bağımsız olarak da tesis edilirler. Bir bölgede nirengi ağının oluşturulması için; önce istikşaf (noktaların yerlerinin seçimi) yapılır. Sonra inşaat (noktaların zemin ve zemin üstü işaretlerinin yapımı) işleri tamamlanır. İstikşaf işlemi için bölgenin daha önce yapılmış küçük ölçekli bir haritası varsa kurulacak nirengi ağının biçimine ve yeni nirengi noktalarının nereye atılacağına bu harita üzerinde karar verilir. Büroda yapılan bu çalışmaya ön seçim denir [22]. Ön seçimle belirlenen geçici ağ biçimi ve nokta yerleri, daha sonra arazideki koşullara uygunluğu (örneğin noktaların birbirini görüp görmediği) bizzat mahallinde kontrol edilir ve gerekli düzeltmeler yapılır. Klasik yersel Nirengi ağlarında nokta yerlerinin seçiminde aşağıdaki hususlar gözetilir:

- Nirengi noktalarının oluşturacağı şekil (ağ) çalışma alanını kaplamalı ve bir miktar da dışına taşmalıdır.
- Birbirine yakın noktalar arasında görüş olanağı olmalıdır.
- Noktaların olabildiğince eşkenar üçgen oluşturmalarına özen gösterilmeli ve hiçbir zaman 36 graddan küçük açılı üçgen bulunmamalıdır.
- Üçgen kenarları bölgesel koşulların elverdiği ölçüde uzun ve birbirine olurunca eşit seçilmelidir.
- Noktalar sağlam zeminlerde seçilmeli, zemin ve zemin üstü işaretleri yerleştirilerek röperlenmelidir.
- Yerleşme bölgeleri ve ağaçlık alanlar gibi görüş olanaklarının az ve güç olduğu bölgelerde görüş olanağı yüksek minare, kule, anten tesisleri, bina üstleri nirengi noktası olarak seçilmelidir.
- Bölgede önceden tesis edilmiş nirengi noktalarından uygun konumda olanlardan yararlanılmalıdır.
- Hiyerarşik sırada önce ana daha sonra ara nirengi noktalarının seçimi yapılmalıdır.

Nirengi noktalarının tesisinden sonra ağda gerekli açı ve uzunluk ölçüleri yapılır, ağda en az koordinatı bilinen iki nokta yoksa ağın yönlendirilebilmesi için semt ölçüsü de yapılır. Bütün bu işlemlerin nasıl yapılacağı teknik yönetmelikte belirlenmiştir. Örnek nirengi kanavasını şekli EK:10 da verilmiştir.

Bir bölgede nirengi ağı tesis edilirken çalışma bölgesinin büyüklüğü hesap yüzeyini belirler. Genişliği ya da uzunluğu 10km yi geçmeyen yerel ağlarda hesap yüzeyi düzlemdir. Bu tip ağlarda hesaplama yapılırken yerin şekli düzlem alınmakta ve tüm ölçülerin düzlemde yapıldıkları varsayılmaktadır.

Boyutları 10 km den daha büyük ya da ülke ağına dayanmaları zorunlu olan büyük bölgesel ağlarda hesap yüzeyi elipsoid olup ağ noktalarının Gauss-Krüger

projeksiyon yüzeyindeki düzlem dik koordinatları hesaplanır. Doğaldır ki bu tip ağlarda önce ölçüleri elipsoid yüzeyine ardından da projeksiyon yüzeyine indirgeyip hesaplamaya başlanmalıdır. Ölçülerin Gauss-Krüger projeksiyon düzlemine nasıl indirgeneceği Harita Projeksiyonları bölümünde gösterilmiştir.

5.1 Nirengi Ağlarının Konum, Ölçek Ve Yönünün Belirlenmesi

Bir nirengi ağındaki noktaların koordinatlarının hesaplanabilmesi için yalnız yatay doğrultu ve uzunluk ölçüleri yeterli değildir. Ağın datum parametreleri dediğimiz konumu ölçeği ve yönünün de belirli olması gerekir. Genelde nirengi ağlarında yapılan klasik ölçüler (yatay doğrultu ve kenar ölçüleri GPS ölçüleri hariç) bu datum parametrelerinin tamamını belirlemez. Diğer bir deyişle yapılan ölçüler nirengi ağının bir koordinat sisteminde tanımı için gerekli bilgilerin tamamını içermez.

Bu datum parametreleri; nirengi ağlarında dört tanedir (koordinat eksenleri yönünde 2 öteleme, 1 ölçek ve 1 dönüklükten ibarettir). Bir nirengi ağında koordinatı bilinen (sabit) iki nokta olması halinde ağın konumu,yönü ve ölçeği kendiliğinden belirlenmiş olur.

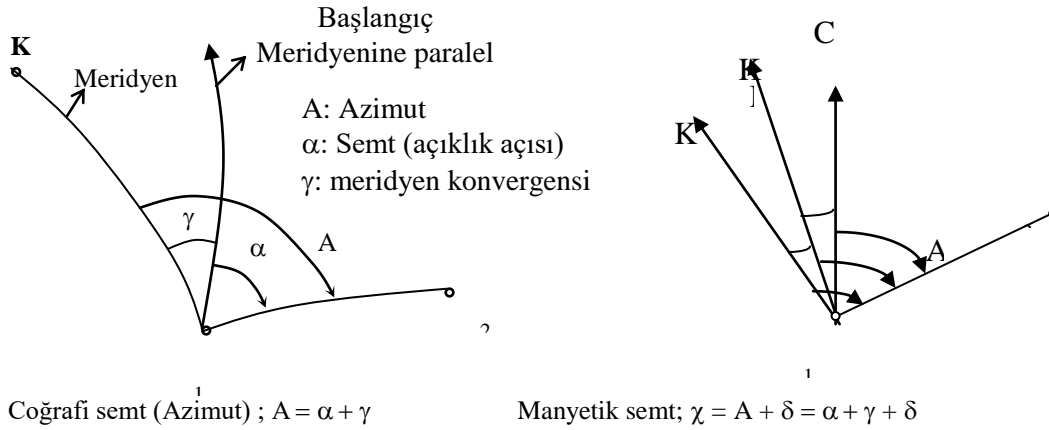
Ağın Ölçeğinin Belirlenmesi: Ağda yapılan doğrultu ölçüleri ağın büyüklüğü hakkında hiçbir bilgi vermez. Bu nedenle nirengi ağının en az bir kenarı ölçülmüş olmalıdır. Bu ölçülen kenara baz adı verilir. Ağın diğer kenarları bu bazdan yararlanarak hesaplanır. Nirengi ağının konum doğruluğunu yükseltmek için bütün üçgen açıları ve ağda uygun şekilde dağılmış olabildiğince fazla sayıda kenarın ölçülmesi gerekir.

Ağın Yönünün Belirlenmesi: Ağda yapılan doğrultu ve kenar ölçüleri ağın yönü hakkında hiçbir bilgi vermez. Bu nedenle nirengi ağında en az bir kenarın semtinin (kuzeyle yaptığı açının) bilinmesi gerekir. Bu semt belirleme işlemi genellikle ağda koordinatları bilinen noktalardan yararlanarak bulunur. Ağda koordinatları bilinen en az iki nokta yoksa semt belirleme işlemi güneşe ya da yıldızlara yapılan astronomik gözlemlerle ağdaki bir kenarın semti belirlenir. Bu da yapılamıyorsa ağdaki bir kenarın kuzeyle yaptığı açı bir pusula ile belirlenir.

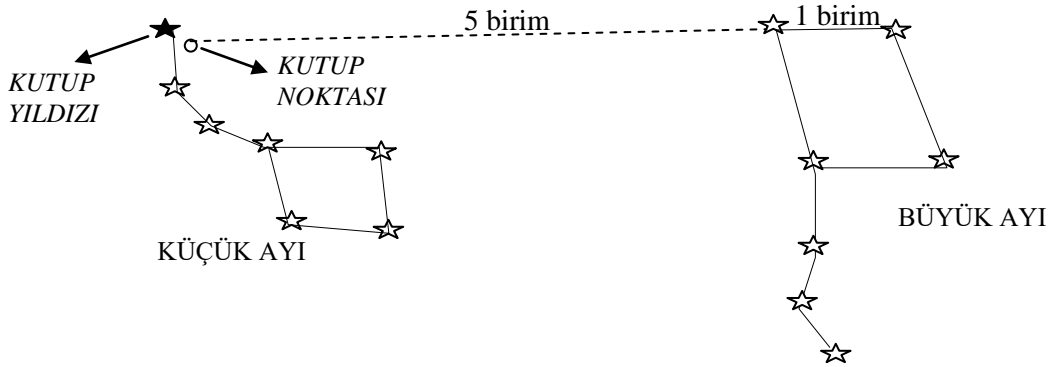
Semt Belirleme

Nirengi ağlarının yönlendirme işlemi kuzey yönünden itibaren yapılır. Çeşitli kuzey doğrultuları bulunduğundan doğruların bunlarla oluşturduğu semt açıları da çeşitli adlar alır. Üç çeşit semt açısı vardır. Bunlar;

- 1- Coğrafi (Astronomik) semt açısı,
- 2- Jeodezik semt açısı,
- 3- Manyetik semt açısıdır.



Coğrafi semt açısı, Her hangi bir noktanın coğrafi (astronomik) kuzeyi (CK), o nokta ile yer küresinin kutup noktalarından geçen boylam dairesinin kuzey yönüdür. Buna göre aynı boylam dairesi üzerindeki bütün noktaların kuzey yönü aynıdır. Bir doğrunun bir ucundaki semt açısı, doğrunun o ucundan geçen boylam dairesi ile doğrunun saat ibresi yönünde oluşturduğu açıdır ve *Azimut açısı* (A) adını alır. Astronomik semt tayininde, genellikle coğrafi kutup noktasına çok yakın olan kutup yıldızının ya da her hangi bir yıldızın veya güneşin, bulunduğumuz noktanın meridyen dairesinden geçiş anındaki yönü ile tespit edilir.



Kutup yıldızı kuzey kutbuna en yakın olan, oldukça parlak, Küçük Ayı yıldız grubunun kuyruğundaki son (üçüncü) yıldızdır. Kutup yıldızı, Büyük Ayı yıldız grubunun kepçesinin altındaki iki yıldızı birleştiren doğrunun yaklaşık olarak uzantısında ve bu iki yıldız arasındaki uzaklığın beş katı kadar uzaklıktadır[21],[24].

Jeodezik semt açısı, Dünyamız küreye benzediği için, boylam daireleri birbirine paralel olmayıp kutuplara doğru birbirlerine yaklaşır. Bu nedenle değişik boylam daireleri üzerinde bulunan noktaları birleştiren doğruların iki ucundaki kuzey yönleri birbirine paralel değildir. Her hangi bir boylam dairesini X eksen

olarak kabul eden bir dik koordinat sisteminde (örneğin soldner koordinat sistemi), başlangıç boylamından (orta meridyenden) doğuya ve batıya doğru uzaklaştıkça coğrafi kuzey ile karelaj-grid kuzeyi (paftanın yukarı yönü) arasında bir açı oluşur. Bu açı meridyen yakınsaması(meridyen konvergensi) açısıdır ve γ ile gösterilir. Bir P_1P_2 doğrusunun jeodezik semt açısı ya da kısaca semt açısı $\alpha = (P_1P_2)$ ile gösterilir. Düzlem jeodezide X eksenini meridyenle çakışık olarak düşünüldüğü için meridyen yakınsaması sıfırdır dolayısıyla azimut açısı semt açısına eşit olur.

Manyetik semt açısı, Bir doğrunun manyetik kuzey ile oluşturduğu açıdır. Manyetik kuzey doğrultusu (MK) pusula ile belirlenir. Manyetik semt açısı χ ile gösterilir. Manyetik kuzey genellikle astronomik kuzey ile çakışmaz, aralarında pusula sapması (manyetik deklinasyon) denilen ve δ ile gösterilen açı oluşur. Pusula sapması açısı değişik yerlerde değişik yön gösterebilir. Ayrıca pusula sapması günlük ve senelik değişimler gösterir. Senelik değişme ortalama olarak 6-7 dakika civarındadır.

Ağın Konumunun Belirlenmesi

Nirengi ağının konumunun belirli olabilmesi için ağda en az bir noktanın koordinatının bilinmiş olması gerekir. Eğer bu koşul sağlanamıyorsa ağdaki bir noktanın koordinatları keyfi olarak alınır örneğin $Y_1=50\ 000m$, $X_1=50\ 000m$ gibi. Bu keyfi koordinat belirleme işleminde ağdaki tüm noktaların koordinatlarının pozitif olabilmesine dikkat edilir. Ağdaki bir noktanın yukarıdaki gibi koordinatlarının keyfi olarak belirlenmesi durumunda aynı zamanda keyfi bir koordinat sistemi tanımlanmış olmaktadır. Bu nedenle böyle nirengi ağlarında hesaplanacak nokta koordinatları da yerel (lokal) koordinatlar olacaktır. Söz konusu bu nirengi ağ noktalarının başka bir nirengi ağına örneğin ülke nirengi ağına bağlanmaları söz konusu olduğunda bir koordinat dönüşümü yapılarak yerel koordinatlar ülke koordinatlarına dönüştürülür.

6. ELİPSOİDDE JEODEZİK HESAPLAMALAR

Ülke ölçmeleri söz konusu olduğunda seçilecek referans yüzeyi dönel elipsoiddir. Nirengi noktalarının yatay koordinatları (B,L veya Y,X) elipsoid üzerinde hesaplanırken, noktaların düşey konumu için elipsoid referans yüzeyi olarak alınmaz, noktaların jeoidden itibaren çekül doğrultusu boyunca (H) ortometrik yükseklikleri hesaplanır. Elipsoid üzerinde jeodezik hesaplamalar yapılırken noktaları en kısa yoldan tek anlamlı olarak birleştiren *jeodezik eğri* kenarlar esas alınır. Elipsoid üzerinde jeodezik hesaplamaların yapılabilmesi için fiziksel yeryüzünde yapılan gözlemlerin elipsoid yüzeyine indirgenmeleri gerekir. Söz konusu ölçümlerin elipsoid yüzeyine nasıl indirgeneceği Yatay Kontrol Ağları bölümünde anlatılmıştır.

6.1 Dönel Elipsoidin Yerleştirilmesi ve Yöneltilmesi

Ülke nirengi ağları için hesap yüzeyi olarak dönel elipsoid seçilir. Böyle bir dönel elipsoidin boyutları, ya dünyanın gerçek şekli olarak tanımlanan jeoidin tüm yüzeyine en uygun varsayılan bir elipsoidin boyutları, ya da nirengi ağının bulunduğu ülkedeki jeoid kesimine en uygun bir elipsoidin boyutlarıdır. Bu ikinci özellikteki elipsoidin boyutlarını bulmak ve jeoide göre konumunu belirlemek daha güç olduğu ve pratik gereksinimler için fazla yarar sağlamadığı için genellikle birinci özelliği taşıyan elipsoid hesap yüzeyi olarak alınır. Bu nedenle ülkemizde de uluslararası Hayford elipsoidi kullanılmaktadır[1],[28].

Hesap yüzeyi olarak alınan yukarıdaki elipsoidin jeoide göre konumunu belirlemek için, ülkenin ortalarına düşen bir nirengi noktasında, jeoid normal (çekül doğrultusu) ile elipsoid normal karşılaştırılır. Çakıştırma işlemi bu noktada (ülkemizde Meşedağı noktası) astronomik gözlemlerle belirlenen astronomik enlem ve boylamın (Φ , Λ) nın elipsoidal enlem ve boylam (B , L) ye eşit alınması ile sağlanır. Bunun yanında başlangıç noktasından başka bir nirengi noktasına giden kenarın astronomik gözlemlerle bulunan A astronomik azimutu (kenarın kuzey doğrultusu ile saat ibresi yönünde yaptığı açı), elipsoid yüzünde düşünülecek bu kenar için α elipsoidal azimutu olarak alınır. Böylece nirengi ağı yönlendirilmiş olur. Özet olarak, başlangıç noktasında astronomik enlem ve boylamın elipsoidal enlem ve boylam alınması ($B = \Phi$, $L = \Lambda$) ve bu noktadaki jeoid yüksekliği de sıfır ($N_j = 0$) alınmak suretiyle referans elipsoidi

jeoide teğet hale getirilir ve bu noktada ε çekül sapması sıfır olur. Referans elipsoidinin dönme ekseninin yeryuvarının dönme eksenine paralelliği yine başlangıç noktasından bir diğer nirengi noktasına giden kenarın astronomik azimutu elipsoidal azimut ($\alpha = A$) alınarak nirengi ağı yönlendirilmiş olur. Başlangıç noktasında çekül sapması bileşenleri ve jeoid yüksekliği sıfır olur. ($\xi = \eta = \varepsilon = N = 0$)

6.2 Elipsoid Yüzeyine İzdüşümler

Fiziksel yeryüzü üzerindeki bir P noktası doğal koordinatlar olarak da adlandırılan yerin gravite alanıyla ilgili astronomik enlem (Φ), boylam (Λ) ve ortometrik yüksekliğinin (H) verilmesiyle tanımlanabilir[12].

(Φ, Λ, H) doğal koordinatlarından (B, L, h) elipsoidal coğrafi koordinatlarının eldesi için,

$$\begin{aligned} B &= \Phi - \xi \\ L &= \Lambda - \eta \sec B \\ h &= H + N \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılır. Burada;

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - B && : \text{Çekül sapmasının kuzey-güney bileşeni} \\ \eta &= (\Lambda - L) \cos B && : \text{Çekül sapmasının doğu-batı bileşeni} \\ \varepsilon^2 &= \xi^2 + \eta^2 && : \text{Çekül sapmasıdır.} \end{aligned}$$

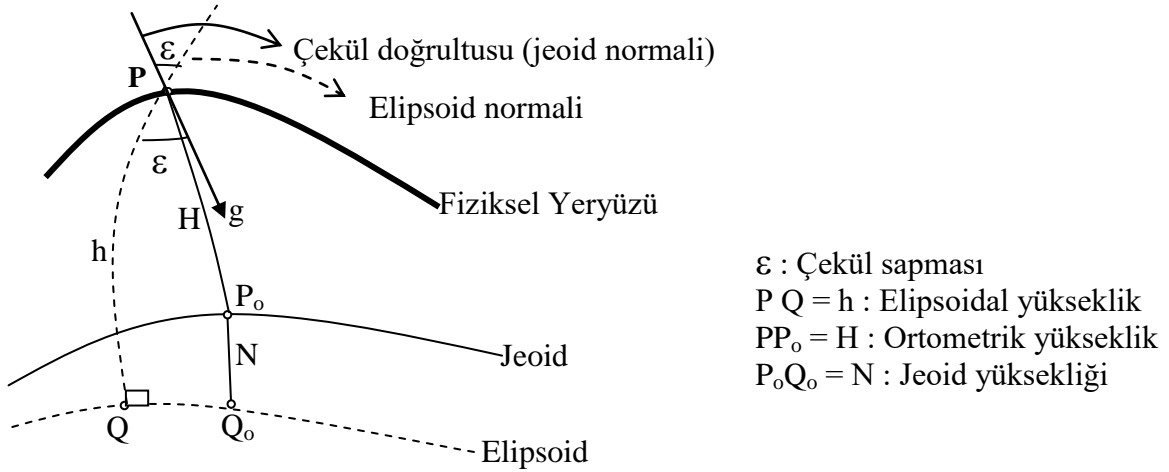
Fiziksel yeryüzündeki P noktasının elipsoid üzerindeki karşılığını bulmak diğer bir deyişle elipsoid yüzüne indirgemek iki farklı şekilde mümkündür. Bunlar *Helmert izdüşümü* ve *Pizetti izdüşümü* dür.

a) Helmert İzdüşümü :

Bu yöntemde fiziksel yeryüzündeki P noktası elipsoid normali yardımıyla elipsoid üzerinde Q noktasına indirgenir (şekil-1).

b) Pizetti İzdüşümü :

Bu yöntemde ise P noktası önce çekül eğrisi boyunca jeoid üzerinde P_0 noktasına daha sonra jeoid üzerinden elipsoid üzerindeki Q_0 noktasına indirgenir (şekil-1).



Şekil-1 Elipsoid yüzeyine izdüşümler

Bu yöntemlerden Helmert yönteminde P arazi noktası h elipsoidal yüksekliğiyle doğrudan elipsoid üzerindeki Q noktasına, Pizetti yönteminde ise P arazi noktası önce H ortometrik yüksekliğiyle jeoid üzerinde P₀ noktasına sonra da N jeoid yüksekliğiyle elipsoid üzerindeki Q₀ noktasına izdüşürülmektedir. Şekil-1 de görüldüğü gibi her iki yöntemde elipsoid üzerinde Q ve Q₀ gibi iki farklı nokta elde edilmekle beraber bu iki nokta arasındaki fark $QQ_0 \approx \varepsilon H \approx \varepsilon h$ pratikte ihmal edilebilecek düzeydedir.

Helmert ve Pizetti yöntemiyle elde edilen elipsoidal koordinatların birbiriyle ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$B_{\text{Helmert}} = B_{\text{pizetti}} + \frac{H}{R} \xi$$
$$L_{\text{Helmert}} = L_{\text{pizetti}} + \frac{H}{R} \eta \sec B$$

Bu yöntemlerden Helmert izdüşüm yöntemi basitliği ve global kartezyen dik koordinatlar (X,Y,Z) ile elipsoidal koordinatlar (B,L,h) arasında direkt dönüşüme izin vermesi nedeniyle jeodezide daha çok kullanılmaktadır.

6.3 Ölçülerin Elipsoid Yüzeyine İndirgenmesi

Elipsoid yüzeyinde hesap yapabilmek için ölçülerin elipsoid yüzeyinde verilmesi gerekir. Oysa ölçmeler fiziksel yeryüzünde yapılmaktadır. Bu nedenle ölçülerin elipsoid yüzeyine (deniz seviyesine) indirgenmesi gerekir [4]. Elipsoid yüzeyi ile deniz seviyesi teorik olarak farklı olmakla beraber pratik jeodezi uygulamaları için bu fark rahatlıkla göz ardı edilir.

a) Yatay Doğrultuların Elipsoid Yüzüne İndirgenmesi

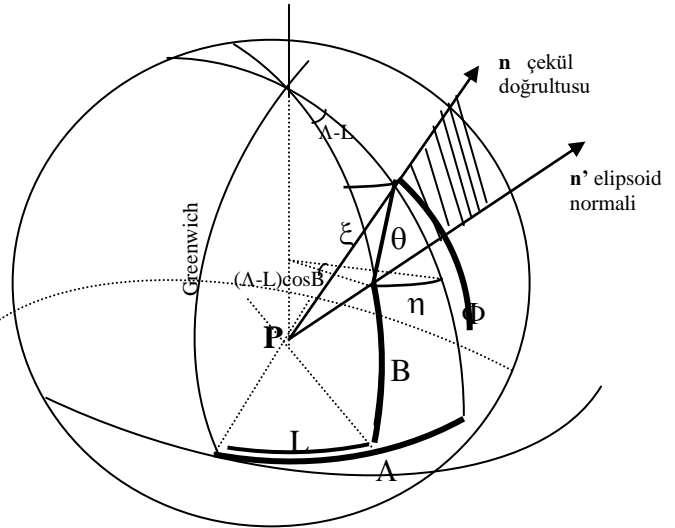
Fiziksel yeryüzünde P_i ve P_k gibi iki nokta arasında gözlenen r'_{ik} yatay doğrultusunun bu noktaları elipsoid yüzünde temsil eden Q_i ve Q_k noktalarını birleştiren jeodezik eğri kenarın yatay doğrultusu r_{ik} ya indirgenmesi gerekir. Bu işlem üç aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada gözlenen r'_{ik} doğrultusuna çekül sapması indirgemesi sonra hedef noktası yüksekliği indirgemesi ve normal kesit eğrisinden jeodezik eğriye geçiş indirgemesi yapılır.

Çekül Sapması Nedeniyle Uygulanacak İndirgeme

Bir P_i durak (istasyon) noktasından P_k hedef noktasına yapılan r'_{ik} yatay doğrultu gözleminde çekül doğrultuları (jeoid normalleri) esas alındığından jeoid normal kesit eğrisinin doğrultusu elde edilir. Oysa istenen elipsoid yüzünde bu noktaları birleştiren jeodezik eğri kenarın doğrultusudur.

Çekül sapması bilindiği gibi bir noktadaki elipsoid normalini ile

çekül doğrultusu arasındaki θ açıdır. Elipsoidin fiziksel yeryüzünde bulunmadığı ve farklı elipsoidlerin kullanılabilceği gözönüne alınırsa çekül sapmalarının mutlak anlamda olmadığı ortaya çıkar. Bu nedenle çekül sapmalarına bağıl çekül sapmaları da denir. Bir noktadaki çekül doğrultusu astronomik gözlemlerle belirlenir. Elipsoid normalini ise jeodezik ölçüler yardımıyla belirlenir. Merkezi P noktasında olan bir küre yardımıyla çekül sapmasının açıklanması yandaki şekilde görünmektedir.



Şekilde;

Φ, Λ : P noktasının astronomik enlem ve boylamı

B, L : P noktasının elipsoidal (coğrafi) enlem ve boylamı

$$\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} : P \text{ noktasındaki çekül sapması}$$

$$\xi = \Phi - B : \text{çekül sapmasının güney-kuzey doğrultusundaki bileşeni}$$

$\eta = (\Lambda - L) \cos B$: çekül sapmasının doğu-batı doğrultusundaki bileşenini göstermektedir.

Bir P_i noktasındaki θ çekül sapmasının α açıklık açısındaki bir doğrultudaki bileşeni

$$\varepsilon_\alpha = \xi_i \cos \alpha + \eta_i \sin \alpha$$

şeklinde hesaplanır.

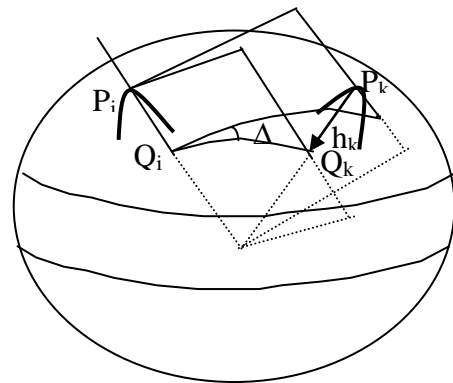
Bir noktada bağıl çekül sapması θ , ya da bunun güney-kuzey doğrultusundaki ξ bileşeni ile doğu-batı doğrultusundaki η bileşeni biliniyorsa, i durulan nokta, k bakılan nokta indisi olmak üzere ölçülen doğrultu açısına çekül sapması nedeniyle getirilecek düzeltme

$$(\Delta r_{ik})_\zeta = \eta_i \tan B_i + (\xi_i \sin \alpha_{ik} - \eta_i \cos \alpha_{ik}) \frac{h_k - h_i}{S_{ik}}$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada h , ilgili noktaların denizden yüksekliği, S iki nokta arasındaki uzaklık, α_{ik} doğrultunun azimutu, B_i ise P_i noktasının elipsoidal enlemidir. Bu indirgeme eşitliğine bakıldığında birinci terimin bir durak noktasından bakılan bütün hedef noktaları için aynı olduğu için etkisizdir. İkinci teriminde hedef doğrultusunun yataya yakın olması durumunda sıfıra yanaştığı görülmektedir.

Hedef Noktası Yükseltisi Nedeniyle Uygulanacak İndirgeme

P_i noktasından P_k noktasına yapılan yatay doğrultu gözlemine çekül sapması indirgemesi yapılarak elipsoidten h_k yüksekliğindeki P_k noktasına ait elipsoid üzerindeki normal kesit eğrisinin doğrultusu elde edilir. Oysa istenen P_i ve P_k noktalarını elipsoid üzerinde temsil eden Q_i ve Q_k noktalarını birleştiren normal kesit eğrisinin doğrultusudur. P_i durak noktasının elipsoid üzerindeki izdüşümü olan Q_i noktası aynı elipsoid normalinde olduğu için durak noktasının



yüksekliği sorun yaratmaz. Ancak P_k hedef noktasının elipsoid üzerindeki izdüşümü Q_k aynı elipsoid normalinde (durak noktasına göre) bulunmadığı için

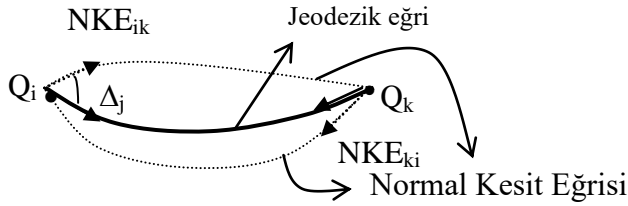
yandaki şekilde görüldüğü gibi bu iki doğrultu arasındaki Δ açısı kadar farkın hesaplanıp ölçülen doğrultuya eklenmesi gerekir. Bu düzeltme;

$$(\Delta r_{ik})_h = \frac{e^2}{2} \frac{h_k}{a} \sin \alpha_{ik} \cos B_i$$

eşitliği ile verilmiştir.

Normal Kesit Eğrisinden Jeodezik Eğriye Geçiş İndirgemesi

Buraya kadar yapılan düzeltmelerle elipsoid yüzünde bir noktadan diğer noktaya giden normal kesit eğrilerinin yatay doğrultusu bulunmuş olur. Ancak noktaların aynı meridyende ya da aynı paralel daire üstünde olmamaları halinde durulan noktadaki elipsoid normali ile bakılan noktadaki elipsoid normali aynı düzlem içinde olmadıkları için, durulan noktadan bakılan noktaya giden normal kesit eğrisi yalnız durulan noktada normal kesit eğrisi özelliğini taşır. Bu durumda elipsoid üzerindeki Q_i ve Q_k gibi iki nokta NKE_{ik} ve NKE_{ki} , gibi iki ayrı normal kesit eğrisi ile birleşir. Bu durumda örneğin üç nokta elipsoid yüzünde normal kesit eğrileriyle birleştirildiğinde tek anlamlı bir üçgen şekli oluşturmaz. Bu nedenle normal kesit eğrileri yerine, iki noktayı elipsoid üzerinde tek anlamlı olarak birleştiren tek bir yüzey eğrisi vardır. Bu özellikte alınacak yüzey eğrilerinin en uygunu, noktalar arasındaki “jeodezik eğri”dir.



Δ_j : Normal Kesit Eğrisinden
Jeodezik Eğriye Geçiş
Düzeltilmesi

Bir noktada (örneğin şekilde Q_i noktasında) normal kesit doğrultusu ile jeodezik eğri arasındaki doğrultu farkı

$$(\Delta r_{ik})_j = \frac{e^2}{12} \frac{s^2}{a^2} \sin 2\alpha_{ik} \cos B_i$$

eşitliği ile verilmiştir. Ancak kenar uzunluklarının 100km. yi geçmediği hallerde indirgeme değeri , ihmal edilebilecek bir değer olan $0.01''$ nin altında kalır.

Özet olarak fiziksel yeryüzünde ölçülen r'_{ik} yatay doğrultusunu elipsoid yüzeyine indirgemek için getirilecek toplam düzeltme

$$r_{ik} = r'_{ik} + (\Delta r_{ik})_c + (\Delta r_{ik})_h + (\Delta r_{ik})_j \quad \text{olur.}$$

Fiziksel yeryüzünde P_i ve P_k gibi iki nokta arasında gözlenen r'_{ik} yatay doğrultusunun bu noktaları elipsoid yüzünde temsil eden Q_i ve Q_k noktalarını birleştiren jeodezik eğri kenarın yatay doğrultusu r_{ik} ya indirgenmesi gerekir. Bu işlem üç aşamada gerçekleştirilir:

İlk aşamada gözlenen r'_{ik} doğrultusuna çekül sapması indirgemesi sonra hedef noktası yüksekliği indirgemesi ve normal kesit eğrisinden jeodezik eğriye geçiş indirgemesi yapılır. Söz konusu bu indirgemelerin ulaşılabilen ölçü duyarlılığının altında kalması nedeniyle I.derece nirengi ağları dışında yapılmaz, yani fiziksel yeryüzünde yapılan yatay doğrultu gözlemlerinin doğrudan elipsoid yüzeyinde yapıldıkları varsayılır .

b) Uzunlukların Elipsoid Yüzüne (Deniz Seviyesine) İndirgenmesi

Elektronik uzaklık ölçerler (EUÖ) ile ölçülen kenarları elipsoid yüzeyine indirgeyebilmek için meteorolojik ve geometrik düzeltmenin getirilmesi zorunludur. Söz konusu indirgeme işlemleri bir çizelge üzerinde gerçekleştirilir (EK:5). EUÖ den kaynaklanacak düzenli alet hataları ayrıca ele alınacaktır.

Meteorolojik Düzeltme

EUÖ ile ölçülen bir kenar değeri, arazide söz konusu iki noktayı birleştiren eğri yolun uzunluğuna (D') eşittir(şekil-1). EUÖ nün ölçüm sonucunda verdiği uzunluk değeri referans atmosfer (ön görülen meteorolojik veriler) için geçerlidir. Oysa arazide ölçümün yapıldığı anlardaki meteorolojik veriler farklı olur. Meteorolojik verilerdeki (hava basıncı, ıslak ve kuru sıcaklıklar,havanın nemi gibi) değişimler ölçülen uzunlukları etkiler. Bu nedenle EUÖ ile ölçülen kenarlara K_1 hız düzeltmesi ile K_2 ışın yolu eğriliği düzeltilmesi getirilir.

$$K_1 = D' (n - n_o) \quad K_2 = -k^2 \frac{D'^3}{24R^2}$$

Burada; n_o : Referans atmosfere karşılık kırılma indisi (alet içi)

n : Ölçme anındaki kenar boyunca kırılma indisi

k : Refraksiyon katsayısıdır. Elektro-optik uzaklık ölçerler için 0.13 ve mikrodalga uzaklık ölçerler için 0.25 dir.

Ölçme anındaki kenar boyunca kırılma indisi, uygulamada söz konusu kenarın uç noktalarında ölçülen meteorolojik verilerin ortalamasından yararlanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$N_{GR} = \left(287.604 + \frac{4.8864}{\lambda^2} + \frac{0.068}{\lambda^4} \right) 0.359474 \quad \text{: Grup kırılma indisi}$$

$$E' = 10^{\left(\frac{7.5t'}{237.2+t'} + 0.6609 \right)}$$

$$e = E' - 0.000662 (t - t') P$$

$$n = 1 + \frac{N_{GR} \cdot P \cdot 10^{-6}}{273.2 + t} - \frac{1.5026 \cdot e \cdot 10^{-5}}{273.2 + t}$$

Burada;

λ : ölçmede kullanılan dalga boyu

t' : kenarın uç noktalarındaki ortalama ıslak sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)

t : kenarın uç noktalarındaki ortalama kuru sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)

P : kenarın uç noktalarındaki ortalama hava basıncıdır (mmHg)

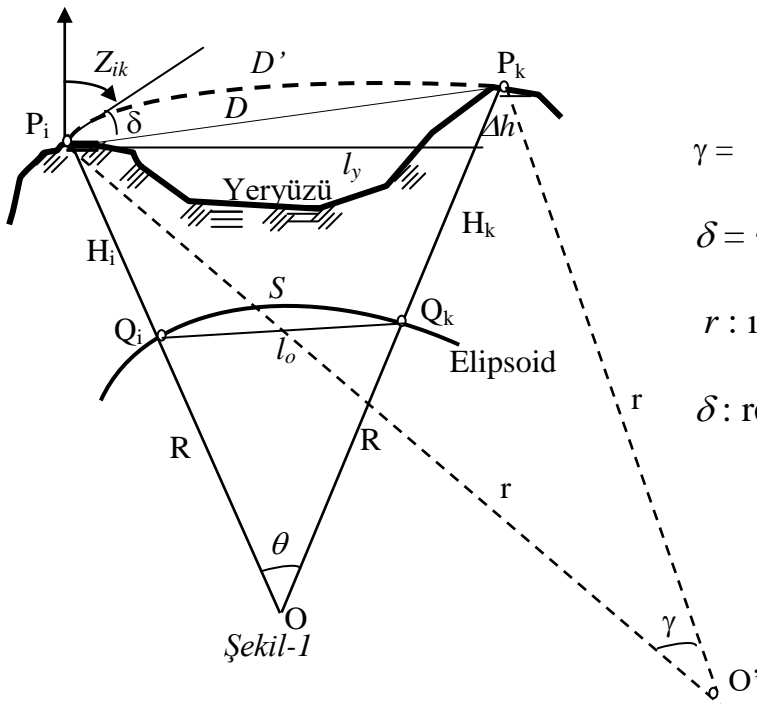
Bu durumda hesaplanacak K_1 hız düzeltmesi ve K_2 ışın yolu eğriliği düzeltmeleriyle meteorolojik düzeltme getirilmiş eğik uzunluk;

$$D = D' + K_0 + K_1 + K_2$$

K_0 : sıfır noktası eki hatası

olur. 25 km yi geçmeyen uzunluklarda K_2 ışın yolu eğriliği düzeltmesi 1mm den az olması nedeniyle ihmal edilir.

Geometrik Düzeltme



$$\gamma = D/r \approx D'/r \quad (k = R/r)$$

$$\delta = \gamma/2 = kD/(2R)$$

r : ışın yolu eğrilik yarıçapı

δ : refraksiyon etkisi

Fiziksel yeryüzünde P_i ve P_k gibi iki nokta arasında gözlenen D eğik uzunluğundan bu noktaları elipsoid yüzünde temsil eden Q_i ve Q_k noktalarını birleştiren jeodezik eğri kenarın S uzunluğunun elde edilmesi gerekir. Fiziksel yeryüzünde yükseklikleri farklı P_i ve P_k gibi iki nokta arasında ölçülen ve meteorolojik düzeltmesi yapılan eğik uzaklık önce jeoid≈elipsoid yüzüne (deniz yüzeyine) indirgenir(şekil-1).

EUÖ lerle yapılan ve meteorolojik düzeltme getirilmiş eğik uzunluk (D) ölçülerinden aşağıdaki gibi elipsoid yüzeyindeki (S) kenarlar indirgenerek hesaplanır. Bu indirgeme iki farklı şekilde yapılabilir.

$$l_0 = \sqrt{\frac{D^2 - (H_k - H_i)^2}{(1 + \frac{H_i}{R})(1 + \frac{H_k}{R})}}$$

$$S = 2R \arcsin\left(\frac{l_0}{2R}\right)$$

ya da elipsoid yüzeyine indirgeme BÖHYH de belirtildiği gibi ya da

$$S = \frac{\theta}{2} \left[2R \sqrt{1 - \left(\frac{DH}{D} \cos\left(\rho \frac{\theta}{2}\right)\right)^2} - DH \right]$$

biçiminde yapılır.

Burada;

$$H_i = H_D + I_E$$

$$H_k = H_B + T_P$$

$$DH = H_k - H_i$$

$$\theta = \frac{D}{R + H_i}$$

Bu indirgeme ile bulunan deniz seviyesindeki S kenarının elipsoid yüzüne de indirgenmesi gerekir. Ancak bu indirgeme değerinin büyüklüğü pratikte rahatlıkla göz ardı edilebilir miktardadır. Bu nedenle ölçülen kenarların elipsoid yüzündeki değeri yerine jeoid yüzündeki (deniz seviyesindeki) değeri alınır.

Kenar uzunlukları 10km yi geçmeyen ağlarda ölçülen (D) eğik uzaklığı ve P_i deki refraksiyon indirgemesi getirilmiş düşey açı ($Z=Z+\delta$) ölçüsüyle,

$$l_y = \frac{D \sin(Z - \rho\theta)}{\cos(\rho\theta/2)} : \quad P_i \text{ deki yerel yataya indirgenmiş uzunluk}$$

elde edildikten sonra

H_D : Durulan nok.denizden yüksekliği
 H_B : Bakılan nok. denizden yüksekliği
 I_E : EUÖ aletinin yüksekliği
 T_P : Yansıtıcı (reflektör) yüksekliği
 D : Ölçülen eğik kenar
(meteorolojik düzeltme getirilmiş)
 l_y : P_i deki yerel yataya indirgenmiş uzunluk
 l_o : Elipsoidin giriş uzunluğu
 S : Deniz yüzeyindeki kenar
 R : Kenar doğrultusundaki elipsoid normal kesit eğrisi yarıçapı ya da ülkemiz için yaklaşık olarak 6373394m alınabilir.

$$S = l_y \frac{R}{H_i + R}$$

şeklinde deniz yüzeyine indirgenmiş uzunluk hesaplanır. Bu biçimde hesaplanan S uzaklığı elipsoid yüzeyindeki jeodezik eğrinin uzunluğu olarak alınabilir.

Özet olarak fiziksel yeryüzünde iki nokta arasında ölçülen eğik kenarın elipsoid üzerindeki karşılığı olan jeodezik eğri uzunluğunu elde etmek için ölçülen eğik kenarın yalnızca deniz düzeyine indirgenmesi yeterlidir diyebiliriz.

Düşey açılar yardımıyla indirgeme

EUÖ ler ile yapılan ve meteorolojik düzeltme getirilmiş eğik uzunluk ölçüleri aşağıdaki şekilde düşey açı ölçüleriyle de elipsoid yüzeyine indirgenebilir. P_i ve P_k noktaları arasındaki eğik uzunluk D , P_i noktasında ölçülen düşey açı Z' olmak üzere H_i yüksekliğindeki yatay uzunluk, önce noktalar arasındaki yükseklik farkı küresellik ve refraksiyon etkileri de göz önüne alınarak aşağıdaki formülle bulunur.

$$\Delta h = H_B - H_D = D \cos Z' + 0.068 (D_{km} \sin Z')^2 + a - i$$

Noktalar arası yatay uzunluk,

$$S' = \sqrt{D^2 - \Delta h^2}$$

bağıntısı ile elde edilir. P_i noktasındaki yerel yataydaki S' uzunluğundan deniz seviyesindeki (elipsoid yüzeyindeki) S uzunluğu

$$S = S' \left(\frac{R}{R + H_i} \right)$$

eşitliğinden bulunur.

Örnek: Elektronik uzaklık ölçerle bir kenarın 5 kez ölçülmesi sonucunda ortalaması $D' = 7325.245\text{m}$ olarak bulunmuştur. Aşağıda gerekli bilgiler verildiğine göre söz konusu kenarın deniz seviyesindeki karşılığını tüm indirgemeleri yaparak bulunuz.

Verilenler:

$$D' = 7325.245\text{m}$$

$$n_o: 1.0003108$$

$$N_{GR}: 105.75$$

$$t' = 22^\circ\text{C}$$

$$P = 755\text{mmHg}$$

$$H_{DN} = 1240.15\text{m}$$

$$I_E : 1.54\text{m}$$

$$t = 23^\circ\text{C}$$

$$K_o = 0.005\text{m}$$

$$H_{BN} = 1567.30\text{m}$$

$$T_P = 1.55\text{m}$$

$$R = 6373394\text{m}$$

Çözüm:

a) Meteorolojik düzeltmelerin getirilmesi

$$E' = 10^{\left(\frac{7.5t'}{237.2+t'}+0.6609\right)} = 19.83691234$$

$$e = E' - 0.000662 (t-t') P = 19.33710234$$

$$n = 1 + \frac{N_{GR} \cdot P \cdot 10^{-6}}{273.2 + t} - \frac{1.5026 \cdot e \cdot 10^{-5}}{273.2 + t} = 1.000268571$$

$$K_1 = D' (n - n_0) = -0.3093m \quad K_2 = -k^2 \frac{D'^3}{24R^2} = -0.007mm$$

Meteorolojik düzeltme getirilmiş eğik uzunluk,

$$D = D' + K_0 + K_1 + K_2 = 7324.9406m$$

b) Geometrik düzeltmenin getirilmesi

$$H_i = H_{DN} + I_E = 1241.69m$$

$$H_k = H_{BN} + T_P = 1568.85m$$

$$DH = H_k - H_i = 327.16m$$

$$\theta = \frac{D}{R + H_i} = 0.001149075rad$$

Deniz seviyesindeki uzunluk,

$$S = \frac{\theta}{2} \left[2R \sqrt{1 - \left(\frac{DH}{D} \cos\left(\rho \frac{\theta}{2}\right)\right)^2} - DH \right] = 7316.0176m$$

olarak bulunur. Geometrik düzeltmenin getirilmesi değişik olarak aşağıdaki formülden de yapılabilir.

$$D = 7324.9551m$$

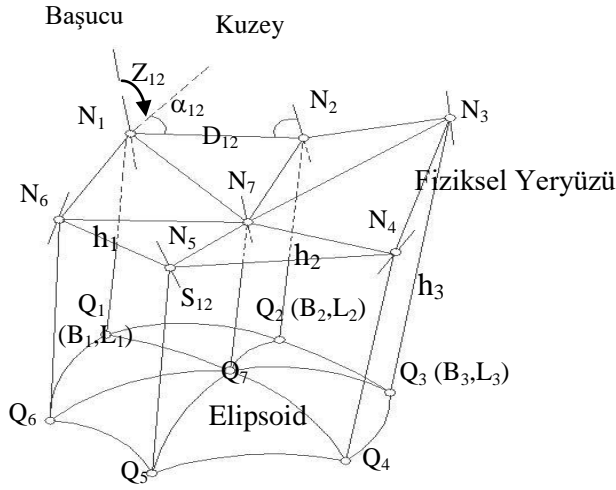
$$H_i = 1241.69m$$

$$H_k = 1568.85m$$

$$l_0 = \sqrt{\frac{D^2 - (H_k - H_i)^2}{\left(1 + \frac{H_i}{R}\right)\left(1 + \frac{H_k}{R}\right)}} = 7316.0178m$$

$$S = 2R \arcsin\left(\frac{l_0}{2R}\right) = 7316.0182m$$

Ölçülere yapılan tüm bu indirgemelerle fiziksel yeryüzündeki nirengi ağı yerine, elipsoid üstünde, kenarları jeodezik eğri olan üçgenlerden oluşan bir ağ elde edilmiş olur.



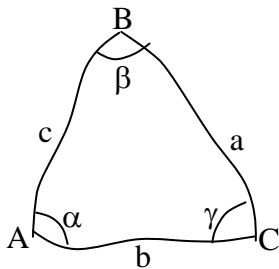
Şekil-11

Elipsoid yüzeyinde konum belirleme işlemi için, fiziksel yeryüzünde oluşturulan nirengi ağında yapılan ölçümler elipsoid yüzeyine indirgenerek elipsoid üstünde, kenarları jeodezik eğri olan üçgenlerden oluşturulan bir ağın çözümü suretiyle elde edilir. Elipsoid üzerindeki bu ağ jeodezik üçgenlerden oluşur (şekil-11). Böyle bir ağda ağın hesaplanması için gerekenden fazla ölçü olduğundan ağ noktalarının istenen elipsoidal koordinatları dengeleme hesabıyla bulunur. Ağ noktalarının projeksiyon yüzeyindeki koordinatları istenirse, ölçüler projeksiyon yüzeyine indirgenir ve yine dengelemeli olarak ağ noktalarının koordinatları bulunur.

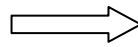
6.4 Elipsoidde Üçgen Hesabı

Elipsoid yüzeyindeki jeodezik üçgenler yardımcı bir düzlem üçgen aracılığıyla çözülebilmektedir. 1827 yılında Gauss herhangi bir yüzey üzerindeki jeodezik üçgeni yardımcı düzlem üçgen kullanarak çözmüştür (şekil 12.a, 12.b).

Çözüm için seçilecek yardımcı düzlem üçgenin kenarları jeodezik üçgenin kenarlarının aynısıdır. Açılar ise aşağıdaki gibi hesaplanır.



Şekil-12.a Jeodezik Üçgen



Şekil-12.b Yardımcı Düzlem Üçgen

Jeodezik üçgen yerine alınan yardımcı düzlem üçgenin açıları

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha - \frac{\Delta}{3} \frac{2K_a + K_b + K_c}{4} \rho + \frac{\Delta}{24} K^2 \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \rho \\ \beta^* &= \beta - \frac{\Delta}{3} \frac{K_a + 2K_b + K_c}{4} \rho + \frac{\Delta}{24} K^2 \frac{7a^2 + b^2 + 7c^2}{15} \rho \\ \gamma^* &= \gamma - \frac{\Delta}{3} \frac{K_a + K_b + 2K_c}{4} \rho + \frac{\Delta}{24} K^2 \frac{7a^2 + 7b^2 + c^2}{15} \rho\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. ABC Jeodezik üçgeninin eksesi (iç açıların toplamının 180° den farkı)

$$\varepsilon = \Delta \frac{K_a + K_b + K_c}{3} \rho + \frac{\Delta}{8} K^2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \rho \text{ dır.}$$

Bu eşitliklerde; Δ kenarları a, b, c olan düzlem üçgenin alanını K_a , K_b , K_c jeodezik üçgenin köşelerindeki Gauss eğrilik ölçüsüdür. K ise üçgen için ortalama veya yaklaşık eğrilik ölçüsünü belirtmektedir. Buradaki eğrilik ölçüsü eğrilik yarıçapının karesi olarak alınmalıdır.

Jeodezik üçgenin (F) alanı, yardımcı düzlem üçgenin alanı (Δ) cinsinden

$$F = \Delta \left\{ 1 + \frac{K_a}{120} (a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{K_b}{120} (2a^2 + b^2 + 2c^2) + \frac{K_c}{120} (2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\}$$

şeklinde hesaplanabilmektedir.

Elipsoidal Koordinat Sistemleri

Elipsoidal koordinat sistemleri diğer koordinat sistemlerinde olduğu gibi elipsoid yüzeyinde konum belirlemeye ve noktalar arasında çeşitli hesaplamalar yapmaya yarar. Başlıca elipsoidal koordinat sistemleri;

- Elipsoidal Coğrafi Koordinatlar (B,L,h)
- Kartezyen Dik (Global) Koordinatlar (X,Y,Z)
- Jeodezik Dik Koordinatlar (x,y)
- Kutupsal Koordinatlar (S,A ya da S, α)

dır.

Bu sistemlerinden Elipsoidal Coğrafi Koordinat sistemi ve Kartezyen dik koordinat sistemi ve aralarındaki dönüşümler daha önce Bölüm 2.2 de

Çözüm: Önce B enlemine karşılık gelen $G_B=P_0H$ meridyen yay uzunluğu hesaplanır. $G_B = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B$

$$l = L - L_0$$

l boylam farkını göstermek üzere P noktasının jeodezik dik koordinatları L_0 meridyenine göre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Delta x = \frac{N}{2\rho^2} \sin B \cos B \lambda^2 + \frac{N}{24\rho^4} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 5\eta^2) \lambda^4 + \dots$$

$$x = G_B + \Delta x \quad (\Delta x = HF)$$

$$y = \frac{N}{\rho} \cos B \lambda - \frac{N}{6\rho^3} \sin^2 B \cos B \lambda^3 - \frac{N}{120\rho^5} \sin^2 B \cos^3 B (8 - t^2) \lambda^5$$

$$\gamma = \sin B \lambda + \frac{1 + \eta^2}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B \lambda^3 + \dots$$

$$t = \tan B_F, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B_F, \quad V^2 = 1 + \eta^2, \quad N = c / V$$

Örnek -1 :

Verilenler: P noktasının coğrafi koordinatları,

$$B = 39^\circ 00' 36'' \quad , \quad L = 39^\circ 30' 00''$$

İstenenler : $L_0=39^\circ$ meridyenindeki jeodezik dik koordinatlar $P(x,y)$ ve γ meridyen yakınsaması (konvergenesi) açısı

Çözüm:

Önce B enlemine karşılık gelen G_B meridyen yay uzunluğu hesaplanır.

$$B = 39^\circ 00' 36'' \quad \text{için}$$

$$G_B = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B = 4319686.98166m$$

olur. Buradaki katsayılar (Hayford elipsoidi için);

$$A' = 111\,136.536\,655m/^\circ \quad B' = -16\,107.0347m$$

$$C' = 16.9762m \quad D' = -0.0223m$$

ve yukarıdaki formüller kullanılırsa,

$$\Delta x = 118.95114m \quad \text{bulunur. Bu değere } G_B \text{ değeri eklenirse}$$

$$x = G_B + \Delta x = 4319805.9328m$$

$$y = 43308.8343\text{m}$$

$$\gamma = 0.31473285^\circ = 18' 53.0382''$$

olarak bulunur.

Örnek -1a :

Verilenler: P3 noktasının coğrafi koordinatları,

$$B_3 = 39^\circ 30' 18'' \quad L_3 = 39^\circ 45' 00''$$

İstenenler : $L_0=39^\circ$ meridyenindeki jeodezik dik koordinatlar $P(x,y)$ ve γ meridyen yakınsaması (konvergensi) açısı

$$G_B = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B = 4374643.6139\text{m}$$

$\Delta x = 268.5945\text{m}$ bulunur. Bu değere G_B değeri eklenirse

$$x = G_B + \Delta x = 4374912.2084\text{m}$$

$$y = 64507.6051\text{m}$$

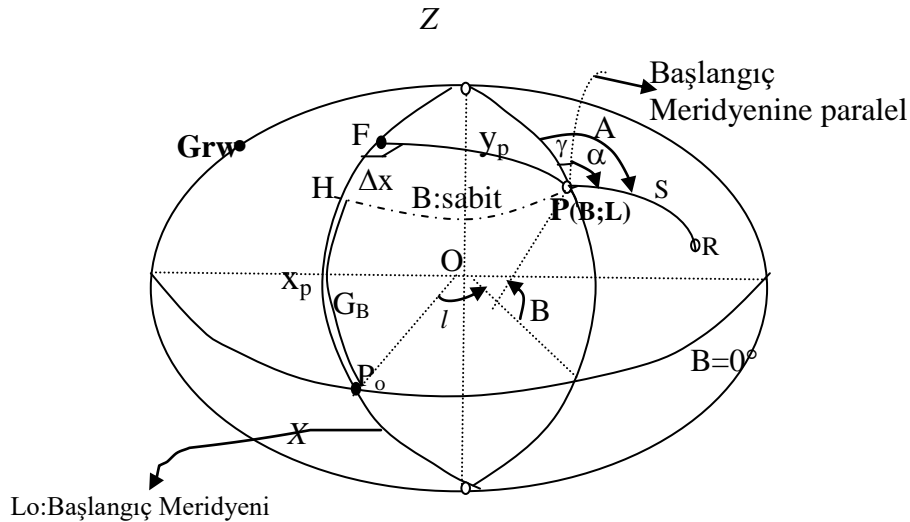
$$\gamma = 0.47712545^\circ = 28' 37.6516''$$

olarak bulunur.

Jeodezik Dik Koordinatlardan Coğrafi Koordinatların Eldesi

Verilenler: L_0 meridyeninde jeodezik dik koordinatlar $P(x, y)$

İstenenler: Coğrafi koordinatlar $P(B,L)$ ve γ meridyen yakınsaması (konvergensi) açısı



Çözüm:

Öncelikle x değerine karşılık gelen B_F enlemi hesaplanır(şekil-15). Ekvatordan F ayak noktasına kadar olan yay uzunluğu P noktasının x değeridir. Bu B_F

enleminden P noktasının B enlemi (aynı zamanda H noktasının enlemi) ve diğer istenenler aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

Elipsoidde ekvatoradan bir B enlemine kadar olan meridyen yay uzunluğu

$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B$
eşitliği ile hesaplanmaktadır. Ekvatoradan itibaren $G=x$ meridyen yay uzunluğuna karşılık gelecek B enlemi yukarıdaki eşitlikten çekilir ve

$$B_{i+1} = \{ G - B' \sin 2B_i - C' \sin 4B_i - D' \sin 6B_i \} / A' \quad (i=0,1,2,..)$$

iteratif olarak hesaplanır.

Bu şekilde bulunan B_F enlemi istenirse aşağıdaki seriden direkt olarak da hesaplanabilir.

$$B_F = \sigma + B'' \sin 2\sigma + C'' \sin 4\sigma + D'' \sin 6\sigma + \dots$$

serisi elde edilir. Buradaki katsayılar (hayford elipsoidi için);

$$\sigma = G / A'$$

$$A' = 111\,136.536\,655 \text{m}^\circ$$

$$B'' = 0.144\,930\,070^\circ$$

$$C'' = 0.000\,213\,851^\circ$$

$$D'' = 0.000\,000\,432^\circ$$

B_F enlemi elde edildikten sonra P noktasının istenen coğrafi koordinatları ve meridyen yakınsaması aşağıdaki formüllerden elde edilir. Formüllerdeki F alt indisi bütün hesaplamaların B_F enlemiyle yapılacağını göstermektedir.

$$B = B_F - \left(\frac{V^2 t \rho}{2N^2} \right)_F y^2 + \left(\frac{V^2 t \rho}{24N^4} \right)_F (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2)_F y^4 + \dots$$

$$L = L_0 + \left(\frac{\rho}{N \cos B} \right)_F y - \left(\frac{\rho t^2}{3N^3 \cos B} \right)_F y^3 + \left(\frac{t^2 \rho (1 + 3t^2)}{15N^5 \cos B} \right)_F y^5 + \dots$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho t}{N} \right)_F y - t \rho \left(\frac{1 + 2t^2 + \eta^2}{6N^3} \right)_F y^3 + \dots$$

$$t = \tan B_F, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B_F, \quad V^2 = 1 + \eta^2, \quad N = c / V$$

Örnek -2 : $L_0=39^\circ$ meridyen sisteminde, bir P noktasının jeodezik dik koordinatları $x=4319805.9328\text{m}$, $y=43308.8343\text{m}$ olarak veriliyor.

İstenenler : Coğrafi koordinatlar $P(B,L)$ ve γ meridyen yakınsaması (konvergenesi) açısı

Çözüm:

G = x için hesaplanacak B_F enlemi,

$$B_F = \sigma + B''\sin 2\sigma + C''\sin 4\sigma + D''\sin 6\sigma + \dots = 39.01107145^\circ$$

ve yukarıdaki formüllerden,

$$B = 39.01^\circ = 39^\circ 00' 36''$$

$$L = 39.50^\circ = 39^\circ 30' 00''$$

$$\gamma = 0.31473285^\circ = 18' 53.0382''$$

olarak elde edilir.

Burada jeodezik hesaplamaların coğrafi koordinatlarla ve jeodezik dik koordinatlarla yapılması ispata girilmeksizin verilecektir [4],[28].

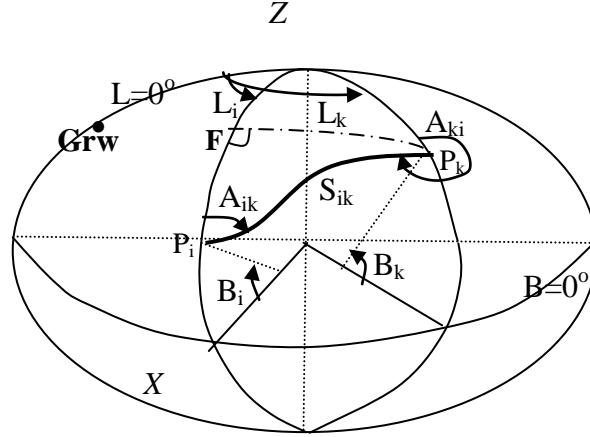
6.7 Elipsoidde Coğrafi Koordinatlarla Temel Ödev Hesapları

Literatürde elipsoid yüzeyinde temel ödev hesapları için çok sayıda yöntem olup bunların başlıcalarından Legendre Serisi yöntemi, Gauss Ortalama Enlem yöntemi, Schreiber yöntemi ve Vincenty yöntemi sayılabilir. Bu yöntemlerden Schreiber yöntemiyle I. Temel ödev ve Gauss ortalama enlem yöntemiyle de II. Temel ödev çözümleri ele alınacaktır. Daha geniş bilgi için kaynaklar kısmındaki eserlere başvurulması tavsiye edilir. Elipsoidde hesaplama zorlukları nedeniyle hesaplamaların bilgisayar ortamında yapılması tavsiye edilir. İnternet ortamında bu amaçla hazırlanmış uygulama programlarından (applet) yararlanılabilir.

Coğrafi Koordinatlarla I. Temel Ödevin Schreiber yöntemiyle Çözümü

Verilenler: $P_i(B_i, L_i)$ ve A_{ik} , S_{ik}

İstenenler: $P_k(B_k, L_k)$ ve A_{ki}



Şekil-14

Bu problemde bir P_i noktasının enlem ve boylam değerleri ile P_k noktasına olan A_{ik} azimut açısı ve S_{ik} jeodezik eğri kenar uzunluğu verilir. P_k noktasının coğrafi koordinatları ile A_{ki} azimutu istenir.

Problemin Schreiber yöntemiyle çözümde önce P_k noktasından P_i noktasından geçen meridyen üzerine indirilen dikinin ayak noktası F nin enlemi B_F hesaplanır.

$$u = S \cos A_{ik} \quad , \quad v = S \sin A_{ik}$$

$$B_F = B_i + \frac{\rho}{M_i} u \left\{ 1 + \frac{v^2}{3M_i N_i} - \frac{3\eta_i^2 t_i}{2N_i} u - \frac{(1-t_i^2 + \eta_i^2 - 5\eta_i^2 t_i^2) \eta_i^2}{2N_i^2} u^2 + \dots \right\}$$

Böylece P_k noktasının elipsoidal koordinatları B_k , L_k ve A_{ki} azimutu ,

$$y = v - u^2 v / (6M_i N_i), \quad z = y / N_F / \rho$$

$$B_k = B_F + \frac{V_F^2 t_F}{2\rho} z^2 \left\{ 1 - \frac{z^2}{12\rho^2 (1-e^2)} \left[\frac{1}{\cos^2 B_F} + 2t_F^2 - e^2 t_F^2 (13 - 10 \sin^2 B_F) \right] \right\}$$

$$L_k = L_i + \frac{z}{\cos B_F} \left\{ 1 - \frac{t_F^2 z^2}{3\rho^2} + \frac{t_F^2 z^4}{15\rho^4} (1 + 3t_F^2) + \dots \right\}$$

$$A_{ki} = A_{ik} \pm \pi + \frac{B_F - B_i}{2\rho} z + z t_F \left\{ \frac{1 - z^2}{6\rho^2(1 - e^2)} \left[\frac{1}{\cos^2 B_F} + t_F^2 - e^2 t_F^2 (3 - \sin^2 B_F) \right] \right\}$$

olarak ifade edilebilir.

$$t_F = \tan B_F \quad , \quad V_F^2 = 1 + \eta_F^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B_F \quad , \quad N_F = c / V_F \quad \text{ve} \quad M = c / V_F^3$$

Örnek-3:

Verilenler: $B_1 = 39^\circ 30' 18''$ $L_1 = 39^\circ 00' 00''$
 $S = 69876.8926\text{m}$ $A_{12} = 141^\circ 41' 55.7280''$
İstenenler : B_2, L_2, A_{21}

Çözüm: Önce yukarıdaki B_F eşitliğinden B_F enlem değeri hesaplanır.

$$u = S \cos A_{ik} = -54836.8372 \quad , \quad v = S \sin A_{ik} = 43309.3686$$

$$M = 6361450.3893\text{m} \quad N = 6387082.0669\text{m}$$

$$B_F = B_i + \frac{\rho}{M_i} u \left\{ 1 + \frac{v^2}{3M_i N_i} - \frac{3\eta_i^2 t_i}{2N_i} u - \frac{(1 - t_i^2 + \eta_i^2 - 5\eta_i^2 t_i^2) \eta_i^2}{2N_i^2} u^2 + \dots \right\}$$

$$B_F = 39.01107145^\circ$$

$$y = v - u^2 v / (6M_i N_i) = 43308.8343 \quad z = \rho y / N_F = 0.38851608$$

yukarıdaki formül takımından,

$$B_2 = B_F + \frac{V_F^2 t_F}{2\rho} z^2 \left\{ 1 - \frac{z^2}{12\rho^2(1 - e^2)} \left[\frac{1}{\cos^2 B_F} + 2t_F^2 - e^2 t_F^2 (13 - 10\sin^2 B_F) \right] \right\}$$

$$B_2 = 39.01^\circ = 39^\circ 00' 36''$$

$$L_2 = L_1 + \frac{z}{\cos B_F} \left\{ 1 - \frac{t_F^2 z^2}{3\rho^2} + \frac{t_F^2 z^4}{15\rho^4} (1 + 3t_F^2) + \dots \right\}$$

$$L_2 = 39.5^\circ = 39^\circ 30' 00''$$

$$A_{21} = A_{12} \pm \pi + \frac{B_F - B_i}{2\rho} z + z t_F \left\{ \frac{1 - z^2}{6\rho^2(1 - e^2)} \left[\frac{1}{\cos^2 B_F} + t_F^2 - e^2 t_F^2 (3 - \sin^2 B_F) \right] \right\}$$

$$A_{21} = 322.01522085^\circ = 322^\circ 00' 54.7950''$$

olarak bulunur.

Coğrafi Koordinatlarla II. Temel Ödevin Gauss Ortalama Enlem Yöntemiyle Çözümü

Verilenler: $P_i(B_i, L_i)$ ve $P_k(B_k, L_k)$

İstenenler : S_{ik} , A_{ik} ve A_{ki}

İkinci temel ödevin elipsoid yüzeyinde çözümü için,

$$b = B_k - B_i \quad , \quad l = L_k - L_i \quad \quad B = (B_k + B_i) / 2$$

hesaplanır

$$\Delta A = A_{ki} - A_{ik} \pm \pi$$

$$A = (A_{ki} + A_{ik} \pm \pi) / 2$$

kabulleri yapılarak ve B ortalama enlemiyle aşağıda geçen gerekli katsayılar bulunur.

$$u = S_{ik} \cos A_{ik} = \frac{Mb}{\rho} \cos \frac{l}{2} \left\{ 1 + \frac{1-2\eta^2}{24\rho^2} l^2 \cos^2 B + \frac{\eta^2(1-t^2)}{8\rho^2 V^4} b^2 \right\}$$

$$v = S_{ik} \sin A_{ik} = \frac{Nl \cos B}{\rho} \left\{ 1 - \frac{l^2 \sin^2 B}{24\rho^2} + \frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24\rho^2 V^4} b^2 \right\}$$

$$\Delta A = l \sin B \left\{ 1 + \frac{1 + \eta^2}{12\rho^2} l^2 \cos^2 B + \frac{3 + 8\eta^2}{24\rho^2 V^4} b^2 \right\}$$

yukarıdaki v değeri u değerine bölünürse ,

$$\tan A = \frac{v}{u}$$

A ortalama azimut değeri ve istenen azimutlar

$$A_{ik} = A - \Delta A / 2 \quad \text{ve} \quad A_{ki} = A \pm \pi + \Delta A / 2$$

S_{ik} kenarı da,

$$S_{ik} = \frac{u}{\cos A} = \frac{v}{\sin A}$$

şeklinde kontrollü olarak bulunur.

Örnek-4: İki noktanın elipsoidal coğrafi koordinatları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \text{Verilenler: } B_1 &= 39^\circ 30' 18'' & L_1 &= 39^\circ 00' 00'' \\ B_2 &= 39^\circ 00' 36'' & L_2 &= 39^\circ 30' 00'' \end{aligned}$$

İstenenler : S_{12} , A_{12} , A_{21}

Çözüm:

$$b = B_k - B_i = -0.495^\circ \quad , \quad l = L_k - L_i = 0.5^\circ \quad , \quad B = (B_k + B_i) / 2 = 39.2575^\circ$$

$$N = 6386990.859\text{m}$$

$$M = 6361177.868\text{m}$$

$$u = S_{12} \cos A_{12} = -54956.2128\text{m}$$

$$v = S_{12} \sin A_{12} = 43157.7895\text{m}$$

$$\Delta A = 0.3164075^\circ = 0^\circ 18' 59.067''$$

$$A = 141.857017094^\circ = 141^\circ 51' 25.2615''$$

$$A_{12} = A - \Delta A / 2 = 141.69881333^\circ = 141^\circ 41' 55.7280''$$

$$A_{21} = A \pm \pi + \Delta A / 2 = 322.01522085^\circ = 322^\circ 00' 54.7950''$$

$$S_{12} = \frac{u}{\cos A} = \frac{v}{\sin A} = 69876.8926\text{m} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek-4a: İki noktanın elipsoidal coğrafi koordinatları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \text{Verilenler: } B_2 &= 39^\circ 00' 36'' & L_2 &= 39^\circ 30' 00'' \\ B_3 &= 39^\circ 30' 18'' & L_3 &= 39^\circ 45' 00'' \end{aligned}$$

İstenenler : S_{23} , A_{23} , A_{32}

Çözüm:

$$b = B_k - B_i = 0.495^\circ \quad , \quad l = L_k - L_i = 0.25^\circ \quad , \quad B = (B_k + B_i) / 2 = 39.2575^\circ$$

$$N = 6386990.859\text{m}$$

$$M = 6361177.868\text{m}$$

$$u = S_{23} \cos A_{23} = 54956.5274\text{m}$$

$$v = S_{23} \sin A_{23} = 21578.9153\text{m}$$

$$\Delta A = 0.1582033^\circ = 0^\circ 9' 29.5318''$$

$$A = 21.43766614^\circ = 21^\circ 26' 15.5981''$$

$$A_{23} = A - \Delta A / 2 = 21.35856449^\circ = 21^\circ 21' 30.8321''$$

$$A_{32} = A \pm \pi + \Delta A / 2 = 201.51676779^\circ = 201^\circ 31' 0.3640''$$

$$S_{12} = \frac{u}{\cos A} = \frac{v}{\sin A} = 59041.2524\text{m} \quad \text{olarak bulunur.}$$

6.8 Elipsoid Yüzeyinde Jeodezik Dik Koordinatlarla Temel Ödevlerin Çözümü

Literatürde, elipsoid yüzeyinde jeodezik dik koordinatlarla hesap yapmaya yarayan çok sayıda yöntem vardır. Bu yöntemlerden nispeten en sadeleri ispata girilmeksizin verilecektir [4],[28].

I.Temel Ödev Çözümü

Verilenler: x_1, y_1, S, α_{12}

İstenenler : x_2, y_2, α_{21}

Çözüm:

2. noktanın istenen y_2, x_2 jeodezik dik koordinatları ve α_{21} elipsoidal semti jeodezik eğrinin seri açılımından aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$u = S \cos \alpha_{12}, v = S \sin \alpha_{12}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + v + \delta y \\ x_2 &= x_1 + u + \delta x \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12} \pm \pi + \delta \alpha \end{aligned}$$

Yukarıdaki üç formülün son terimleri düzlem I.temel ödev eşitliklerinden farkı oluşturmaktadırlar. Esasında bu formül takımı Küre yüzeyinde soldner sisteminde serilerle temel ödev formülleridir. Formüllerin son terimleri $\delta y, \delta x$ ve $\delta \alpha$ küresel düzeltmelerdir. Burada bu küresel düzeltmeler biraz daha zenginleştirilerek elipsoidal düzeltmeler haline getirilmişlerdir.

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^3}{3R_1^3} - \frac{y_1^2 u^2}{6R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = \frac{u}{2R_1^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\eta_1^2 t_1 y_2^2 u^2}{R_1^3} + \frac{y_2^2 u}{24R_1^4} (5y_2^2 + 4u^2 - 2v^2)$$

$$\delta\alpha = -\frac{\rho u}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{2} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^2 \rho}{R_1^3} - \frac{y_1^2 u \rho}{3R_1^4} (y_1 + 3v)$$

Küre ve elipsoid arasındaki farkı altı çizili olan parametreler oluşturmaktadır.

Yukarıdaki eşitliklerde;

$$u = S \cos \alpha_{12}, v = S \sin \alpha_{12}, R_1 = \sqrt{M_1 \cdot N_1} \quad \eta_1^2 = e'^2 \cos^2 B_1 \quad t_1 = \tan B_1$$

dir.

Örnek-5:

$$\begin{aligned} \text{Verilenler: } x_1 &= 4374643.6139\text{m} & y_1 &= 0.000\text{m} \\ S &= 69876.8926\text{m} & \alpha_{12} &= 141^\circ 41' 55.7281'' \end{aligned}$$

İstenenler : y_2, x_2, α_{21}

Çözüm:

Önce $G=x_1$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı hesaplanır.

$$G=x_1 = 4374643.6139\text{m} \rightarrow B = 39.505^\circ \rightarrow R = 6374253.344\text{m}$$

$$u = S \cos \alpha_{12} = -54836.8372$$

$$v = S \sin \alpha_{12} = 43309.3686\text{m}$$

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^3}{3R_1^3} - \frac{y_1^2 u^2}{6R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = \frac{u}{2R_1^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\eta_1^2 t_1 y_2^2 u^2}{R_1^3} + \frac{y_2^2 u}{24R_1^4} (5y_2^2 + 4u^2 - 2v^2)$$

$$\delta\alpha = -\frac{\rho u}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{2} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^2 \rho}{R_1^3} - \frac{y_1^2 u \rho}{3R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = -0.8439\text{m}$$

$$\delta y = -0.5342\text{m}$$

$$\delta\alpha = 6.0282''$$

bulunur.

2. noktanın istenen y_2, x_2 jeodezik dik koordinatları ve α_{21} elipsoidal semti,

$$x_2 = x_1 + u + \delta x = 4319805.9328\text{m}$$

$$y_2 = y_1 + v + \delta y = 43308.8343\text{m}$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \pm \pi + \delta\alpha = 321.7004878^\circ = 321^\circ 42' 01.7563''$$

olarak bulunur.

II. Temel Ödev Çözümü

Verilenler: x_1, y_1, x_2, y_2

İstenenler : S, α_{12}, α_{21}

Çözüm:

Önce $G = x_1$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı R_1 hesaplanır. I.temel ödevdeki $\delta y, \delta x$ ve $\delta \alpha$ elipsoidal düzeltmeler

$$u = x_2 - x_1 \quad v = y_2 - y_1$$

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^3}{3R_1^3} - \frac{y_1^2 u^2}{6R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = \frac{u}{2R_1^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\eta_1^2 t_1 y_2^2 u^2}{R_1^3} + \frac{y_2^2 u}{24R_1^4} (5y_2^2 + 4u^2 - 2v^2)$$

$$\delta \alpha = -\frac{\rho u}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{2} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^2 \rho}{R_1^3} - \frac{y_1^2 u \rho}{3R_1^4} (y_1 + 3v)$$

alınarak hesaplanır.

$$\alpha_{12} = \arctan \left(\frac{v - \delta y}{u - \delta x} \right) = \arctan \left(\frac{y_2 - y_1 - \delta y}{x_2 - x_1 - \delta x} \right)$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha \pm \pi$$

$$S = \frac{y_2 - y_1 - \delta y}{\sin \alpha_{12}} = \frac{x_2 - x_1 - \delta x}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(y_2 - y_1 - \delta y)^2 + (x_2 - x_1 - \delta x)^2}$$

Örnek-6:

Verilenler: $x_1 = 4374643.6139\text{m}$

$y_1 = 0.000\text{m}$

$x_2 = 4319805.9328\text{m}$

$y_2 = 43308.8343\text{m}$

İstenenler : S, α_{12}, α_{21}

Çözüm:

Önce $G=x_1$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı hesaplanır.

$$G=x_1 = 4374643.6139\text{m} \rightarrow B = 39.505^\circ \rightarrow R_1 = 6374253.344\text{m}$$

$$u = x_2 - x_1 = -54837.6811 \quad v = y_2 - y_1 = 43308.8343$$

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^3}{3R_1^3} - \frac{y_1^2 u^2}{6R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = \frac{u}{2R_1^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\eta_1^2 t_1 y_2^2 u^2}{R_1^3} + \frac{y_2^2 u}{24R_1^4} (5y_2^2 + 4u^2 - 2v^2)$$

$$\delta \alpha = -\frac{\rho u}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{2} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^2 \rho}{R_1^3} - \frac{y_1^2 u \rho}{3R_1^4} (y_1 + 3v)$$

Yukarıdaki formüllerden

$$\delta x = -0.8439\text{m}$$

$$\delta y = -0.5342\text{m}$$

$$\delta \alpha = 6.0282''$$

bulunur.

$$\alpha_{12} = \arctan \left(\frac{v - \delta y}{u - \delta x} \right) = \arctan \left(\frac{y_2 - y_1 - \delta y}{x_2 - x_1 - \delta x} \right)$$

$$\alpha_{12} = 141^\circ 41' 55.7282''$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha \pm \pi$$

$$\alpha_{21} = 321^\circ 42' 01.7563''$$

$$S = \frac{y_2 - y_1 - \delta y}{\sin \alpha_{12}} = \frac{x_2 - x_1 - \delta x}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(y_2 - y_1 - \delta y)^2 + (x_2 - x_1 - \delta x)^2}$$

$$S = 69876.8925\text{m}$$

olarak bulunur.

Yukarıda hesaplanan α_{21} semti ile aynı noktada daha önceden hesaplanan A_{21} azimutu arasındaki fark tanım gereği 2 noktasındaki meridyen yakınsamasını verecektir. Söz konusu meridyen yakınsamasının bu şekilde hesaplanan değeri daha önceden bulunan değere eşit çıkmıştır.

$$A_{21} = 322^{\circ} 00' 54.7950'' \quad (\text{örnek-3 ve 4})$$

$$\alpha_{21} = 321^{\circ} 42' 01.7563''$$

$$\gamma = \frac{-}{18' 53.0387''} \quad (53.0382'') \quad (\text{örnek-1 ve 2})$$

Örnek-6a:

$$\begin{array}{ll} \text{Verilenler:} & x_1 = 4319805.9328\text{m} \quad y_1 = 43308.8343\text{m} \\ & x_2 = 4374912.2084\text{m} \quad y_2 = 64507.6051\text{m} \end{array}$$

İstenenler : S, α_{12} , α_{21}

Çözüm:

Önce $G=x_1$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı hesaplanır.

$$\begin{array}{ll} G=x_1 = 4319805.9328\text{m} \rightarrow B = 39.01107145^{\circ} \rightarrow R_1 = 6373890.364\text{m} \\ u = x_2 - x_1 = 55106.2756 & v = y_2 - y_1 = 21198.7708 \end{array}$$

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^3}{3R_1^3} - \frac{y_1^2 u^2}{6R_1^4} (y_1 + 3v)$$

$$\delta x = \frac{u}{2R_1^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\eta_1^2 t_1 y_2^2 u^2}{R_1^3} + \frac{y_2^2 u}{24R_1^4} (5y_2^2 + 4u^2 - 2v^2)$$

$$\delta \alpha = -\frac{\rho u}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{v}{2} \right) + \frac{2\eta_1^2 t_1 y_1 u^2 \rho}{R_1^3} - \frac{y_1^2 u \rho}{3R_1^4} (y_1 + 3v)$$

Yukarıdaki formüllerden

$$\delta x = 2.7206\text{m}$$

$$\delta y = -1.8827\text{m}$$

$$\delta \alpha = -15.0822''$$

bulunur.

$$\alpha_{12} = \arctan \left(\frac{v - \delta y}{u - \delta x} \right) = \arctan \left(\frac{y_2 - y_1 - \delta y}{x_2 - x_1 - \delta x} \right)$$

$$\alpha_{12} = 21^{\circ} 2' 37.7945''$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \Delta\alpha \pm \pi$$

$$\alpha_{21} = 201^\circ 2' 22.7123''$$

$$S = \frac{y_2 - y_1 - \delta y}{\sin \alpha_{12}} = \frac{x_2 - x_1 - \delta x}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(y_2 - y_1 - \delta y)^2 + (x_2 - x_1 - \delta x)^2}$$

$$S = 59041.2524\text{m}$$

olarak bulunur.

NOT:

Çalışma bölgesi sınırlı ise elipsoid yüzeyinde jeodezik dik koordinatlarla yapılan temel ödev çözümlerine Gauss küresi ile küre yüzeyinde jeodezik dik koordinatlarla yapılacak temel ödev hesaplamaları ile de ulaşmak mümkündür. Bunun için küresel hesaplama eşitliklerinde geçen R yarıçapı yerine R_g Gauss küresi yarıçapının alınması yeterlidir.

6.9 Küresel Hesaplamalarla Elipsoidde Temel Ödev Çözümleri

Örnek-7: Örnek-5 de elipsoid yüzeyinde jeodezik dik koordinatlarla yapılan I. Temel ödev çözümünün küre yüzeyinde yapılması

$$\text{Verilenler: } x_1 = 4374643.6139\text{m} \quad y_1 = 0.000\text{m}$$

$$S = 69876.8926\text{m} \quad \alpha_{12} = 141^\circ 41' 55.7281''$$

İstenenler : y_2, x_2, α_{21}

Çözüm:

Önce $G=x_1$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı hesaplanır.

$$G=x_1 = 4374643.6139\text{m} \rightarrow B = 39.505^\circ \rightarrow R = 6374253.344\text{m}$$

Küre yüzeyinde Soldner koordinatlarıyla I. Temel ödev çözümü yukarıda hesaplanan Gauss küresi yarıçapıyla önce gördüğümüz küresel formüller kullanılarak,

$$y_2 = R \arcsin \left\{ \cos \frac{s}{R} \sin \frac{y_1}{R} + \sin \frac{s}{R} \cos \frac{y_1}{R} \sin \alpha_{12} \right\} = 43308.8343m$$

$$x_2 = x_1 + R \arctan \left(\frac{\cos \alpha_{12}}{\cot \frac{s}{R} \cos \frac{y_1}{R} - \sin \frac{y_1}{R} \sin \alpha_{12}} \right) = 4319805.9328m$$

$$\alpha_{21} = \arctan \left(\frac{\cos \frac{s}{R} \sin \alpha_{12} - \tan \frac{y_1}{R} \sin \frac{s}{R}}{\cos \alpha_{12}} \right) = 321^\circ 42' 01.7568''$$

Örnek-8:

Örnek-6 da elipsoid yüzeyinde jeodezik dik koordinatlarla yapılan II. Temel ödev çözümünün küre yüzeyinde yapılması

$$\begin{aligned} \text{Verilenler: } x_1 &= 4374643.6139m & y_1 &= 0.000m \\ x_2 &= 4319805.9328m & y_2 &= 43308.8343m \end{aligned}$$

İstenenler : S, α_{12} , α_{21}

Çözüm:

Önce $x_m = (x_1 + x_2) / 2$ değerine karşılık gelen enlem değeri için Gauss küresinin yarıçapı hesaplanır.

$$X_m = 4347224.77345m \rightarrow B = 39.258041^\circ \rightarrow R = 6374071.6939m$$

Küre yüzeyinde Soldner koordinatlarıyla II. Temel ödev çözümü yukarıda hesaplanan Gauss küresi yarıçapıyla formüller kullanılarak,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -54837.6811$$

$$s = R \arccos \left\{ \sin \frac{y_1}{R} \sin \frac{y_2}{R} + \cos \frac{y_1}{R} \cos \frac{y_2}{R} \cos \frac{\Delta x}{R} \right\} = 69876.8926m$$

$$\alpha_{12} = \arccos \left\{ \frac{\sin \frac{\Delta x}{R}}{\sin \frac{s}{R}} \cos \frac{y_2}{R} \right\} = 141^\circ 41' 55.7282''$$

$$\alpha_{21} = \arccos \left\{ \frac{\sin \frac{\Delta x}{R}}{\sin \frac{s}{R}} \cos \frac{y_1}{R} \right\} + \pi = 321^\circ 42' 01.7568''$$

7. ELİPSOİDİN GAUSS KRÜGER PROJEKSİYONU

1931 yılından beri ülkemizde de kullanılmakta olan Gauss-Krüger Projeksiyonu (GKP) silindirik, transversal (yatık eksenli), açı koruyan (konform) bir projeksiyondur. Bu yüzden Gauss-Krüger projeksiyonuna Transversal Merkator projeksiyonu (TM) dendiği de olur. İzdüşüm yüzeyi olan silindir, elipsoide başlangıç olarak seçilen meridyen boyunca teğettir. Ülkemiz genelindeki çalışmalar için belirlenmiş başlangıç meridyenleri vardır [4],[18].

Bunlar; $27^0, 30^0, 33^0, 36^0, 39^0, 42^0, 45^0$ meridyenleridir.

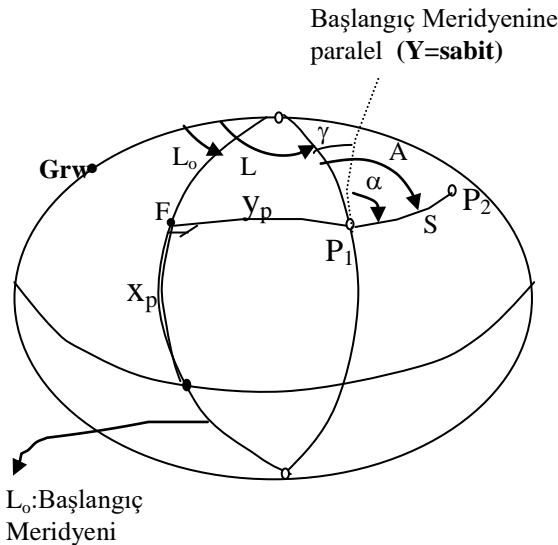
Yerel çalışmalar için seçilmiş herhangi bir jeodezik dik koordinat sistemi varsa, bu sistemin başlangıç noktasından geçen meridyen de başlangıç meridyeni olarak alınabilir. Buna göre;

a) Seçilen başlangıç meridyeninin Gauss-Krüger projeksiyonu düzlemindeki karşılığı X_g eksenini olarak alınır.

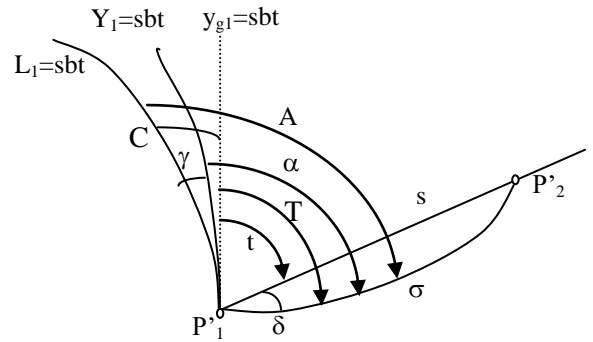
b) Bu durumda başlangıç meridyeninde uzunluk deformasyonu yoktur. Başlangıç meridyeni ile ekvatorun kesiştiği nokta sistemin başlangıç noktasıdır.

Gauss-Krüger Projeksiyonunda Yaklaşma Açısı

Kürede olduğu gibi elipsoidde de bir noktadaki yaklaşma açısı o noktadaki meridyen doğrultusuyla X eksenini ($Y = \text{sabit}$) arasındaki γ açısıdır. Benzer durum Gauss-Krüger projeksiyon düzleminde meridyen doğrultusuyla X_g eksenini ($Y_g = \text{sabit}$) arasındaki C açısının varlığıdır. C açısına Gauss yaklaşma açısı denir ve elipsoidal semt ile azimut arasında geçiş yapmaya olanak sağlar [16],[28].



Şekil-2.a Elipsoid



Şekil-2.b GKP Düzlemi

Elipsoidde;

A : P_1P_2 nin elipsoidal azimutu

γ : P_1 deki yaklaşma (konvergens) açısı

$\alpha = A - \gamma$: P_1P_2 nin elipsoidal semt (açıklık) açısı

S: P_1P_2 Jeodezik eğri uzunluğu

Projeksiyon Düzleminde;

T = A - C : $P'_1P'_2$ nin Gauss açıklık açısı

t = T - δ : $P'_1P'_2$ nin Projeksiyon düzlemindeki açıklık açısı

δ : Projeksiyon düzleminde P'_1 deki doğrultu redüksiyonu

C : P'_1 deki Gauss yaklaşma (konvergens) açısı

s: $P'_1P'_2$ uzunluğu (projeksiyon düzleminde)

σ : P_1P_2 Jeodezik eğri uzunluğunun projeksiyon düzlemindeki karşılığı ($\sigma \approx s$)

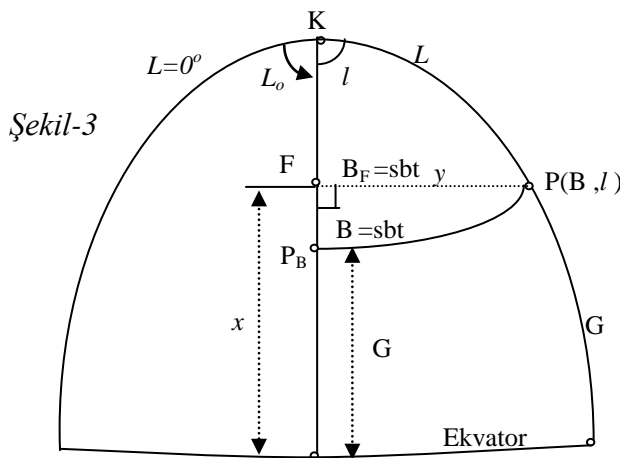
C ve γ açıları teorik olarak farklı olmakla beraber aralarındaki fark pratikte rahatlıkla göz ardı edilebilmektedir [16]. Örneğin C ve γ açıları aralarındaki fark $B = 40^\circ$ ve $l = 2^\circ$ için $C - \gamma = 0.009''$ dir.

$$C = \frac{\rho t}{N} y_g - \frac{\rho t(1+t^2-\eta^2)}{3} \left(\frac{y_g}{N}\right)^3 \quad (x, y \text{ koordinatlarından hesabı})$$

$$C = \sin Bl + \frac{1}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B (1+3\eta^2) l^3 + \dots (\text{elipsoidal koordinatlarından})$$

$$\gamma = \sin Bl + \frac{1}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B (1+\eta^2) l^3 + \dots$$

7.2 Elipsoidal Coğrafi Koordinatlardan GKP Koordinatlarının Bulunması



Elipsoidal coğrafi koordinatlardan Gauss-Krüger koordinatlarının bulunması problemiyle jeodezi uygulamalarında sıklıkla karşılaşılır (Şekil-3). Örneğin pafta köşe koordinatlarının hesabı probleminde olduğu gibi [4],[28].

Verilenler: P(B,L) noktasının coğrafi koordinatları,

İstenenler: L₀ başlangıç meridyenli sistemde P(x_g,y_g) Gauss-Krüger koordinatları ve C meridyen konvergensi açısı

Çözüm :

$l = L - L_0$ boylam farkı ve G : ekvatoradan itibaren B enlemine kadar olan meridyen yay uzunluğu x_g , y_g Gauss-Krüger koordinatları ve C meridyen konvergensi açısı olmak üzere

$$t = \tan B, \eta^2 = e'^2 \cos^2 B, V^2 = 1 + \eta^2 \text{ ve } N = c/V \text{ hesaplanır.}$$

Önce B enlemine kadar olan G meridyen yay uzunluğu

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B$$

şeklinde hesaplanır.

G değeri yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra Gauss-Krüger koordinatları coğrafi koordinatlara bağlı olarak ,

$$x_g = G + \frac{N}{24} \sin B \cos Bl^2 \left\{ 12 + (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cos^2 Bl^2 \right\}$$

$$y_g = N \cos Bl \left\{ 1 + \frac{1}{6} (1 - t^2 + \eta^2) \cos^2 Bl^2 + \frac{1}{120} (5 - 18t^2 + t^4 - 58\eta^2 t^2) \cos^4 Bl^4 \right\}$$

eşitliklerinden hesaplanabilir. Gauss yaklaşma açısı derece cinsinden

$$C = \sin B l^0 \{ 1 + 1.0153914 \times 10^{-4} (1 + 3\eta^2) \cos^2 B l^0 \}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek-1:

Elipsoidal coğrafi koordinatları B = 39° 00' 36" ve L = 39° 30' 00" olarak verilen noktanın L₀ = 39° başlangıçlı sistemdeki x_g, y_g Gauss-Krüger koordinatlarını ve C meridyen yakınsamasını bulunuz.

Çözüm :

$$l = L - L_0 = 30' \text{ boylam farkı ve } B = 39^\circ 00' 36'' \text{ enlemi için G değeri}$$

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B = 4319686.9818m$$

$$t = \tan B = 0.810073057$$

$$\eta^2 = e^2 \cos^2 B = 0.0040865204555,$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1.00408652046$$

$$N = c / V = 6386899.81494$$

olmak üzere

$$x_g = G + \frac{N}{24} \sin B \cos Bl^2 \{12 + (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cos^2 Bl^2\} = 4319805.9330 \text{m}$$

$$y_g = N \cos Bl \left\{ 1 + \frac{1}{6} (1 - t^2 + \eta^2) \cos^2 Bl^2 + \frac{1}{120} (5 - 18t^2 + t^4 - 58\eta^2 t^2) \cos^4 Bl^4 \right\}$$

$$y_g = 43309.1669 \text{m}$$

$$C = \sin Bl^\circ \{1 + 1.0153914 \times 10^{-4} (1 + 3\eta^2) \cos^2 Bl^{\circ 2}\} = 0.314728011^\circ = 18'53.0208''$$

olarak bulunur.

7.3 GKP Koordinatlarından Elipsoidal Coğrafi Koordinatların Bulunması

Bu problemde; bir L_0 sisteminde $P(x_g, y_g)$ Gauss-Krüger koordinatları verilen noktanın $P(B, L)$ elipsoidal coğrafi koordinatları ve C meridyen yakınsaması açısının bulunması amaçlanır.

Çözüm : Önce F ayak noktasının B_F enlemi $G = x_g$ meridyen yayını gören enlem değeri olarak hesaplanır.

$$\sigma = G / A'$$

$$B_F = \sigma + B'' \sin 2\sigma + C'' \sin 4\sigma + D'' \sin 6\sigma + \dots$$

Buradaki katsayılar;

$$A'' = 111\,136.536655 \text{m}^\circ$$

$$B'' = 0.144\,930\,070^\circ$$

$$C'' = 0.000\,213\,851^\circ$$

$$D'' = 0.000\,000\,432^\circ$$

Noktanın elipsoidal coğrafi koordinatları; F ayak noktasının B_F enlemi yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra istenen B, L ve C değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B = B_F - \frac{\rho}{2} \tan B_F \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \left\{ 1 + \eta_F^2 - \frac{1}{12} (5 + 6\eta_F^2 + 3t_F^2 - 6\eta_F^2 t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \right\}$$

$$L = L_0 + \frac{\rho}{\cos B} \left(\frac{y_g}{N_F} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_F^2 + 2t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 + \frac{1}{120} (5 + 28t_F^2 + 24t_F^4) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^4 \right\}$$

$$C = \frac{\rho t}{N} y_g - \frac{\rho t (1 + t^2 - \eta^2)}{3} \left(\frac{y_g}{N} \right)^3$$

NOT: B_F enleminin hesabı, diğer katsayıların hesabında kullanıldığı için çok önemlidir. Bu nedenle yeteri doğrulukta en az 0.0001'' duyarlıkta hesaplanmalıdır.

Örnek-2: Gauss-Krüger koordinatları $L_0 = 30^\circ$ sisteminde

$$x_g = 4459985.978\text{m}$$

$$y_g = -47194.977\text{m}$$

olarak verilen noktanın (B, L) elipsoidal coğrafi koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Önce B_F ayak noktasının enlemi $G = x_g$ meridyen yayını gören enlem değeri olarak hesaplanır.

$$\sigma = G / A'$$

$$B_F = \sigma + B'' \sin 2\sigma + C'' \sin 4\sigma + D'' \sin 6\sigma = 40.2736032064^\circ$$

B_F ayak noktasının enlemi yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra ,

$$t = \tan B_F = 0.847269923893 \quad , \eta^2 = e^{-2} \cos^2 B_F = 3.93987011E-3$$

$$V_F^2 = 1 + \eta^2 = 1.00393987 \quad N_F = c / V = 6387366.28053$$

değerleri hesaplanır, ve aşağıdaki eşitliklerden diğer istenenler bulunur.

$$B = B_F - \frac{\rho}{2} \tan B_F \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \left\{ 1 + \eta_F^2 - \frac{1}{12} (5 + 6\eta_F^2 + 3t_F^2 - 6\eta_F^2 t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \right\}$$

$$B = 40.2722728869^\circ = 40^\circ 16' 20.1824''$$

$$L = L_0 + \frac{\rho}{\cos B} \left(\frac{y_g}{N_F} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_F^2 + 2t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 + \frac{1}{120} (5 + 28t_F^2 + 24t_F^4) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^4 \right\}$$

$$L = 29.4451422806^\circ = 29^\circ 26' 42.5122''$$

$$C = \frac{\rho t}{N} y_g - \frac{\rho t (1 + t^2 - \eta^2)}{3} \left(\frac{y_g}{N} \right)^3 = -0.358700453^\circ = -21' 31.3216''$$

olarak bulunur.

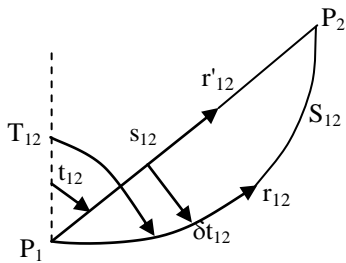
Not: Coğrafi koordinatlar ile Gauss-Kruger (UTM) koordinatları arasında dönüşüm hesaplarının elle yapılması yorucu olabilir. Bu nedenle hesaplamaların bilgisayar ortamında yapılması uygun olur. Bu amaçla internet ortamında kullanıma sunulan hazır programlardan da yararlanılabilir.

7.4 Gauss-Krüger Projeksiyon Yüzeyinde Hesaplamalar

Gauss-Krüger projeksiyonu (GKP) yüzeyinde jeodezik hesaplamaların yapılabilmesi için gerekli matematik bağıntılar literatürde mevcuttur. Ancak burada ölçülerin (doğrultu, uzunluk) GKP yüzeyine indirgenmesi suretiyle jeodezik hesaplamaların nasıl yapılacağı gösterilecektir. Eğer ölçüleri projeksiyon yüzeyine indirgersek jeodezik hesaplamalar çok kolaylaşır. Projeksiyon yüzeyi de bir düzlem olduğuna göre yapılacak tüm jeodezik hesaplamalar düzlem esaslara göre gerçekleştirilir. Doğaldır ki hesaplamalarda kullanılacak sabit (dayanak) noktalarının koordinatlarının projeksiyon düzlemindeki değerler olması gerekir [4],[6]. GKP de indirgemeli hesaplamalar Bölüm 17.12 de anlatılan küre yüzeyinde Soldner koordinatlarıyla yapılan indirgemeli hesaplara benzer tek fark indirgeme eşitliklerinin değişik olmasıdır.

7.5 Ölçülerin GKP Yüzeyine İndirgenmesi

Fiziksel yeryüzünde yapılan gözlemlerin referans yüzeyi olarak seçilen elipsoid yüzeyine indirgedikten sonra projeksiyon yüzeyindeki hesaplamalar için ölçülerin projeksiyon yüzeyine de indirgenmeleri gerekir. Gauss-Krüger projeksiyon koordinatları ile yapılacak uzunluk, açıklık açısı ve alan hesapları sonucunda bulunacak değerler projeksiyon yüzeyi değerleri olacaktır. Şüphesiz bu değerler orijinal yüzey (küre ya da elipsoid) üzerindeki değerlerden farklı olacaktır. Uzunluk, açı ve alandaki değişimler aşağıdaki indirgeme (redüksiyon) eşitliklerinden hesaplanabilir. İndirgeme eşitliklerindeki R yarıçapı olarak çalışma bölgesindeki Gauss küresi yarıçapı R_g alınmalıdır [4].



- S_{12} : Elipsoidal uzunluk
- T_{12} : Elipsoidal semt
- r_{12} : Ölçülen doğrultu
- s_{12} : GKP yüzeyindeki uzunluk
- t_{12} : GKP yüzeyindeki semt
- r'_{12} : GKP yüzeyindeki doğrultu
- δt_{12} : Doğrultu indirgemesi (redüksiyonu)

Şekil-4 GKP de İndirgemeler

Gauss Kruger Projeksiyonunda Uzunluk indirgemesi

Gauss-Kruger projeksiyon yüzeyindeki kenar her zaman elipsoid yüzeyindeki karşılığından büyüktür. Projeksiyon yüzeyindeki kenarı s , elipsoid üzerindeki kenarı S ile gösterirsek indirgeme (redüksiyon) miktarı

$$\delta_s = s - S = \frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

olur. Kısa kenarlar söz konusu ise y_1 ve y_2 koordinatları yerine bunların ortalaması y_m değeri kullanılırsa indirgeme eşitliği aşağıdaki gibi daha sade bir görünüm alır.

$$\delta_s = s - S = s \frac{y_m^2}{2R^2} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pratikte ve fazla doğruluk gerektirmeyen işlemlerde, örneğin poligon hesaplarında kenarların deniz düzeyine indirgenmesi ile projeksiyon indirgemesi aşağıdaki gibi toplu olarak yapılabilir.

$$s_{12} = S'_{12} \left(1 + \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{H}{R} \right) \quad H = \frac{H_1 + H_2}{2} : \text{Ort.yükseklik}$$

Burada; S'_{12} : P_1 noktasındaki yerel yatayda ölçülen kenar

s_{12} : deniz seviyesine ve GKP yüzeyine indirgenmiş kenardır.

G-K Projeksiyonunda Doğrultu (Açıklık Açısı) İndirgemesi

Elipsoid yüzeyindeki açıklık açısını (doğrultuyu) $T=\alpha$ ile projeksiyon yüzeyindeki açıklık açısını(doğrultuyu) t ile gösterirsek

$$\delta_{t_{12}} = T_{12} - t_{12} = r_{12} - r'_{12}$$

r_{12} : ölçülen doğrultu (elipsoid yüzeyindeki)

r'_{12} : projeksiyon düzlemindeki doğrultu

şeklinde hesaplanacak farka açıklık açısı (doğrultu) redüksiyonu denir. Aşağı eşitliklerden indirgeme değerleri hesaplanır.

$$\delta_{t_{12}} = T_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2)$$

üzerinde hesap yapılan kenarlar kısa ise redüksiyon bağıntıları daha basit biçime dönüştürülebilir. y_1 ve y_2 yerine bunların ortalama y_m değeri alınırsa,

$$T_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{2R^2} y_m (x_2 - x_1)$$

G-K Projeksiyonunda Alan Redüksiyonu

Elipsoid yüzeyindeki F alanı ile projeksiyon yüzeyindeki f alanı arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

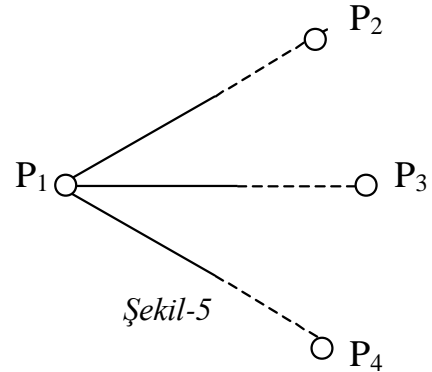
$$F - f = -f \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3R^2}$$

$$F - f = -f \frac{y_m^2}{R^2}$$

Örnek-3: Şekil-5 de P_1 noktasından P_2 , P_3 ve P_4 noktalarına olan yatay doğrultular ve elipsoid yüzeyindeki kenar ölçüleri verilmiştir. Söz konusu ölçüleri Gauss-Krüger projeksiyon yüzeyine indirgeyiniz. ($R=6373394$ m)

D.N	B.N	Yat. Doğrultu	Kenar
P_1	P_2	50.2030 ^g	7493.032m
	P_3	112.2578	9730.631
	P_4	185.6108	15202.155

N.N	X _g	Y _g
P_1	4130150.251	47623.712
P_2	4135243.369	42127.615
P_3	4136127.818	55302.025
P_4	4128342.023	62718.104



Çözüm: Noktaların Gauss-Krüger projeksiyon yüzeyindeki koordinatları da verildiğine göre projeksiyon yüzeyindeki değerler indirgeme eşitliklerinden yararlanarak aşağıdaki çizelgede olduğu gibi hesaplanır.

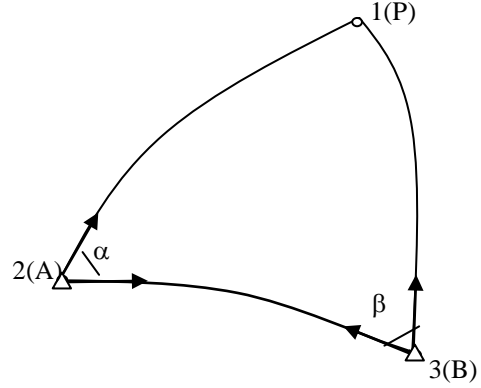
D.N	B.N	Ölçülen Yatay doğrultu r_{ik}	Elipsoid Yüzündeki Kenar S_{ik}	İndirg. dt_{ik} [cc]	İndirg. ds_{ik} [cm]	GKP'deki doğrultu $r'_{ik} = r_{ik} - dt_{ik}$	GKP'deki kenar $S_{ik} = S_{ik} + ds_{ik}$
P_1	P_2	50.2030 ^g	7493.032 m	1.83	18.59	50.202817 ^g	7493.218m
	P_3	112.2578	9730.631	2.35	31.78	112.257565	9730.949
	P_4	185.6108	15202.155	-0.75	57.31	185.610875	15202.728

Örnek-4: GKP Yüzeyinde Önden Kestirme

Gauss-Krüger Projeksiyon sisteminde koordinatları verilen 2 ve 3 noktalarından kestirilecek 1 noktasına olan doğrultu ölçüleri verilmiştir. 1 noktasının GKP koordinatlarını önden kestirmeyle bulunuz (R=6374249.664m).

Nokta	Yg	Xg
2(A)	43223.0550	4340045.3470
3(B)	43462.2600	4450468.2340

DN	BN	r_{ik} (Ölç.Doğrultu)
2	1	357.919857 ^s
2	3	0.491361
3	2	200.498430
3	1	242.672859



İstenilenler: 1(P) noktasının (Yg,Xg) koordinatları

Çözüm: GKP yüzeyinde önden kestirme yapabilmek için verilen doğrultu ölçülerinin GKP yüzeyine indirgenmesi gerekir. İndirgeme işlemini yapabilmek için de 1 noktasının yaklaşık koordinatlarına ihtiyaç vardır. Bu yaklaşık koordinatları düzlem önden kestirme hesabıyla bulabilmek için öncelikle ölçülen doğrultu farklarından α ve β taban açıları hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\alpha = 42.571504^s \quad \text{ve} \quad \beta = 42.174429^s$$

Taban açılarıyla önden kestirme eşitliklerinden kestirilecek noktanın yaklaşık GKP koordinatları,

$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a) \cot \alpha - (x_b - x_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = -3.8383\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a) \cot \alpha + (y_b - y_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = 4394996.197\text{m}$$

olarak bulunur(*).

(*) Bu eşitlikler yukarıdaki şekle göredir ve kestirilecek olan P noktası AB doğrusunun solunda kalmaktadır. Eğer P noktası sağda kalıyor ise yukarıdaki eşitliklerdeki α ve β açılarının eksi işaretli alınması gerekir.

Ölçülen doğrultuların GKP düzlemine indirgenmesi

<i>DN</i>	<i>BN</i>	$r_{ik}(\text{Ölç. Doğr.})$ <i>T</i>	<i>İndirgeme</i> <i>dt=t-T</i>	$r'_{ik}(\text{İndirg. Doğr.})$ <i>t</i>
2	1	357.919857 ^g	-9.30 ^{cc}	357.918927 ^g
2	3	0.491361	-37.49	0.487611
3	2	200.498430	37.49	200.502179
3	1	242.672859	9.44	242.673803

değerleri elde edilir. Bu indirgenmiş doğrultularla düzlem taban açıları

$$\alpha = 42.568684^g \quad \text{ve} \quad \beta = 42.171624^g$$

olur. Şayet problemde ölçülen doğrultular yerine taban açıları α ve β verilmiş olsaydı. Bu açılar, doğrultu farkları ilgili açı değerlerini verecek şekilde doğrultulara dönüştürülür.

İndirgenmiş açılarla yeniden düzlem önden kestirme yapılırsa ,

P (1) noktasının kesin GKP koordinatları

$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a) \cot \alpha - (x_b - x_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = 0.1037\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a) \cot \alpha + (y_b - y_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = 4394996.1934\text{m}$$

olarak bulunur. İndirgeme değerlerini kontrol amacıyla yukarıda bulunan koordinatlarla doğrultu indirgeme değerleri yeniden hesaplanmış ancak aynı değerler tekrar elde edildiğinden iterasyona gerek kalmamıştır.

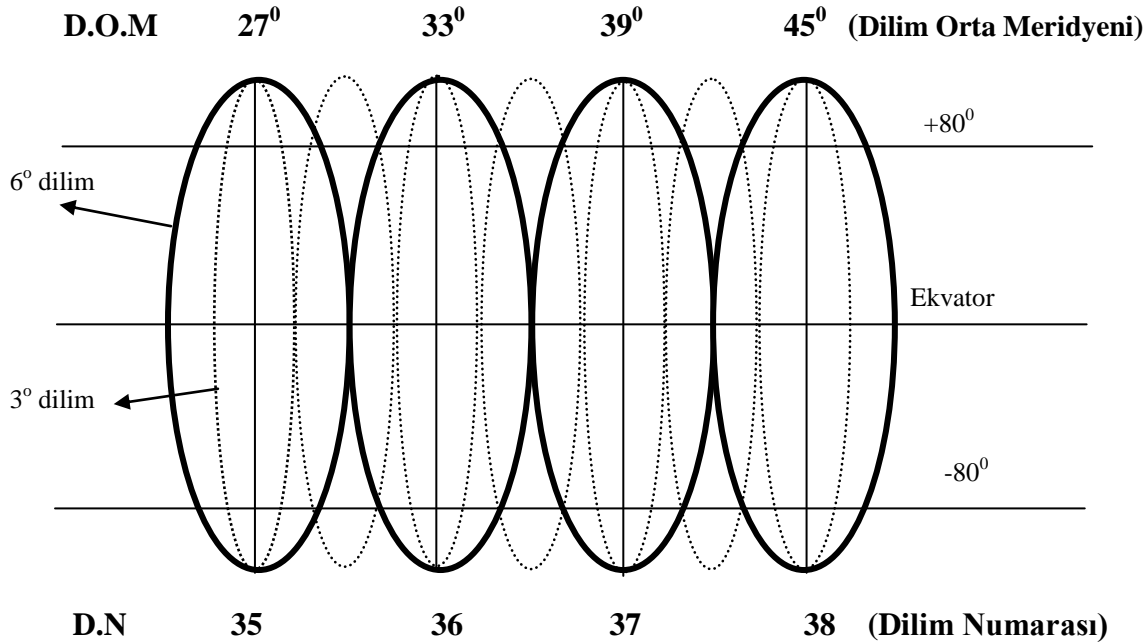
8. UTM PROJEKSİYONU

Universal Transvers Mercator (UTM) kelimelerinin baş harflerinden oluşan UTM projeksiyonu Gauss-Krüger projeksiyonundan başka bir şey değildir. Ancak koordinatları Gauss-Krüger koordinatlarından türetilen SAĞA ve YUKARI değerler olarak ifade edilir.

İkinci dünya savaşından sonra bütün dünya ülkeleri için ortak bir harita projeksiyonunun geliştirilmesi düşüncesi ortaya atılmış, uygulanacak projeksiyonda şu noktaların bulunması istenmiştir [4],[6],[18].

- Doğrultu deformasyonlarının az olması için konformluk,
- Olabildiğince az sayıda projeksiyon yüzeyinin kullanılması ve yüzeyler arasında dönüşümlerin mümkün olması,
- Ölçek deformasyonunun belirtilecek sınırlar arasında kalması,
- Dik koordinat sisteminde beraberliğin sağlanması,
- Meridyen yakınsamasının 5 dereceden küçük olması.

Yukarıdaki koşullara en iyi uyum sağlayabilecek projeksiyon türünün GKP olduğu saptanmış ancak bu projeksiyonda bazı değişiklikler yapılmış ve sonuçta UTM projeksiyonu ortaya çıkmıştır.



Şekil-6 Ülkemizde kullanılan 6° ve 3° dilimler

UTM sisteminde dünya 6^0 lik dilimlere bölünmüştür. UTM de 180^0 meridyeninden başlamak üzere dünya 6^0 boylam aralıklı 60 dilime ayrılmıştır. Dilimler 1 den başlamak üzere doğuya doğru artan sırada olmak üzere 1 ile 60 arasında numaralandırılmıştır. Her bir dilim bir projeksiyon sistemini belirler. Silindir, dilimin orta meridyeni boyunca dünyaya teğet alınır. Böylece bir dilimin 3^0 sağ ve 3^0 solu aynı bir dilim içinde yer alır. Ülkemiz 35, 36, 37 ve 38 nolu dilimler içinde kalmaktadır (şekil-6).

Dilim orta meridyeni (L_0) ile Dilim Numarası (DN) arasındaki ilişki;

$$DN = \frac{L_0 + 183}{6} \quad L_0 = (DN) * 6^0 - 183^0 \text{ şeklindedir.}$$

L boylamlı bir noktanın hangi 6^0 lik veya 3^0 lik dilime girdiği aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} 6^0 \text{ lik dilimde, dilim numarası} \quad DN &= \text{INT}(L/6) + 31 \\ 6^0 \text{ lik dilimde, dilim orta meridyeni} \quad L_0 &= 6 \times \text{INT}(L/6) + 3^0 \\ 3^0 \text{ lik dilimde, dilim orta meridyeni} \quad L_0 &= 3 \times \text{INT}[(L+1.5^0)/3] \end{aligned}$$

Burada; INT(.): tam değer fonksiyonunu gösterir.

Örneğin $\text{INT}(32.1)=32$ ve $\text{INT}(32.8)=32$ dir.

UTM projeksiyonunda, bir dilimde ekvatorun 80^0 kuzeyi ve 80^0 güneyi arasında kalan kısmın projeksiyonu yapılır. 80^0 paralelleri ile kutup noktaları arasında kalan bölgelerin haritaları, deformasyonlar aşırı olacağından UTM projeksiyon sisteminde yapılmaz. Bu bölgelerin haritaları “Universal Polar Stereografik” (UPS) denilen açı koruyan normal konumlu düzlem projeksiyon sistemine göre yapılır.

UTM projeksiyonunda 6^0 genişliğinde dilimlerin kullanılması deformasyonları artıracaktır. Bilindiği üzere GKP da diferansiyel ölçek yani büyüme oranı;

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \approx 1 + \frac{y^2}{2R^2} \text{ dir.}$$

Görüldüğü gibi ölçek, y değerinin (başlangıç meridyeninden olan uzaklık) karesi ile orantılı olarak artmaktadır. Dilim orta meridyeninde ölçek $m = 1$ olur ve 3^0 lik dilim sisteminde dilimin en sağında ya da en solunda olacak büyüme oranı

$$1,5^0 \longrightarrow y = 166,766 \text{ km} \longrightarrow m = 1,000342$$

6^0 lik dilim kullanıldığında dilimin en sağında ya da en solunda olacak büyüme oranı

$$3^0 \longrightarrow y = 333,532 \text{ km} \longrightarrow m = 1,00137$$

olmaktadır.

Gauss-Krüger projeksiyonunda, dilim orta meridyeninden uzaklaştıkça artan, bu düzensiz büyüme UTM projeksiyonunda uygun şekilde dağıtılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla dilim orta meridyeni ile dilim sınırı arasındaki uzaklığın yaklaşık ortasına gelen kısımda ölçek faktörü $m_0 = 1$ olması istenmiştir. Yani dilim eksenindeki ölçek faktörü bu defa $m_0 \neq 1$ olacaktır. O halde herhangi bir Y uzaklığındaki m ölçek faktörü

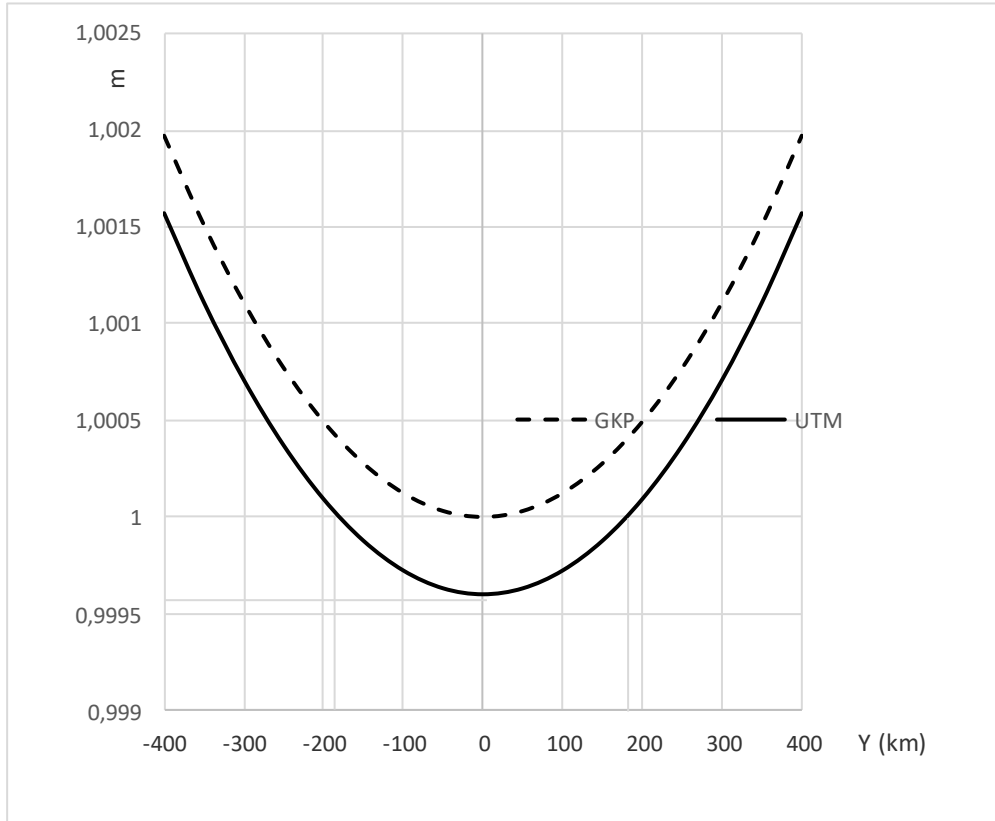
$$m = m_0 \left(1 + \frac{Y^2}{2R^2} \right)$$

bağıntısı ile hesaplanabilecektir. 6° lik dilim genişliğinde dilim ekseninin sınır noktaya olan uzaklığı ekvatordaki 340 km kabul edilirse bu uzaklığın yarısı 170 km olur.

$Y = 170$ km için $m = 1$ olacağından dilim eksenini için m_0 ölçek faktörü

$$m_0 = m \left(1 - \frac{Y^2}{2R^2} \right) = 0,9996$$

olarak bulunur. UTM projeksiyonunda uzaklıkların anormal büyümesini önlemek amacıyla hesaplanan X_g ve Y_g değerleri m_0 ölçek faktörü ile küçültülerek kullanılır.



Şekil-7 UTM ve GKP projeksiyonunda ölçek faktörünün değişimi

Dilim ekseninin solunda kalan noktaların Y_g değerlerinin (ordinatlarının) eksi değerden kurtulması için Y_g değeri m_0 ile küçültüldükten sonra 500 000m eklenir. X_g değerleri kuzey yarı kürede pozitif olduğu için herhangi bir değer eklenmesine gerek yoktur. Ancak güney yarı küre için m_0 ile küçültülen X_g değerine 10 000 000m eklenir.

Pozitif yapılan ordinatlara hangi dilimde olduğunu göstermek üzere o dilimin numarası tanıtıcı olarak baş tarafına eklenir. Böylece elde edilen koordinat değerlerine SAĞA ve YUKARI isimleri verilir. SAĞA ve YUKARI koordinatları UTM projeksiyonunun dik koordinat sistemindeki değerleridir. Bu değerlerle hesaplama yapılmaz sadece çizim yapılır. Noktalar arasında uzunluk, alan, doğrultu gibi büyüklüklerin hesaplanması gerektiğinde SAĞA ve YUKARI değerlerden geri giderek söz konusu noktaların Y_g ve X_g ile tanımlanan GKP koordinatlarının bulunup bu değerlerle hesapların yapılması gerekir. GKP koordinatlarından hesaplanacak değerler de şüphesiz projeksiyon yüzeyindeki değerler olacaktır. Küre veya elipsoid yüzeyindeki değerler istenirse redüksiyon değerlerinden hesaplanması yoluna gidilir[4],[7],[13].

Gauss-Krüger koordinatları bilinen bir noktada UTM koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$SAĞA = (DN) (500\ 000 + m_0 \cdot Y_g) \quad (m_0 = 0,9996)$$

$$YUKARI = m_0 \cdot X_g \quad (\text{kuzey yarı küre için})$$

$$YUKARI = 10\ 000\ 000 + m_0 \cdot X_g \quad (\text{güney yarı küre için})$$

Türkiye’ de ülke nirengi ağına dayalı 1/25000 ölçekli temel haritalar 6^0 dilim genişlikli Gauss-Krüger sistemine göre üretilmiştir. 1/5000 ölçekli Standart Topografik (ST) ve Standart Topografik Kadastral (STK) haritalar 3^0 lik dilim genişlikli Gauss-Krüger sisteminde üretilmektedir.

9.7.1. DEĞİŞTİRİLMİŞ UTM PROJEKSİYONU

1/5000 ve daha büyük ölçekli haritaların yapılmasında dilim genişliği 3^0 olan değiştirilmiş UTM projeksiyonu kullanılmaktadır. Bu projeksiyonda $m_0 = 1.0000$ alınır. SAĞA ve YUKARI değerlerin hesabı UTM projeksiyonunda olduğu gibi hesaplanır. Ancak SAĞA değerinin önünde bulunan dilim numarası bu projeksiyonda kullanılmaz. Değiştirilmiş UTM projeksiyonunda bir noktanın sağa ve yukarı değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır [18].

$$\begin{aligned} \text{SAĞA} &= 500\,000 + Y_g \\ \text{YUKARI} &= X_g \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, Değiştirilmiş UTM projeksiyonu, Gauss-Krüger projeksiyonundan başka bir şey değildir. Aradaki fark, koordinatların sağa ve yukarı olarak adlandırılması ve Y_g değerlerine 500 000m eklenmesidir.

Örnek-1: UTM koordinatları aşağıdaki şekilde verilen noktanın Gauss-Krüger koordinatlarını ve aynı D.O.M daki değiştirilmiş UTM koordinatlarını bulunuz.

$$\text{SAĞA} = 36\,335\,127.111 \text{ m}$$

$$\text{YUKARI} = 4\,889\,701.222 \text{ m}$$

Çözüm: Verilen SAĞA değerinden dilim numarasının $DN = 36$ olduğu görülmektedir. Noktanın Gauss-Krüger koordinatları; ($m_0 = 0.9996$)

$$\text{SAĞA} = (DN) (500\,000 + m_0 \cdot Y_g)$$

$$\text{YUKARI} = m_0 \cdot X_g$$

$$Y_g = (\text{SAĞA} - 500\,000) / m_0 = -164\,938.865 \text{ m}$$

$$X_g = \text{YUKARI} / m_0 = 4\,891\,657.885 \text{ m}$$

Dilim orta meridyeni;

$$L_0 = (DN) \cdot 6^\circ - 183^\circ = 33^\circ$$

3° lik değiştirilmiş UTM koordinatları ($m_0 = 1.0000$)

$$\text{SAĞA} = 500\,000 + m_0 \cdot Y_g = 335\,061.135 \text{ m}$$

$$\text{YUKARI} = m_0 \cdot X_g = 4\,891\,657.885 \text{ m}$$

Örnek-2 : Dilim orta meridyeni $L_0 = 27^\circ$ sisteminde Değiştirilmiş UTM koordinatları

$$\text{SAĞA} = 735\,999.113 \text{ m} \quad \text{YUKARI} = 4\,349\,715.215 \text{ m}$$

olarak verilen noktanın aynı dilimdeki UTM koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $DN = (L_0 + 183) / 6^\circ = 35$

$$X_g = \text{YUKARI} / m_0 = 4\,349\,715.215 \text{ m} \quad (m_0 = 1.0000)$$

$$Y_g = (\text{SAĞA} - 500\,000) / m_0 = 235\,999.113 \text{ m}$$

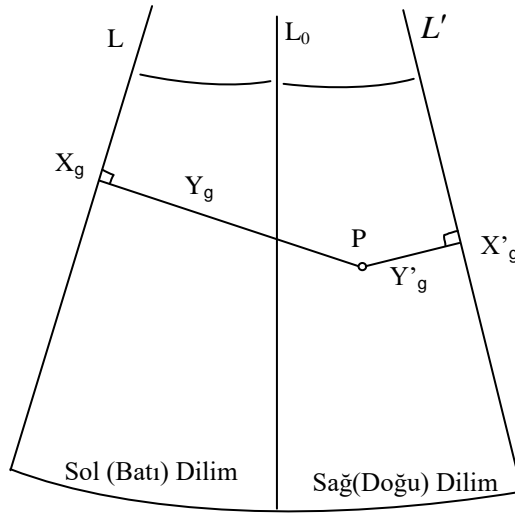
UTM koordinatlarının hesabı ($m_0 = 0.9996$)

$$\text{SAĞA} = (DN) (500\,000 + m_0 \cdot Y_g) = 35\,735\,904.713$$

$$\text{YUKARI} = m_0 \cdot X_g = 4\,347\,975.329$$

8.2 GAUSS-KRÜGER PROJeksiYONUNDA KOMŞU DİLİMLER ARASINDA KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

Jeodezik hesaplamaların yapılacağı bölge birden fazla dilimi kapsıyorsa bütün noktaların aynı boylam başlangıcına göre ifade edilmesi (dönüştürülmesi) gerekir. Dönüştürme işlemi, aynı genişlikli dilimler arasında olabileceği gibi farklı dilim genişlikli sistemler arasında da olabilir. Bu dönüştürme işlemi *dolaylı ve direkt* olarak iki şekilde yapmak mümkündür. Burada basitliği nedeniyle yalnızca dolaylı dönüşüm ele alınacaktır.



Şekil-8

Dolaylı Dönüşüm

Bir noktanın bir (L) dilimindeki X_g, Y_g Gauss-Krüger koordinatları verilmişken bu dilime komşu veya komşu olmayan diğer bir (L') dilimindeki X'_g, Y'_g koordinatlarını bulmak için (şekil-8) bu yöntemde noktanın bir dilimde verilen Gauss-Krüger koordinatlarından önce elipsoidal coğrafi koordinatlara geçiş ve daha sonra da bu koordinatlardan ikinci dilimdeki Gauss-Krüger koordinatlarına geçiş yapılır [4].

$$(X_g, Y_g)_L \longrightarrow (B, L) \longrightarrow (X'_g, Y'_g)_{L'}$$

Örnek-1: 33^0 diliminde Gauss-Krüger koordinatları;

$$y_g = -164\,938.865 \text{ m ve } x_g = 4\,891\,657.885 \text{ m}$$

olarak verilen noktanın 30^0 dilimindeki Gauss-Krüger koordinatlarının dolaylı yöntemle bulunması.

Çözüm: Önce noktanın verilen Gauss-Krüger koordinatlarından aşağıdaki eşitliklerden coğrafi koordinatlar bulunur (Bölüm 19.2.2).

F ayak noktasının B_F enlemi $G = x_g$ meridyen yayını gören enlem değeri olarak hesaplanır.

$$\sigma = G / A'$$

$$B_F = \sigma + B'' \sin 2\sigma + C'' \sin 4\sigma + D'' \sin 6\sigma = 44.15970770^\circ$$

$$t = \tan B_F = 0.971090180 \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B_F = 3.48333195E-3 ,$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1.00348333195 \quad , \quad N = c / V = 6388819.0922 \quad \text{olmak}$$

üzere

$$B = B_F - \frac{\rho}{2} \tan B_F \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \left\{ 1 + \eta_F^2 - \frac{1}{12} (5 + 6\eta_F^2 + 3t_F^2 - 6\eta_F^2 t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 \right\}$$

$$B = 44^\circ 08' 27.9929''$$

$$L = L_o + \frac{\rho}{\cos B} \left(\frac{y_g}{N_F} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_F^2 + 2t_F^2) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^2 + \frac{1}{120} (5 + 28t_F^2 + 24t_F^4) \left(\frac{y_g}{N_F} \right)^4 \right\}$$

$$L = 30^\circ 56' 19.6154''$$

Meridyen yakınsaması ise ilgili eşitlikten $C = -1.435811856^\circ$ olarak bulunur. Hesaplanan coğrafi koordinatlardan bu defa (Bölüm 19.2.1) deki eşitliklerden Gauss-Krüger koordinatları ($L_o=30^\circ$) sisteminde,

$$l = L - L_o = 56' 19.6154'' = 0.938782055'' \text{ boylam farkı}$$

$B = 44^\circ 08' 27.9929''$ enlemiyle hesaplanan terimler,

$$t = \tan B = 0.970459664 \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B = 3.485527973E-3 ,$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1.003485527973 \quad , \quad N = c / V = 6388812.1016$$

$$G = A' B + B' \sin 2B + C' \sin 4B + D' \sin 6B = 4889591.2394\text{m}$$

olmak üzere Gauss-Krüger koordinatları,

$$x_g = G + \frac{N}{24} \sin B \cos B l^2 \left\{ 12 + (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \cos^2 B l^2 \right\} = 4890019.857\text{m}$$

$$y_g = N \cos B l \left\{ 1 + \frac{1}{6} (1 - t^2 + \eta^2) \cos^2 B l^2 + \frac{1}{120} (5 - 18t^2 + t^4 - 58\eta^2 t^2) \cos^4 B l^4 \right\}$$

$$y_g = 75121.031\text{m}$$

meridyen yakınsaması ise ilgili eşitlikten $C = 0.653824446^\circ$ olarak bulunur.

Örnek-2: UTM koordinatları;

$$SAĞA = 35\ 681\ 014.292\text{m}$$

$$YUKARI = 4\ 364\ 760.074\text{m}$$

olarak verilen noktanın 30° dilimindeki değiştirilmiş UTM koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: Noktanın verilen UTM koordinatlarından dilim numarasının 35 olduğu ve dilim orta meridyeninin 27° meridyeni olduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle önce noktanın 27° meridyenindeki Gauss-Kruger koordinatlarını bulmak ve daha sonra bu koordinatları 30° meridyenine dönüştürmek gerekir.

Noktanın 27° meridyenindeki Gauss-Kruger koordinatları;

$$DN=35$$

$$DOM=27^\circ$$

$$Y_g = (SAĞA - 500\ 000) / m_0$$

$$Y_g = (681\ 014.292 - 500\ 000) / 0.9996 = 181\ 086.727\ \text{m}$$

$$X_g = YUKARI / m_0$$

$$X_g = 4\ 364\ 760.074 / 0.9996 = 4\ 366\ 506.677\ \text{m}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla noktanın 27° meridyenindeki değiştirilmiş UTM koordinatları;

$$SAĞA = 681\ 086.727\text{m}$$

$$YUKARI = 4\ 366\ 506.677\text{m}$$

olur.

Noktanın 27° meridyenindeki Gauss-Krüger koordinatlarından 30° meridyenindeki Gauss-Krüger koordinatları dolaylı dönüşüm eşitliklerinden ;

Önce noktanın coğrafi koordinatları;

$$B = 39^\circ\ 24'\ 45.748''$$

$$L = 29^\circ\ 06'\ 9.0578''$$

$$C = 1^\circ\ 20'\ 6.8962''$$

olarak bulunur. Noktanın 30 derece meridyenindeki Gauss-Krüger koordinatları;

$$Y_g = -77\ 296.241\ \text{m}$$

$$X_g = 4\ 364\ 781.030\text{m}$$

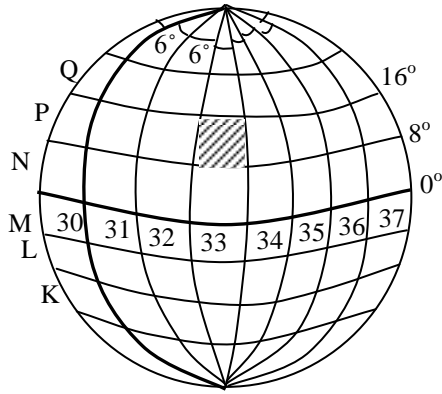
olur. Noktanın 30° dilimindeki değiştirilmiş UTM koordinatları;

$$SAĞA = 500\ 000 + Y_g = 422\ 703.759\text{m}$$

$$YUKARI = X_g = 4\ 364\ 781.030\text{m}$$

8.3 Pafta Bölümlenmesi ve Pafta Köşe Koordinatlarının Bulunması

Nato üyesi ülkelerin kullandığı Universal Transverse Mercator (UTM) projeksiyonu açı koruyan, silindirik, transversal bir projeksiyondur. Bu sistemde dünya 80° kuzey ve güney enlemleri arası 8° lik paralellerle bölünmüştür. Güneyden başlanarak her bölgeye bir harf verilmiştir. Ayrıca dünya 6° lik boylamlarla 60 dilime bölünmüştür [9],[28]. Dilimler 180° boylamından başlayarak saat ibresinin tersi yönünde 1 den başlayarak numaralanmıştır. Türkiye 35,36,37 ve 38. dilimler içindedir. Dilim orta meridyenlerinin boylamları $27^\circ, 33^\circ, 39^\circ, 45^\circ$ dir. Örneğin 35. dilim orta meridyeninin boylamı 27° dir.



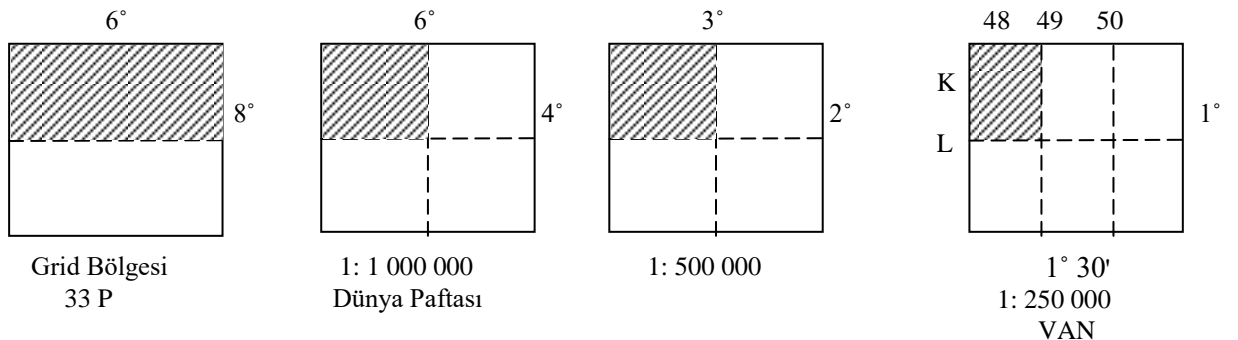
8° lik enlemler ve 6° lik boylamlarla sınırlanmış bölgeye “GRİD BÖLGESİ” denir. Örneğin yandaki şekilde taralı alan 33 P Grid Bölgesidir.

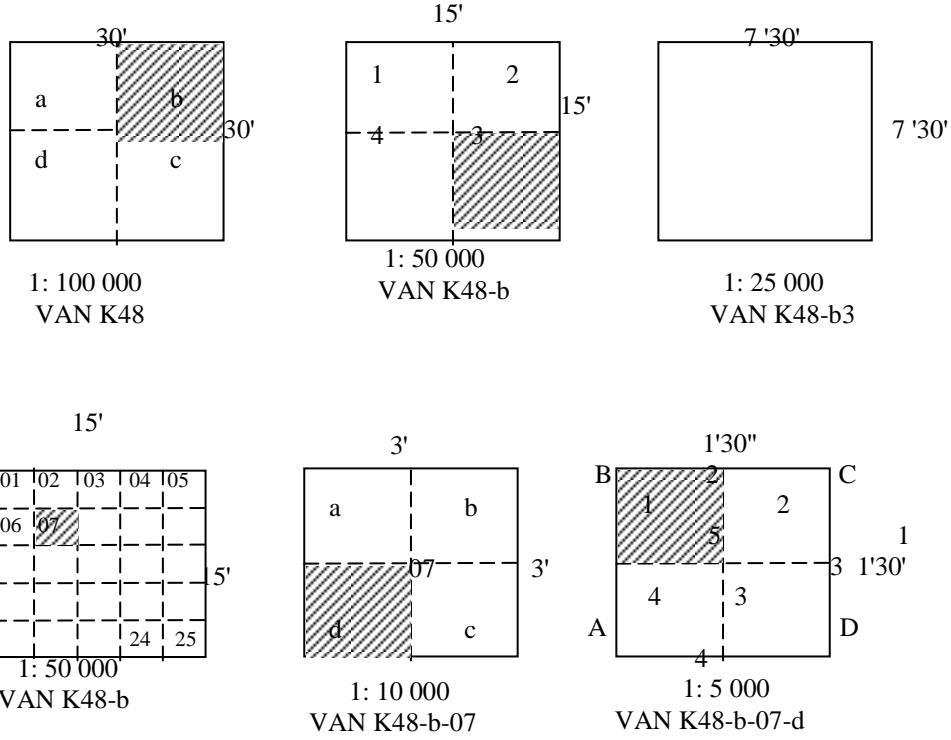
Harita paftaları ulusal ve uluslararası standartlara göre bölünlenirler.

$1/1000\ 000$ - $1/250\ 000$ ölçek aralığındaki paftalar uluslararası sisteme göre $1/250\ 000$ ve daha büyük ölçekli harita paftaları ise ulusal sisteme göre bölümlendirilir.

$8^\circ \times 6^\circ$ boyutlu bir coğrafi grid bölgesi kuzey-güney yönünde ikiye ayrılırsa $4^\circ \times 6^\circ$ boyutlarında $1/1\ 000\ 000$ ölçekli pafta oluşur.

$1/1\ 000\ 000$ ölçekli paftanın dörde bölünmesiyle $2^\circ \times 3^\circ$ boyutlu $1/500\ 000$ ölçekli pafta, bu paftanın da dörde bölünmesiyle $1^\circ \times 1^\circ 30'$ boyutlu $1/250\ 000$ ölçekli pafta elde edilir. Pafta içindeki en büyük şehrin adıyla anılır (VAN).





Ulusal paftalama sistemi

Ölçek	Pafta Boyutları	Adlandırma	Koordinat tipi	Bölünme türü
1:250000	1° x 1° 30''	TRABZON	UTM ve coğrafi (6°)	Coğrafi Koordinat
1:100000	30' x 30'	TRABZON-G42		
1:50000	15' x 15'	TRABZON-G42-a		
1:25000	7'30'' x 7'30''	TRABZON-G42-a1		
1:10000	3' x 3'	TRABZON-G42-a-01	Değiştirilmiş UTM (3°)	Dik Koordinat. (3°) Değ.UTM
1:5000	1'30'' x 1'30''	TRABZON-G42-a-01-a		
1:2000		TRABZON-G42-a-01-a-1		
1:1000		TRABZON-G42-a-01-a-1-a		

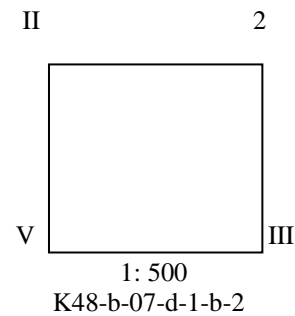
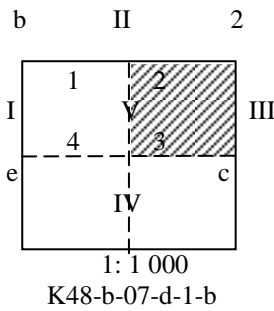
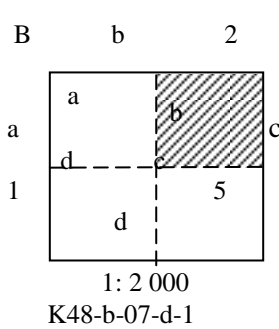
1/100 000 lik paftalar 30'x30' boyutundadır. 1/250 000 lik paftaların 6 ya bölünmesiyle elde edilir. Adlandırma şöyle yapılır: ülkemizde 44° enleminden 36° enlemine kadar 30' aralıklarla A dan başlayarak P ye kadar harf verilir. 24° boylamından 48° boylamına kadar 11 den başlayarak 59 a kadar numara verilir. 1/100 000 lik pafta bu gridlerden hangisine giriyor ise o ismi alır (VAN K48).

1/ 50 000 lik paftalar 1/100 000 lik paftaların 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde a, b, c, d harfleri verilir. 1 / 50 000 lik paftalar 15'x15' boyutundadır ve pafta isimlendirmesi (VAN K48- b) şeklinde yapılır.

1/ 25 000 lik paftalar 1/50 000 lik paftaların 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde 1,2,3,4 numaraları verilir. 1/ 25 000 lik paftalar 7'30"x7'30" boyutundadır ve pafta isimlendirmesi (VAN K48-b-3) şeklinde yapılır.

1/ 10 000 lik paftalar 1/50 000 lik paftaların 25 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak 01,02,03,...,24,25 numaraları verilir. 1/ 10 000 lik paftalar 3'x3' boyutundadır ve pafta isimlendirmesi (VAN K48-b-07) şeklinde yapılır.

1/ 5 000 lik paftalar 1/10 000 lik paftaların 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde a,b,c,d harfleri verilir. 1/ 5 000 lik paftalar 1'30"x1'30" boyutundadır ve pafta isimlendirmesi (VAN K48- b-07-d) şeklinde yapılır.



Ülkemizde 1/5000 lik paftaların köşe noktalarının koordinatları 3 derecelik **Değiştirilmiş UTM** sisteminde hesaplanır. Bilindiği gibi bu sistemdeki koordinatlar Gauss-Kruger koordinatlarından sadece Y değerine 500000m eklenerek bulunur. Söz konusu Gauss-Kruger koordinatları da coğrafi

koordinatlardan hesaplanır. 1/5000 den daha büyük ölçekli haritalar kenar uzunluklarının yarısı veya köşelerin Gauss-Kruger koordinatlarının ortalaması alınarak oluşturulur. Tüm bu paftaların boyutları 70x90 cm dir.

1/ 2 000 lik paftalar 1/5 000 lik paftaların pafta kenarlarının iki eşit parçaya ayrılması suretiyle 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde 1,2,3,4 numaraları verilir. Pafta isimlendirmesi (VAN K48-b-07-d-1) şeklinde yapılır.

1/ 1 000 lik paftalar 1/2 000 lik paftaların pafta kenarlarının iki eşit parçaya ayrılması suretiyle 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde a,b,c,d harfleri verilir. Pafta isimlendirmesi (VAN K48-b-07-d-1-b) şeklinde yapılır.

1/ 500 lik paftalar 1/1 000 lik paftaların pafta kenarlarının iki eşit parçaya ayrılması suretiyle 4 parçaya bölünmesiyle elde edilir. Parçalara sol üst köşeden başlayarak saat ibresi yönünde 1,2,3,4 numaraları verilir. Pafta isimlendirmesi (VAN K48-b-07-d-1-b-2) şeklinde yapılır.

8.4 HARİTALARDAN YARARLANMA

Haritalardan çok çeşitli amaçlar için yararlanmak mümkündür. Örneğin konum belirleme- koordinat okuma, noktalar arasında uzunluk, açı ölçme, alan hesaplama, eğim hesaplama, kesit çıkarma, hacim hesaplama, iki nokta arasında görüş olup olmadığını belirleme gibi konularda haritalardan yararlanılmaktadır. Haritaların ölçeği küçüldükçe haritalardan elde edilecek bilgilerin doğruluğunun da azaldığını göz önünde bulundurmak gerekir. Kartoğrafik doğruluk gereği haritaların üzerinden 0.2mm den daha küçük ayrıntıların okunması mümkün olmamaktadır. Örneğin 1/25000 lik bir haritadan okunacak bir uzunlukta peşinen

$$25000 \times 0.2 \text{mm} = 5 \text{m.}$$

hata yapıldığını kabul etmek gerekir.

1 / 25000 lik Haritalar ve Özellikleri

Ülkemizde 1/25000 den daha küçük ölçekli haritalar 1/25000 ölçekli haritalardan genelleştirme yaparak türetildikleri için 1/25000 ölçekli haritalar temel haritalar olarak da adlandırılmaktadır. Bu haritalar geniş alanları kapsayan hemen hemen bütün projelerde; karayolu, baraj, içme suyu, boru hattı, enerji nakil hattı, ormancılık projelerinde bölge planlarının hazırlanmasında hep altlık olarak kullanılırlar. 1/25000 ölçekli haritaların temel özellikleri:

-Bu haritalar HGK tarafından üretilmişlerdir ve belirli aralıklarla güncellemeleri aynı kurum tarafından yapılmaktadır.

- International (Hayford) elipsoidi üzerinde ED50 datumunda UTM (Universal Transvers Mercator) Projeksiyonunda 6° dilim genişliğinde üretilmişlerdir.

-Pafta boyutları 7' 30" x 7' 30" dur. Pafta 4cm x 4cm lik gridlere bölünmüş ve her gridi arazide 1 km² yi gösterir.

- Yeni üretilen 1/25000lik haritalar üzerine ilave olarak WGS84 gridleri de gösterilmiştir. Böylece her iki sistemde de harita üzerinden koordinat okumak mümkündür.

-Eşyükseklik eğrileri 10 metrede bir geçirilmiştir.

-1/25000 ölçekli haritaların GİZLİ liği vardır. İzinsiz, amaç dışında kullanımının cezası vardır. Günümüz bilgiye erişim olanakları düşünüldüğünde örneğin Google Earth vb. uygulamalar ile dünyanın her tarafının daha güncel görüntülerini bir cep telefonu ile istenildiği anda elde etmek mümkünken 1/25000 ölçekli haritaların gizliliği tartışmalı hale gelmektedir.

-Haritaların kenar çizgileri üzerinde derece ve grad bölümlenmesi yapılmıştır. böylelikle harita üzerinde noktaların coğrafi koordinatlarını derece veya grad biriminde de okumak mümkündür.

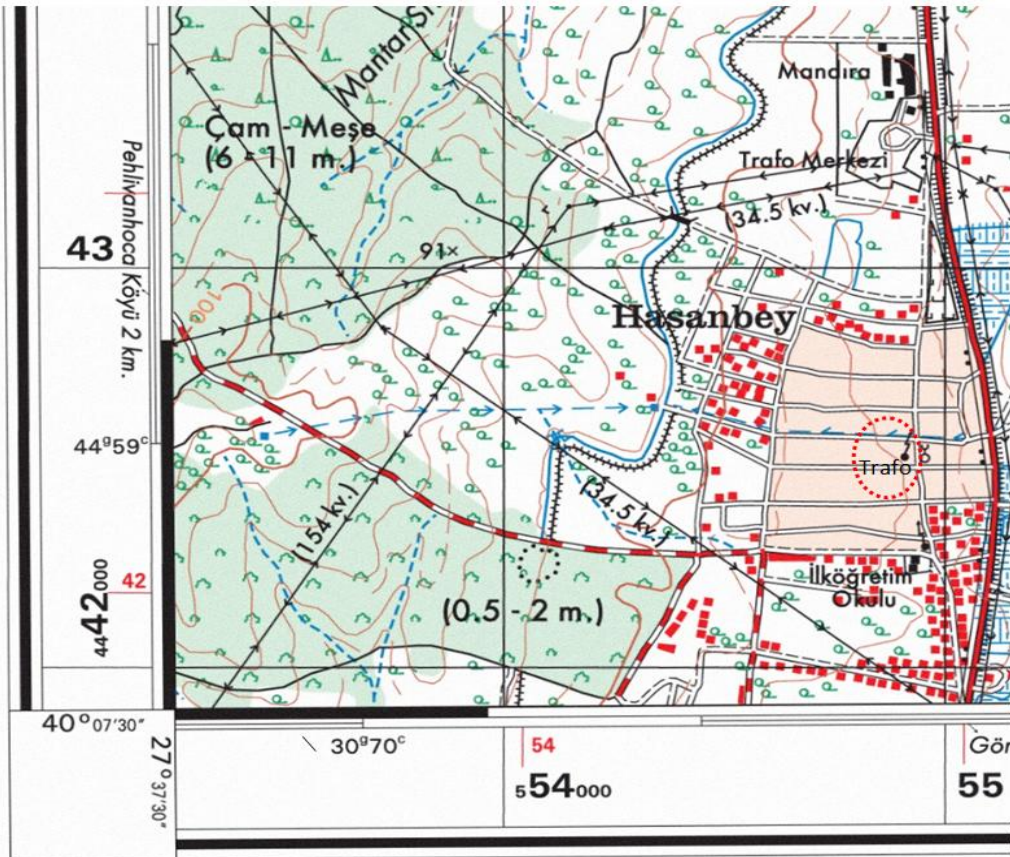
-1/25000 lik haritaları arazide bir pusula ile kolayca kuzeye yönlendirebilmek için gerekli açıklamalar mevcuttur.

-1/25000 ölçekli haritalar gösterdiği arazi parçasının kullanımına, örtüsüne ve topografyasına ait gayet nitelikli bilgiler vermektedir. Bu haliyle standartı yüksek bir harita olarak kabul edilmektedir.

Haritalardan koordinat okuma

Hangi ölçekli olursa olsunlar harita üzerindeki bir P noktasının gerek dik gerekse coğrafi koordinatları enterpolasyonla bulunur. Bu enterpolasyon yapılırken paftanın tamamı üzerinden değil P noktasının içinde bulunduğu grid üzerinden enterpolasyon yapılır. Böylece paftalarda olabilecek lokal deformasyonlardan olabildiğince sakınılır. Paftaların ölçeğine göre gridlerinin boyutları bellidir.

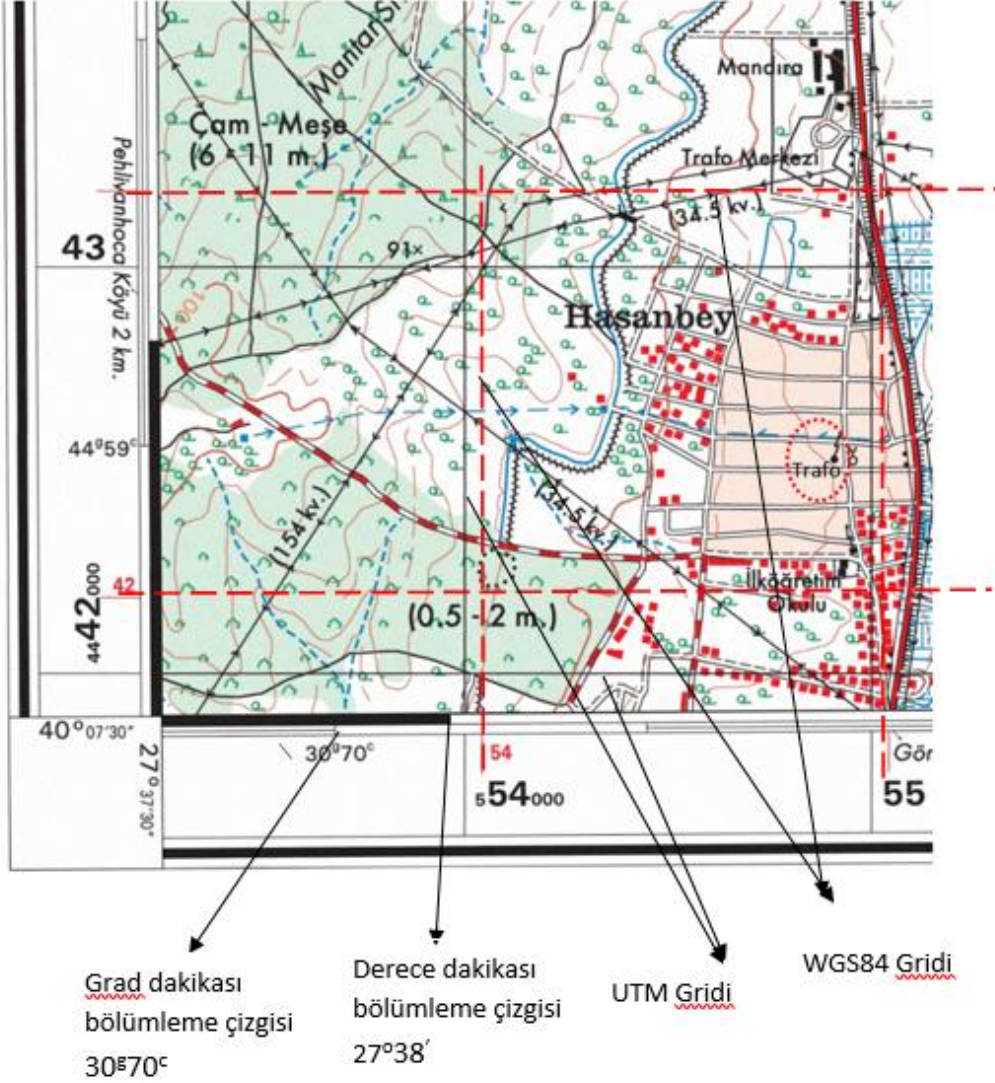
- 1/1000 ölçekli haritalarda grid aralığı 100m.(100m. → 10 cm.)
- 1/25000 ölçekli haritalarda grid aralığı 1000m.(1 Km. → 4 cm.)
- 1/50000 ölçekli haritalarda grid aralığı 1000m.(1 Km. → 2 cm.)
- 1/100000 ölçekli haritalarda grid aralığı 5000m.(5 Km. → 5 cm.)
- 1/250000 ölçekli haritalarda grid aralığı 10000m.(10 Km. → 4 cm.)



1/25000 Ölçekli Topoğrafik Harita

UTM Projeksiyonu

1/25000 ölçekli paftadan koordinat okumaya örnek olarak; paftada işaretli trafo'nun koordinatlarını okuyalım. Hangi türden koordinat okuyacaksak (UTM memleket, WGS84, coğrafi koordinat derece / grad cinsinden) noktamızı içine alan istenen koordinat türüne göre gridi çizmemiz gerekir. Harita üzerinde sadece UTM gridleri çizilidir. Diğer türden gridleri bizim çizmemiz gerekir. Pafta çerçevesi üzerinde siyah renkli uzun hatlar UTM gridini kırmızı kısa hatlar ise WGS84 gridini gösterir.



1 / 25000 lik Paftalar üzerinden Sağa Yukarı Koordinatlarının Okunması;

Paftada ilköğretim okulunun yukarısında bulunan traфонun UTM-Memleket sisteminde koordinatlarını okuyalım. Söz konusu traфонun içinde bulunduğu UTM gridinin alt ve sol yan kenarına birer dik inilerek dik boyları ölçülür. Önce noktanın bulunduğu UTM gridinin sol alt köşesinin koordinatları pafta kenarları üzerinde yazılı değerlerden belirlenir. Bu durumda gridimizin sol alt köşe noktasının koordinatları

SAĞA=554000 YUKARI=4442000

çetvelle pafta üzerinden ölçülen dik değerleri $dY=36.6\text{mm}$ $dX=20.0\text{mm}$ olsun UTM gridleri 25000 lik haritada $4\text{cm}\times 4\text{cm}$ olup arazideki karşılığı $1000\text{m}\times 1000\text{m}$ olacaktır.

Bu durumda;

$4\text{cm}=40\text{mm} \Rightarrow 1000\text{m}$ ye karşılık gelirse $dY=36.6\text{mm}$ **915m** ye karşılık gelir
 $4\text{cm}=40\text{mm} \Rightarrow 1000\text{m}$ ye karşılık gelirse $dX=20.0\text{mm}$ **500m** ye karşılık gelir.

Aradığımız traфонun koordinatları gridin köşe noktasının koordinatlarına eklenerek

SAĞA = $554000 + 915 = 554915\text{m}$

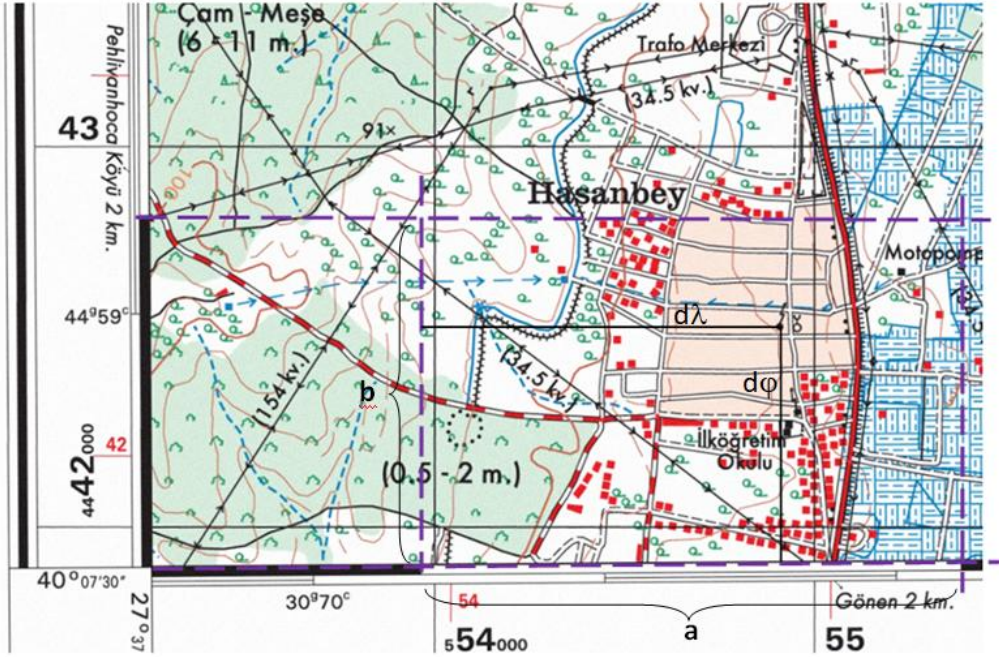
YUKARI= $442000 + 500 = 4442500\text{m}$

olarak okunmuş olur.

Söz konusu koordinat okuma işlemini WGS84 sisteminde yapmak istersek yapacağımız tek farklı işlem pafta çerçevesinde kırmızı kısa çizgilerle gösterilen WGS84 hatlarından noktamızı çevreleyen bir grid oluşturmak ve koordinat okuma işlemini bu grid üzerinden yapmak olacaktır.

Paftadan Coğrafi Koordinatların Okunması

Aynı trafo noktasının coğrafi koordinatlarını derece cinsinden okumak istersek, öncelikle noktamızı çevreleyen derece dakika bölümlene çizgilerinden bir grid oluştururuz. Gridlerin enlem ve boylam yönünde 1' lık olduğunu biliyoruz. Noktamızdan oluşturduğumuz gridin alt ve sol yan kenarına dikler inilir ve inilen dikler mm duyarlığında ölçülür. Gridin alt ve sol yan kenarları da mm. inceliğinde ölçüldükten sonra basit bir orantıyla noktamızın gridin sol alt köşesinden olan enlem, boylam farkları belirlenmiş olur. Hesaplanan bu farklar gridin sol alt köşesinin enlem ve boylam değerine eklenmek suretiyle aradığımız noktanın coğrafi koordinatlarını derece cinsinden bulmuş oluruz.



1/25000 lik Haritadan coğrafi koordinatların okunması

Noktanın coğrafi koordinatlarını grad cinsinden okumak istersek yapacağımız tek farklı şey noktamızı çevreleyen grad dakikası çizgilerinden bir grid oluşturmak ve bu grid üzerinden işlemlere devam etmek olacaktır.

Söz konusu trafo noktasının koordinatlarını derece cinsinden okumak için; önce gridin sol alt köşesinin enlem ve boylam değerleri

$$\varphi = 40^{\circ} 07' 30'' \quad \lambda = 27^{\circ} 38' 00''$$

olarak paftadan okunur. Noktadan gridin sol yan ve alt kenarlarına indirilen dikler mm inceliğinde

$$d\lambda = 47.4\text{mm} \quad d\varphi = 32.0\text{mm}$$

olarak ölçülmüş olsun. Gridimizin alt ve yan kenarları yine mm inceliğinde

$$a = 71.0\text{mm} \quad b = 46.5\text{mm}$$

ölçülmüş olsun. Bu durumda gridin sol alt köşesinden koordinat farkları

$$\Delta\varphi = d\varphi / b \times 0.5' = 32.0/46.5 \times 0.5' = 0.3441' = 21''$$

$$\Delta\lambda = d\lambda / a \times 1' = 47.4/71.0 \times 1' = 0.6676' = 40''$$

Normalde gridler 1' x1' boyutundadır. Ancak burada gridimizin paftanın kenar çizgisi üzerinde olduğu yer itibariyle yan kenarının 0.5' alt kenarının 1' olduğuna dikkat edelim.

Trafo noktasının enlem ve boylam değerleri

$$\varphi = 40^{\circ} 07' 30'' + 21'' = 40^{\circ} 07' 51''$$

$$\lambda = 27^{\circ} 38' 00'' + 40'' = 27^{\circ} 38' 40''$$

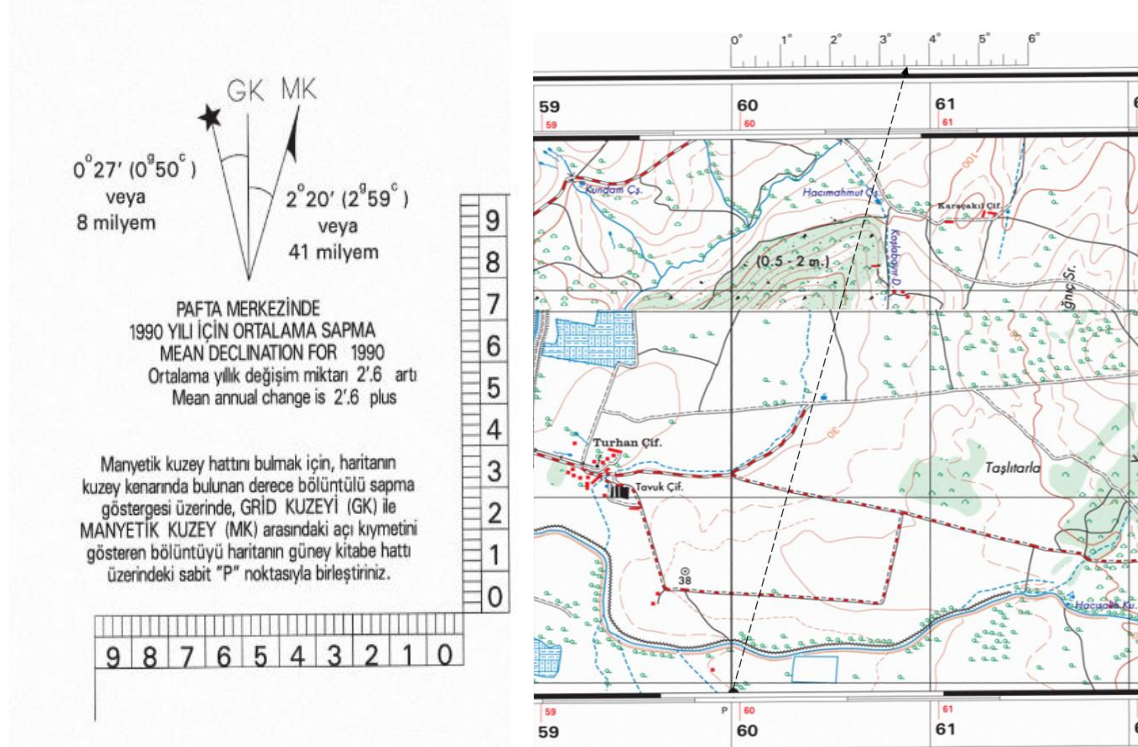
olur.

1/25000 lik Haritanın pusula aracılığıyla yönlendirilmesi

Paftanın kitabe bilgilerinden 1990 yılı için Grid kuzeyi (GK) ile manyetik kuzey (MK) arasında $2^{\circ} 20'$ lık açı olduğu bildirilmekte her yıl için de bu değere 2'.6 eklenmesi gerektiği bildirildiğinden 2020 yılı için hesaplanacak sapma açısı

$$2^{\circ} 20' + 30 \times 2'.6 = 2^{\circ} 20' + 1^{\circ} 18' = 3^{\circ} 38'$$

olacaktır. Haritayı yönlendirebilmek için paftanın alt kenarının sağındaki P noktası ile paftanın üst kenarının sağındaki derece taksimatlı cetvel üzerindeki $3^{\circ} 38'$ noktası birleştirildiğinde elde edilen doğrultu pusulanın kuzey doğrultusu ile karşılaştırıldığında haritamızı arazide yönlendirmiş oluruz.



1/25000 lik Haritanın pusula aracılığıyla yönlendirilmesi

ÜÇ BOYUTLU JEODEZİ ve GNSS

Jeodezinin temel görevi olan noktaların üç boyutlu uzayda konumlarının belirlenmesi yakın geçmişe kadar parçalı klasik yöntemle (iki boyutlu jeodezi) gerçekleştirilmekteydi. *Klasik parçalı* yaklaşımda konum belirleme problemi iki aşamada yatay kontrol ve düşey kontrol olarak ayrı ayrı ele alınmaktaydı. İlk önce seçilen bir referans yüzeyi üzerinde; örneğin seçilecek yüzey düzlemse, düzlem dik koordinatlar, seçilecek yüzey küre ise soldner dik koordinatları ya da küresel coğrafi koordinatlar, seçilecek yüzey elipsoid ise elipsoidal coğrafi koordinatlar ya da elipsoidal soldner dik koordinatları hesaplanır (Yatay Kontrol). Noktaların düşey konumunu belirleyebilmek için de söz konusu noktaların referans yüzeyine olan düşey uzaklıkları ayrıca belirlenir (Düşey Kontrol). Ülke ölçmeleri söz konusu olduğunda yatay konum için seçilecek referans yüzeyi dönele elipsoiddir. Nirengi noktalarının yatay konum koordinatları (B,L veya Y,X) elipsoid üzerinde hesaplanırken, noktaların düşey konumu için elipsoid referans yüzeyi olarak alınmaz, noktaların jeoidden itibaren çekül doğrultusu boyunca (H) ortometrik yükseklikleri hesaplanır. Pratik gereksinimler için klasik parçalı jeodezik yöntemler günümüzde de geçerliliklerini korumaktadır.

Konum bilgileri birbirinden bağımsız iki ayrı şekilde çözülmeye çalışılsa da bağımsızlığı tam olarak sağlamak mümkün değildir. Üç boyutlu bir uzayda gözlenen jeodezik verilerin stokastik anlamda birbirlerinden bağımsız oldukları söylenemez. Ayrıca gözlemlerin indirgenmesi aşamasında yatay konum belirlenirken düşey konum bilgilerine, düşey konum belirlenirken de yatay konum bilgilerine gereksinim duyulur.

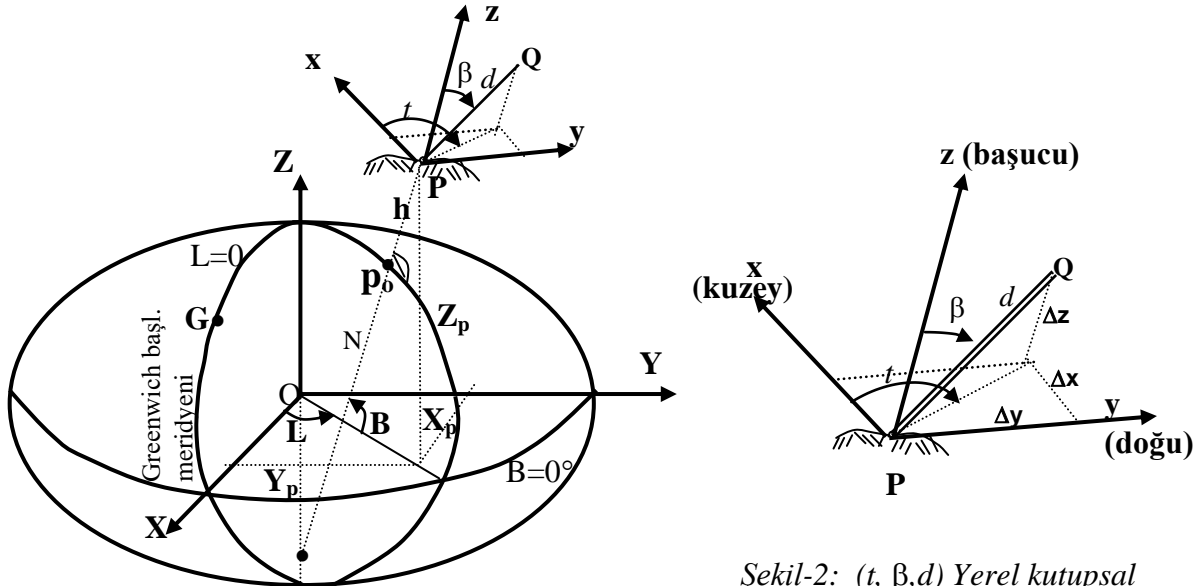
Günümüzde çağdaş bilimsel çalışmaların öncülüğünde noktaların konumlarının belirlenmesi, *Üç Boyutlu Jeodezi* yaklaşımıyla bir kerede noktaların üç boyutlu uzay dik koordinatlarını belirlemeye yöneliktir. Üç boyutlu jeodezi düşüncesi yeni olmamakla beraber güncel bir konudur. İlk kez 1868'de *Villarceau* ve 1878'de *Bruns* tarafından ortaya atılmıştır. Önceleri ölçmelerin yeteri incelikte yapılamaması, kenar ölçmelerinin güçlüğüyle yapılması, refraksiyon problemi ve hesaplama güçlükleri nedeniyle üç boyutlu jeodezi uzun zaman uygulama alanı bulamamıştır.

Günümüzde ölçme alet ve tekniklerinin gelişmesi, elektronik uzaklık ölçerler, yapay yer uyduları, bilgisayarlar, istatistik yöntemler ile sağlanan geniş hesaplama olanakları, geometrik verilerin yanında fiziksel ölçülerinde (gravite, potansiyel farkı gibi) göz önüne alınmasını gerektirmiş ve hesaplara yeni boyutlar getirmiştir. Bu değişim ve gelişmelerin sonucunda parçalı klasik

yaklaşım yerini üç boyutlu (3D) bütüncül (integrated) jeodeziye, hatta zamana bağlı olarak yeryuvarındaki tektonik hareketler sonucu konum bilgilerinin değişmesi nedeniyle zaman boyutunun da dikkate alınmasıyla dört boyutlu (4D) yaklaşımlara bırakmıştır [3].

Üç Boyutlu Jeodezi

İki boyutlu jeodezinin yukarıda sayılan mahzurları nedeniyle 3D jeodezide noktaların üç boyutlu uzay dik koordinatları bir kerede hesaplanır. 3D jeodezide iki boyutlu jeodezik ağlarda yapılan ve noktaların görece konumları hakkında bilgi veren ölçülerin tamamı (yatay doğrultu, düşey açı, eğik uzunluk, nivelmanla bulunan geometrik yükseklik farkı ölçüleri, gravite farkı ölçüleri) kullanılabilir. Bunlara ek olarak noktaların mutlak konumlarını belirlemeye yarayan ölçüler (astronomik enlem, boylam ve azimut, yapay uydu gözlemlerinden-GPS veya inersiyel ölçü sistemlerinden elde edilen koordinatlar) de kullanılabilir. Üç boyutlu jeodezik ağlarda kullanılan ölçü çeşitleri bu kadar farklı olmasına rağmen uygulamada yatay doğrultu, eğik uzunluk ve düşey açı ölçüleri ön plana çıkar. 3D jeodezide doğal olarak üç boyutlu koordinat sistemleri kullanılır. Bu sistemlerden üç boyutlu yerel dik koordinat (toposentrik) sistemi xyz ile global, yer merkezli dik koordinat (geosentrik) sistemi XYZ yaygın olarak kullanılır. Global dik koordinat sistemi ile elipsoidal coğrafi koordinat sistemini daha önce görmüştük.



Şekil-1: (X, Y, Z) Global dik koordinat sistemi, (B, L, h) Elipsoidal coğrafi koordinat sistemi ve (x, y, z) Yerel üç boyutlu dik koordinat sistemi

Şekil-2: (t, β, d) Yerel kutupsal koordinatlar ile (x, y, z) Yerel üç boyutlu dik koordinatlar

Bilindiği gibi üç boyutlu yerel dik koordinat sistemi (x,y,z) çalışma alanı çok büyük olmayan bölgelerde kullanılabilir. Sistemin başlangıç noktası genelde çalışma bölgesinin ortalarında seçilir. Bu sistemde; z eksenini başlangıç noktasından geçen çekül eğrisinin teğeti (ya da yaklaşık elipsoid normal) ile çakışır. x ekseninin yönü astronomik kuzey olarak adlandırılır. y eksenini bir sol el sistemi oluşturacak şekilde doğuya yönelmiştir (şekil-2). XYZ global dik koordinat sistemi ise bir sağ el sistemidir(şekil-1).

Global ve Yerel Dik Koordinat Sistemi Arasında Dönüşümler

XYZ global dik koordinat sistemi ile xyz üç boyutlu yerel dik koordinat sistemleri arasında dönüşüm her zaman yapılabilir. İki üç boyutlu dik koordinat sistemi arasında benzerlik dönüşümü yapabilmek için 7 datum parametresi gereklidir. Bu parametreler; koordinat eksenleri yönünde 3 öteleme, 3 dönüklük ve 1 ölçek faktörüdür[8]. Her iki sistem arasında ölçek faktörü farklılığı olmadığı düşünülürse dönüşüm parametreleri sayısı 6 olur. Bu 6 parametre; P orijin noktasının global dik koordinatları (X_p, Y_p, Z_p) ya da elipsoidal coğrafi koordinatları (B_p, L_p, h_p) ve orijin noktasındaki çekül doğrultusunu belirleyen astronomik enlem ve boylamın (Φ_p, Λ_p) bilinmesiyle belirlenmiş olur. Zira orijin noktasındaki çekül doğrultusunun belirlenmesi xyz sisteminin eksen yönlerini (kuzey, doğu, başucu) belirli kılar. Çekül sapmasının varlığı astronomik koordinatlar (Φ_p, Λ_p) ile elipsoidal coğrafi koordinatları (B_p, L_p) farklı kılar bu değerler arasındaki ilişkiler Bölüm 7.2 de verilmiştir. Pratik uygulamalarda, P başlangıç noktasındaki çekül sapması göz ardı edilir ve astronomik enlem ve boylam değerleri yerine elipsoidal coğrafi koordinatlar kullanılır yani çekül doğrultusunun elipsoid normaliyiyle çakıştığı varsayılır. Aşağıdaki dönüşüm eşitlikleri de bu varsayıma göre çıkarılacaktır. Bu durumda P orijin noktasındaki enlem ve boylam değeri noktanın global dik koordinatlarından hesaplanabilir. Özet olarak çekül sapmalarının göz ardı edilmesi halinde XYZ sistemi ile xyz sistemi arasında koordinat dönüşümü yapabilmek için sadece xyz sisteminin başlangıç noktasının global dik koordinatları (X_p, Y_p, Z_p) ya da elipsoidal coğrafi koordinatlarının (B_p, L_p, h_p) bilinmesi yeterli olur. (B, L, h) elipsoidal coğrafi koordinat sisteminde h elipsoidal yüksekliği xyz yerel dik koordinat sisteminde üçüncü boyutu z olarak alınmaktadır.

P ve Q noktalarının xyz yerel dik, XYZ global dik ve BLh elipsoidal coğrafi koordinatları arasında dönüşümler aşağıdaki eşitliklerden gerçekleştirilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{bmatrix}$$

koordinat fark vektörlerini göstermek üzere,

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} -\sin B_P \cos L_P & -\sin B_P \sin L_P & \cos B_P \\ -\sin L_P & \cos L_P & 0 \\ \cos B_P \cos L_P & \cos B_P \sin L_P & \sin B_P \end{bmatrix}$$

\mathbf{R}_P ortogonal dönüşüm matrisinden yararlanarak ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$)

Global dik koordinat farklarından yerel dik koordinat farkları

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad \text{eşitliğinden}$$

Yerel dik koordinat farklarından global dik koordinat farkları

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x} \quad \text{eşitliklerinden elde edilir.}$$

Üç Boyutlu Kartezyen Koordinatlarla Jeodezik Hesaplamalar

Daha önce düzlemde, kürede ve elipsoid yüzeyinde görmüş olduğumuz Temel Ödev hesaplarını 3B Kartezyen koordinatlar üzerinden de gerçekleştirebiliriz. Bu temel ödev hesapları düzlem temel ödev hesaplarından farklı olarak 3 boyutlu uzayda yapılmaktadır. Günümüzde GPS alıcıları ile konum belirleme ve aplikasyon uygulamalarının her geçen gün arttığını görüyoruz. GPS alıcılarının da ham olarak Kartezyen koordinatları ürettiğini diğer koordinat türlerini (coğrafi, UTM vs.) bu Kartezyen koordinatlardan dönüşümle türettiğini biliyoruz. Öte yandan Coğrafi koordinatlarla elipsoid ve küre yüzeyindeki Temel Ödev hesaplarını Kartezyen koordinatlarla yapacağımız Temel Ödev hesaplamalarından çıkarma olanağımız olacaktır.

Kutupsal koordinatlar ile yerel dik koordinatlar arasında dönüşümler,

$\Delta x, \Delta y$ ve Δz iki nokta arasındaki yerel dik koordinat farklarını göstermek üzere söz konusu noktalar arasındaki kutupsal değerlerden (ölçümlerden) koordinat farkları ve koordinat farklarından kutupsal elemanlar aşağıdaki eşitliklerden elde edilir.

$$\Delta x = d \sin \beta \cos t$$

$$\Delta y = d \sin \beta \sin t$$

$$\Delta z = d \cos \beta$$

$$d = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2} : \text{eğik uzunluk}$$

$$t = \arctan (\Delta y / \Delta x) : \text{semt (yatay doğrultu)}$$

$$\beta = \arccos (\Delta z / d) : \text{düşey açı}$$

Global koordinatlardan kutupsal elemanların hesabı

$\Delta X, \Delta Y$ ve ΔZ iki nokta arasındaki global dik koordinat farklarını göstermek üzere söz konusu noktalar arasında kutupsal değerler (eğik kenar, semt, düşey açı) aşağıdaki eşitliklerden elde edilir.

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$
$$t = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin \Lambda + \Delta Y \cos \Lambda}{-\Delta X \sin \Phi \cos \Lambda - \Delta Y \sin \Lambda \sin \Phi + \Delta Z \cos \Phi} \right)$$
$$\beta = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta Y \cos \Phi \sin \Lambda + \Delta Z \sin \Phi}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right)$$

Yukarıdaki formüllerde geçen Φ, Λ değerleri durulan noktanın astronomik enlem ve boylam değerleridir. Pratikte Φ, Λ yerine elipsoidal B, L değerleri kullanılır. Bu B, L değerleri de durulan noktanın global dik koordinatlarından her zaman hesaplanabilir (Bkz: Bölüm 18.7.1)

Üç Boyutlu Kartezyen Koordinatlarla Temel Ödev Hesaplamaları

I. TEMEL ÖDEV (3B) Kartezyen koordinatlarla

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ noktasının Kartezyen koordinatları ile P_2 noktasına olan t_{12} semti, β_{12} düşey açısı ve d_{12} kiriş(eğik) uzaklığı verilmektedir.

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ noktasının Kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

Önce verilen kutupsal elemanlardan P_1 ile P_2 arasındaki yerel dik koordinat farkları bulunur,

$$\Delta x = d \sin \beta \cos t$$

$$\Delta y = d \sin \beta \sin t$$

$$\Delta z = d \cos \beta$$

Bu farklardan Global koordinat $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ farkları **R** dönüşüm matrisi aracılığıyla bulunur.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

R dönüşüm matrisinin P₁ noktasının coğrafi koordinatlarından nasıl bulunacağı Bölüm 20.1.1 de gösterilmiştir. Hesaplanan Global koordinat farkları P1(X₁,Y₁,Z₁) noktasının koordinatlarına eklenerek P2(X₂,Y₂,Z₂) noktasının koordinatları bulunur.

$$X_2 = X_1 + \Delta X$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y$$

$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z$$

Örnek-1: P₁ noktasının Kartezyen koordinatları

X_p =3829720.8420m Y_p =3101246.7894m Z_p =4035795.4675m ile P₂ noktasına olan t₁₂ =30° semti, β₁₂=87° düşey açısı ve d₁₂=3500m. kiriş(eğik) uzaklığı verilmektedir (koordinatlar WGS84 sisteminde verilmektedir).

İstenenler: P₂(X₂,Y₂,Z₂) noktasının Kartezyen koordinatlarını bulunuz

Çözüm: önce P1 noktasının coğrafi koordinatları

$$L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow L_1 = 39^\circ$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} \quad f = (a - b)/a$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z((1-f) + e^2 \frac{a}{r})}{P}\right)$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z(1-f) + e^2 a \cdot \sin^3 \theta}{(1-f)(p - e^2 a \cdot \cos^3 \theta)}\right) \Rightarrow B_1 = 39^\circ 30' 18''$$

$$h_1 = -N + Y / (\sin L \cos B) \Rightarrow h_1 = 100.000\text{m}$$

P₂ noktasının P₁ merkezli yerel üç boyutlu dik koordinat sistemindeki koordinatları

P₂ noktasının yerel dik koordinatları

$$\Delta x = d \sin \beta \cos t$$

$$\Delta y = d \sin \beta \sin t$$

$$\Delta z = d \cos \beta$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = [3026.9349 \quad 1747.6017 \quad 183.1758]^T$$

B = 39° 30' 18" ve L = 39° değerleriyle oluşturulacak dönüşüm matrisi

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} -\sin B_P \cos L_P & -\sin B_P \sin L_P & \cos B_P \\ -\sin L_P & \cos L_P & 0 \\ \cos B_P \cos L_P & \cos B_P \sin L_P & \sin B_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4944 & -0.4003 & 0.7716 \\ -0.6293 & 0.7771 & 0 \\ 0.5996 & 0.4856 & 0.6361 \end{bmatrix}$$

Yerel dik koordinat farklarından Global dik koordinat farkları

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = [-2486.4150 \quad 235.2840 \quad 2452.0159]^T$$

P₂ noktasının Kartezyen koordinatları

$$X_2 = X_1 + \Delta X$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y$$

$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z$$

$$X_{P2} = 3827234.4270 \quad Y_{P2} = 3101482.0734 \quad Z_{P2} = 4038247.4834$$

P2 noktanın kartezyen koordinatlarından coğrafi koordinatlardan hesabı

$$B2 = 39.5322605 = 39^\circ 31' 56.1376''$$

$$L2 = 39.0203263 = 39^\circ 01' 13.1746''$$

$$h2 = 284.1353$$

II. TEMEL ÖDEV(3B) Kartezyen koordinatlarla

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ile $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ noktalarının Kartezyen koordinatları verilmektedir.

İstenenler: $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ile $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ noktaları arasında II. Temel ödev çözümü yaparak iki nokta arasındaki t_{12} , سمتini β_{12} , düşey açısını ve d_{12} kiriş uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$\Delta X = X_2 - X_1 \quad \Delta Y = Y_2 - Y_1 \quad \Delta Z = Z_2 - Z_1$$

$$d_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

$$t_{12} = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin L \sin B + \Delta Z \cos B} \right)$$

$$\beta_{12} = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right)$$

Örnek-2: P_1 ve P_2 noktalarının Kartezyen koordinatları

$$X_{P_1} = 3829720.8420\text{m} \quad Y_{P_1} = 3101246.7894\text{m} \quad Z_{P_1} = 4035795.4675\text{m}$$

$$X_{P_2} = 3827234.4270 \quad Y_{P_2} = 3101482.0734 \quad Z_{P_2} = 4038247.4834$$

Olarak veriliyor iki nokta arasındaki t_{12} , سمتini β_{12} , düşey açısını ve d_{12} kiriş uzaklığını bulunuz.

Çözüm

$$\Delta X = X_2 - X_1 \quad \Delta Y = Y_2 - Y_1 \quad \Delta Z = Z_2 - Z_1$$

$$d_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = 3500\text{m}$$

$$t_{12} = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin L \sin B + \Delta Z \cos B} \right) = 30^\circ$$

$$\beta_{12} = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right) = 87^\circ$$

Coğrafi Koordinatlarla Dönel Elipsoid Ve Küre Yüzeyinde (3B) Temel Ödev Çözümleri

I. TEMEL ÖDEV (3B) Coğrafi koordinatlarla elipsoid yüzeyinde

Verilenler: $P_1(B_1, L_1, h_1)$ noktasının coğrafi koordinatları ile P_2 noktasına olan t_{12} semti, β_{12} düşey açısı ve d_{12} giriş uzaklığı verilmektedir.

İstenenler: $P_2(B_2, L_2, h_2)$ noktasının coğrafi koordinatlarını bulunuz.

Önce $P_1(B_1, L_1, h_1)$ noktasının coğrafi koordinatlarından $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ noktasının Kartezyen koordinatları bulunur.

$$X = (N+h) \cos B \cos L$$

$$Y = (N+h) \cos B \sin L$$

$$Z = [(1-e^2)N+h] \sin B$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

yukarıdaki Kartezyen koordinatlarla I. Temel Ödev eşitliklerinden $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ noktasının Kartezyen koordinatları bulunur. İstenen $P_2(B_2, L_2, h_2)$ noktasının coğrafi koordinatları

$$L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} \quad f = (a - b)/a$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z((1-f) + e^2 \frac{a}{r})}{P}\right)$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z(1-f) + e^2 a \cdot \sin^3 \theta}{(1-f)(p - e^2 a \cdot \cos^3 \theta)}\right)$$

$$h = -N + Y / (\sin L \cos B)$$

Formüllerinden bulunur.

Örnek-3: P_1 noktasının Coğrafi koordinatları

$$B_1 = 39^\circ 30' 18'' \quad L_1 = 39^\circ \quad h_1 = 100.000\text{m}$$

ile P_2 noktasına olan $t_{12} = 30^\circ$ semti, $\beta_{12} = 87^\circ$ düşey açısı ve $d_{12} = 3500m$. kiriş(eğik) uzaklığı verilmektedir (koordinatlar WGS84 sisteminde verilmektedir).

İstenenler: $P_2(B_2, L_2, h_2)$ noktasının coğrafi koordinatlarını bulunuz

Çözüm: önce P_1 noktasının Kartezyen koordinatları

$$X = (N+h) \cos B \cos L = 3829720.8420m$$

$$Y = (N+h) \cos B \sin L = 3101246.7894m$$

$$Z = [(1-e^2)N+h] \sin B = 4035795.4675m$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Bulunduktan sonra problem Örnek-1 deki Kartezyen koordinatlarla I.Temel Ödev çözümüne dönüşür. P_2 noktasının yerel dik koordinatları

$$\Delta x = d \sin \beta \cos t$$

$$\Delta y = d \sin \beta \sin t$$

$$\Delta z = d \cos \beta$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = [3026.9349 \quad 1747.6017 \quad 183.1758]^T$$

$B = 39^\circ 30' 18''$ ve $L = 39^\circ$ değerleriyle oluşturulacak dönüşüm matrisi

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} -\sin B_p \cos L_p & -\sin B_p \sin L_p & \cos B_p \\ -\sin L_p & \cos L_p & 0 \\ \cos B_p \cos L_p & \cos B_p \sin L_p & \sin B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4944 & -0.4003 & 0.7716 \\ -0.6293 & 0.7771 & 0 \\ 0.5996 & 0.4856 & 0.6361 \end{bmatrix}$$

Yerel dik koordinat farklarından Global dik koordinat farkları

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = [-2486.4150 \quad 235.2840 \quad 2452.0159]^T$$

P_2 noktasının Kartezyen koordinatları

$$X_2 = X_1 + \Delta X$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y$$

$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z$$

$$X_{P_2} = 3827234.4270 \quad Y_{P_2} = 3101482.0734 \quad Z_{P_2} = 4038247.4834$$

P₂ noktasının kartezyen koordinatlarından coğrafi koordinatlardan hesabı

$$\begin{aligned} B_2 &= 39.5322605 = 39^\circ 31' 56.1376'' \\ L_2 &= 39.0203263 = 39^\circ 01' 13.1746'' \\ h_2 &= 284.1353\text{m} \end{aligned}$$

II. TEMEL ÖDEV (3B) Coğrafi koordinatlarla elipsoid yüzeyinde

Verilenler: P₁(B₁,L₁,h₁) ve P₂(B₂,L₂,h₂) noktalarının coğrafi koordinatları veriliyor

İstenenler: İki nokta arasındaki t₁₂ semti, β₁₂ düşey açısı ve d₁₂ kiriş uzaklığını bulunuz.

Önce P₁ ve P₂ noktalarının coğrafi koordinatlarından noktaların Kartezyen koordinatları bulunur. Bu Kartezyen koordinatlarla aşağıdaki formüllerden II.temel ödev hesabı yaparak istenen kutupsal değerler bulunur.

$$\begin{aligned} d_{12} &= \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \\ t_{12} &= \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin L \sin B + \Delta Z \cos B} \right) \\ \beta_{12} &= \arccos \left(\frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right) \end{aligned}$$

Örnek-4: P₁ ve P₂ noktalarının Coğrafi koordinatları

$$B_1 = 39^\circ 30' 18'' \quad L_1 = 39^\circ \quad h_1 = 100.000\text{m}$$

$$B_2 = 39^\circ 31' 56.1376'' \quad L_2 = 39^\circ 01' 13.1746'' \quad h_2 = 284.1353\text{m}$$

Veriliyor iki nokta arasında II. Temel ödev çözümü yaparak iki nokta arasındaki t₁₂, semtini β₁₂, düşey açısını ve d₁₂ kiriş uzaklığını bulunuz.

Çözüm: Önce P₁ ve P₂ noktalarının coğrafi koordinatlarından Kartezyen koordinatlarını bulursak problemimiz Örnek-2 deki Kartezyen koordinatlarla temel ödev çözümüne döner.

$$X_{P_1} = 3829720.8420\text{m} \quad Y_{P_1} = 3101246.7894\text{m} \quad Z_{P_1} = 4035795.4675\text{m}$$

$$X_{P_2} = 3827234.4270 \quad Y_{P_2} = 3101482.0734 \quad Z_{P_2} = 4038247.4834$$

$$\Delta X = X_2 - X_1 = -2486.4150 \quad \Delta Y = Y_2 - Y_1 = 235.2840 \quad \Delta Z = Z_2 - Z_1 = 2452.0159$$

$$d_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = 3500\text{m}$$

$$t_{12} = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin L \sin B + \Delta Z \cos B} \right) = 30^\circ$$

$$\beta_{12} = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right) = 87^\circ$$

Küre yüzeyinde Coğrafi koordinatlarla (3B) temel ödevleri yapmak istersek elipsoid yüzeyindeki temel ödev hesap eşitliklerini de kullanabiliriz. Burada yapmamız gereken sadece;

Formüllerdeki a, b ve N yerine küre yarıçapı R almaktır.

$$a=b=N \Rightarrow R$$

$$B \rightarrow \varphi \quad L \rightarrow \lambda \quad h \rightarrow H$$

Ya da Kartezyen koordinatlarla (XYZ) ile küresel coğrafi koordinatlar (φ, λ, H) arasında aşağıdaki dönüşüm eşitlikleri kullanılabilir.

$$P(\varphi, \lambda, H) \Rightarrow P(X_p, Y_p, Z_p)$$

$$X_p = (R + H) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y_p = (R + H) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z_p = (R + H) \sin \varphi$$

Global dik koordinatlar verildiğinde ise küresel coğrafi koordinatlar eldesi aşağıdaki gibi olur.

$$P(X_p, Y_p, Z_p) \Rightarrow P(\varphi, \lambda, H)$$

$$R = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2} - H$$

$$\tan \varphi = \frac{Z_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \quad \text{ya da} \quad \sin \varphi = \frac{Z_p}{R + H}$$

$$\lambda = \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p \geq 0$$

$$\lambda = 180^\circ + \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p < 0 \quad \text{ve} \quad Y_p \geq 0$$

$$\lambda = -180^\circ + \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p < 0 \quad \text{ve} \quad Y_p < 0$$

Örnek-5 : WGS84 sisteminde elipsoidal coğrafi koordinatları,

$$B = 39^{\circ} 30' 18'' \quad L = 39^{\circ} \quad h = 100m.$$

olan P noktası başlangıçlı yerel üç boyutlu dik koordinat sisteminde P noktasının yerel dik koordinatları,

$$x_p = 0.000m \quad y_p = 0.000m \quad z_p = 100.000m$$

olarak verilmektedir. Söz konusu P noktasından bir Q noktasına yapılan kutupsal ölçümler sonucunda,

$$d = 14392.4329m \quad \beta = 89^{\circ} 39' 59.24'' \quad t = 84^{\circ} 46' 59.6305''$$

değerleri elde edilmiştir(β açısına refraksiyon indirgemesi yapılmış).

- P noktasının global dik koordinatlarını bulunuz
- Q noktasının P noktası orijinli yerel üç boyutlu dik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz.
- Q noktasının global dik koordinatlarını bulunuz
- Q noktasının elipsoidal coğrafi koordinatlarını bulunuz.
- P ve Q noktalarının global dik koordinatlarından yararlanarak iki nokta arasında eğik kenarın, düşey açının ve semt açısının değerini hesaplayınız.

Çözüm:

- a) P noktasının global dik koordinatları,

$$X = (N+h) \cos B \cos L = 3829720.8420m$$

$$Y = (N+h) \cos B \sin L = 3101246.7894m$$

$$Z = [(1-e^2)N+h] \sin B = 4035795.4675m$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

eşitlikleri ile gerçekleştirilir . Burada; N meridyene dik doğrultudaki normal kesit eğrilik yarıçapı, a elipsoidin büyük yarı eksen uzunluğu, e^2 ise elipsoidin I. eksentrisitesidir. Söz konusu parametreler için WGS84 elipsoidi değerleri alınmıştır.

- b) Q noktasının yerel üç boyutlu koordinatları

$$\Delta x = d \sin \beta \cos t = 1308.5963m \Rightarrow x_Q = x_p + \Delta x = 1308.5963m$$

$$\Delta y = d \sin \beta \sin t = 14332.5741m \Rightarrow y_Q = y_p + \Delta y = 14332.5741m$$

$$\Delta z = d \cos \beta = 83.7841m \Rightarrow z_Q = z_p + \Delta z = 183.7841m$$

c) Q noktasının global dik koordinatları, Q noktasının hesaplanan yerel dik koordinatlarından yararlanarak,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x = 1308.5963 \\ \Delta y = 14332.5741 \\ \Delta z = 83.7841 \end{bmatrix}$$

$B = 39^\circ 30' 18''$ ve $L = 39^\circ$ değerleriyle oluşturulacak dönüşüm matrisi

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} -\sin B_P \cos L_P & -\sin B_P \sin L_P & \cos B_P \\ -\sin L_P & \cos L_P & 0 \\ \cos B_P \cos L_P & \cos B_P \sin L_P & \sin B_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4944 & -0.4003 & 0.7716 \\ -0.6293 & 0.7771 & 0 \\ 0.5996 & 0.4856 & 0.6361 \end{bmatrix}$$

Yerel dik koordinat farklarından Global dik koordinat farkları

$\mathbf{X} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}$ çarpımından hesaplanır. Q noktasının global dik koordinatları

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X = -9616.4835 \\ \Delta Y = 10655.3020 \\ \Delta Z = 1062.9713 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_Q = X_P + \Delta X = 3820104.3585 \\ Y_Q = Y_P + \Delta Y = 3111902.0915 \\ Z_Q = Z_P + \Delta Z = 4036858.4388 \end{bmatrix}$$

d) Q noktasının elipsoidal coğrafi koordinatları Q noktasının hesaplanan global dik koordinatlarından yararlanarak Bölüm 18.7.1.de verilen eşitliklerden aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$L = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow L_Q = 39^\circ 10' 00''$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad r = \sqrt{P^2 + Z^2} \quad f = (a - b)/a$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{Z((1-f) + e^2 \frac{a}{r})}{P}\right)$$

$$B = \arctan\left(\frac{Z(1-f) + e^2 a \sin^3 \theta}{(1-f)(P - e^2 a \cos^3 \theta)}\right) \Rightarrow B_Q = 39^\circ 31' 00''$$

$$h = -N + Y / (\sin L \cos B) \Rightarrow h_Q = 200.000\text{m}$$

Q noktasının hesaplanan elipsoidal yüksekliği h_Q ile daha önce hesaplanan z_Q değeri arasında $n = h_Q - z_Q = 16.2159\text{m}$ fark vardır. Bu fark küresellikten kaynaklanmakta olup aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$n = \frac{d^2}{2R_A} \quad (R_A : A \text{ azimutundaki WGS84 elipsoidinin eğrilik yarıçapı})$$

$B = 39^\circ 30' 18''$ enlemi ve $A \cong t = 84.783230^\circ$ için $R_A = 6386582.23\text{m}$ olur. Bu eğrilik yarıçapı ve $d = 14392.4329\text{m}$ mesafesiyle hesaplanacak n değeri

$$n = \frac{d^2}{2R_A} = 16.216\text{m} \text{ olur.}$$

e) P ve Q noktalarının global dik koordinatlarından yararlanarak iki nokta arasındaki eğik kenarın, düşey açının ve semt açısının hesaplanması.

$$X_P = 3829720.8420\text{m} \quad Y_P = 3101246.7894\text{m} \quad Z_P = 4035795.4675\text{m}$$

$$X_Q = 3820104.3585\text{m} \quad Y_Q = 3111902.0915\text{m} \quad Z_Q = 4036858.4388\text{m}$$

Noktalar arasındaki koordinat farkları,

$$\Delta X = -9616.4835 \quad \Delta Y = 10655.302 \quad \Delta Z = 1062.9713$$

P noktasının coğrafi koordinatları $B = 39^\circ 30' 18''$, $L = 39^\circ$

$$d_{PQ} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$
$$t_{PQ} = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin L \sin B + \Delta Z \cos B} \right)$$
$$\beta_{PQ} = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right)$$

eşitliklerinden

$$d_{PQ} = 14392.4329\text{m}$$

$$t_{PQ} = 84.783230^\circ = 84^\circ 46' 59.6282''$$

$$\beta_{PQ} = 89.666456^\circ = 89^\circ 39' 59.2404''$$

olarak hesaplanır.

$\Delta X, \Delta Y$ ve ΔZ iki nokta arasındaki global dik koordinat farklarını göstermek üzere söz konusu noktalar arasında kutupsal değerler (eğik kenar, semt, düşey açı) aşağıdaki eşitliklerden elde edilir.

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$t = \arctan \left(\frac{-\Delta X \sin \Lambda + \Delta Y \cos \Lambda}{-\Delta X \sin \Phi \cos \Lambda - \Delta Y \sin \Lambda \sin \Phi + \Delta Z \cos \Phi} \right) = \arctan (\Delta y / \Delta x)$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{\Delta X \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta Y \cos \Phi \sin \Lambda + \Delta Z \sin \Phi}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \right) = \arccos (\Delta z / d)$$

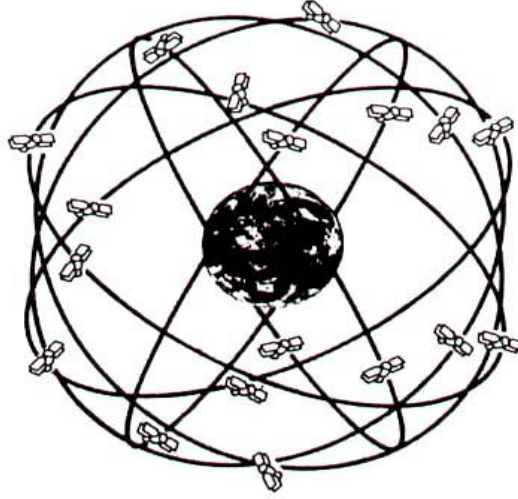
Yukarıdaki formüllerde geçen Φ, Λ değerleri durulan noktanın astronomik enlem ve boylam değerleridir. Pratikte Φ, Λ yerine elipsoidal B, L değerleri kullanılır. Bu B, L değerleri de durulan noktanın global dik koordinatlarından her zaman hesaplanabilir.

Uydu Jeodezisi (GNSS) Sistemleri

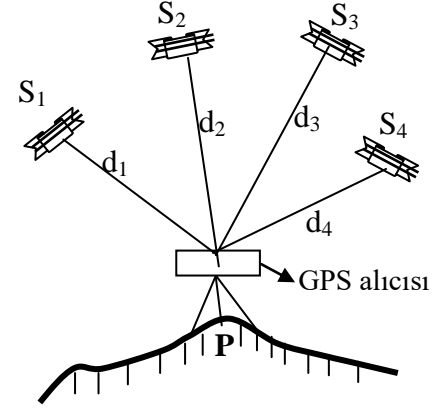
Günümüz jeodezi uygulamalarında, artık noktaların üç boyutlu koordinatları bir kerede yüksek doğrulukta ve gayet hızlı bir biçimde uydu jeodezisi teknikleriyle direkt olarak belirlenebilmektedir. Navigasyon, konum belirleme ve bilimsel amaçlı çalışmalar için uydu jeodezisinden yararlanma çabaları giderek artmaktadır. Tüm bu çalışmalar için uzayda oluşturulmuş uydu sistemlerinden yararlanılmaktadır. Başlıca uydu sistemleri olarak; GPS, GLONASS, DORIS, PRARE, TOPEX/POSEIDON, GALİLEO, BEİDOU sayılabilir. Bu sistemler dışında özellikle bilimsel amaçlı çalışmalarda kullanılan SLR ve VLBI sistemleri de mevcuttur[15]. Ancak burada uydu sistemlerinden sadece pratikte en çok kullanılan GPS sistemi özet olarak ele alınacaktır.

GPS - Küresel Konumlama Sistemi

Klasik jeodezik yöntemlere 1960'lı yıllardan sonra uydu jeodezisi yöntemi eklenmiştir. Önceleri salt askeri amaçlarla geliştirilmiş bu yöntem daha sonraları sivil amaçlar için kullanılmaya başlanmıştır. GPS (Global Positioning System- Küresel Konumlama Sistemi) adı verilen bu sistem yerden yaklaşık 20200km yüksekte ekvator düzlemiyle yaklaşık 55° açı yapan 6 farklı yörünge düzleminde her yörüngede 4 uydu olmak üzere dünya etrafında sürekli dolanan ve kodlandırılmış radyo sinyalleri yayan 24 uydulla Temmuz 1993 de tamamlanmıştır (şekil-3). Bu uydulardan 3 tanesi yedek olacak şekilde tanımlanmıştır. Böylece dünyanın her yerinde, günün her saatinde, her türlü hava koşullarında en az 15° eğim açısı altında 4 ile 8 uydu aynı anda gözlenecek şekilde tesis edilmiştir[2].



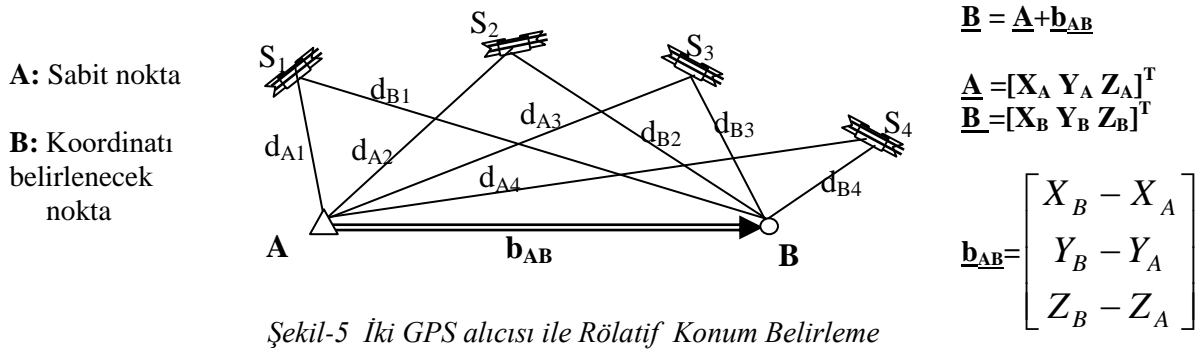
Şekil-3 GPS uyduları ve yörüngeleri



Şekil-4 Mutlak konum belirleme

Bu sistemle dünyadaki herhangi bir noktanın global (yer merkezli) XYZ koordinatları ölçülebilmektedir. Sistemin temeli uzunluklarla uzay geriden kestirmeye dayanmaktadır[7]. Bilindiği gibi uzay geriden kestirme yönteminde bir P noktasının üç boyutlu konumunu belirleyebilmek için koordinatları bilinen üç sabit noktaya olan uzaklıkların ölçülmesi yeterlidir (Bölüm 13.9). Böylece merkezleri sabit noktalar (uydular) ve yarıçapları ölçülen uzunluklar olan üç kürenin kesişimi koordinatları istenen P noktasıdır (şekil-4). Gerçi bu üç kürenin kesişimi çift nokta olmakla beraber gerçek çözüm bir dördüncü noktaya (uyduya) olan uzaklıkla belirlenebilir.

GPS yönteminde bilinen noktalar uydular olup herhangi bir anda uydunun koordinatlarının hesaplanabileceği uydu yörünge değerleri, uydu tarafından modüle edilmiş radyo sinyalleri ile yayınlanmaktadır ve her an kullanıcının yararlanmasına hazırdır. Koordinatları aranan gözlem noktası ile uydu arasındaki uzaklık için, uydudan sinyal çıkış ve alıcıya giriş zamanının yüksek doğrulukla belirlenmesi gerekmektedir. Uyduda bulunan bir saatin sinyal üzerinde üreteceği zaman işaretleri ile sinyal yayımının zaman noktaları belirlenebilmekte, geliş zamanı ise alıcıda bulunan bir saatle saptanmaktadır. Uydudaki ve alıcıdaki her iki saat tam olarak senkronize edilemeyeceğinden, geometrik uzaklığı bu iki saat verileri ile istenilen doğrulukta belirlemek mümkün değildir. Yüksek doğruluklu uydu saatinin hatasız ve tüm uydu saatlerinin senkron çalıştıklarının kabul edilebilir olmasına karşılık, alıcı saat hatasını bir bilinmeyen olarak işleme sokmak gerekir. Bu durumda uzaysal konum belirleme için, konumu belirlenmek istenen noktanın üç koordinatına ek olarak, alıcıdaki saat hatası da 4. bilinmeyen olarak belirlenmek durumundadır ve bu bilinmeyen değişik uydulardan aynı anda belirlenen uzaklıkların sıfır noktası eki gibi düşünülebilir. Bu yüzden ölçü değerleri pseudo (=yakıştırma) uzaklıklar olarak tanımlanır. Bu dört bilinmeyeni belirlemek için dört pseudo uzaklığa gerek vardır. O halde bir gözlem yerinde aynı anda dört uydu gözlenebilmelidir. Mevcut GPS sistemide bu olanağı vermektedir.



Jeodezik amaçlarla GPS alıcıları ile faz ölçülerine dayalı olarak “yer noktası-uydu” arasındaki uzaklıklardan, GPS koordinat sistemi olan WGS84 sisteminde gözlem noktasının üç boyutlu (X,Y,Z) koordinatları hesaplanır. Gözlem yöntemleri; *Tek nokta belirlemesi* ve *Rölatif nokta belirleme* olmak üzere sınıflandırılabilir. Tek nokta belirlemesinde (mutlak konum belirleme) tek bir alıcı ile her bir noktanın ayrı ayrı belirlenmesi söz konusudur. Bu yöntemde (örneğin refraksiyon, uydu yörünge hatası gibi) çok sayıda hatanın etkisi ile günümüzde ancak 10m. gibi düşük bir doğruluk elde edilebilmektedir. Birden fazla alıcı ile eş zamanda aynı uydular gözleniyorsa, rölatif nokta belirlemesi yapılabilir. Bu belirlemeden iki nokta arasında koordinat farkları ve bunlardan da *baz vektörü* veya *baz doğrusu* elde edilir(şekil-5). Bu değerlerden nokta koordinatlarının belirlenmesi için, alım noktalarından en az birisinin referans noktası olarak koordinatlarının verilmesi gereklidir. Rölatif nokta belirlemenin doğruluğu, tek nokta belirlemesine oranla çok yüksektir. Çünkü iki noktanın gözlem verilerinin kombinasyonu ile çeşitli hata etkileri yok edilebilmektedir. aşağıdaki tablo bu yöntem hakkında bir fikir verecektir.

Yöntem	Doğruluk	Özellikler
Statik	$\pm 0.1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$	Uzun gözlem süresi(saat), sınırsız baz uzunluğu
Kısa zamanlı statik	$\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$	Kısa gözlem süresi(dak.), baz uzuluğu<10km, tercihen 2 frekanslı alıcı, iyi uydu geometrisi gerekli
Kinematik	$\pm 3 \text{ mm} \pm 10 \text{ ppm}$	Kısa gözlem süresi(san.) ,başlangıç değerlerinin belirlenmesinden sonra 4 uydudan sürekli sinyal alımı gerekli
Pseudo kinematik	$\pm 5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$	Kısa gözlem süresi(dak.), alıma ara vermek önemsiz

Tablo- Rölatif nokta belirleme yöntemlerinin özellikleri ve ulaşılan doğruluklar

Günümüzde profesyonel (jeodezik amaçlı) GPS alıcıları yanısıra geliştirilen cep telefonu büyüklüğünde *El GPS* alıcılarıyla bile $\pm 3m$ duyarlığında konum belirlenebilmektedir. El GPS alıcılarının fiyatlarının son derece ekonomik oluşları sayesinde hassas jeodezi uygulamaları dışında büyük kullanım alanı bulmuşlardır.

Ülkemizde, mevcut ülke nirengi ağının (ED-50) bölgesel bozulmalar sonucu pratik gereksinimleri karşılayamaz duruma düşmesi nedeniyle GPS teknolojisine dayalı yeni bir temel jeodezik ağ kurulması düşünülmüş ve TUTGA-99 olarak adlandırılan bu ağın ölçme ve değerlendirme çalışmaları 1997-2000 yılları arasında tamamlanmıştır. TUTGA-99 ağı, ülke yüzeyini kapsayan 15-70km sıklıkta 600 noktadan oluşmuştur. Ağ noktalarının ITRF (Uluslar arası Yersel Referans Sisteminde) birkaç cm doğruluğunda üç boyutlu koordinatları (X,Y,Z) bu koordinatların zamana bağlı değişimleri (hızları; V_x, V_y, V_z) ve ortometrik yükseklikleri (H) ile jeoid yükseklikleri (N) belirlenmiştir[15].

GPS Koordinatlarından Ülke Koordinatlarına Dönüşüm

ABD ordusunda 1980 yılından sonra yoğun olarak kullanılmaya başlanan GPS in dayandığı WGS84 datumunun, 1990 lı yılların başından itibaren NATO içerisindeki ortak hareketlerde ve harita üretimlerinde kullanım zorunluluğu doğmuştur. Diğer taraftan, günümüzde sivil (kalkınma) amaçlı harita üretimlerinde de GPS alıcıları ile WGS84 sisteminde konum belirleme ve harita üretimi eğilimi iyice artmıştır. Bu gelişmeler doğrultusunda, ülkemizde askeri ve sivil amaçlarla 2001 yılına kadar Avrupa Datumu-1950 (European Datum-1950: ED50) sisteminde üretilen 1/25.000 ,1/50.000 ve 1/100.000 ölçekli topoğrafik haritaların 2002 yılından itibaren WGS84 sisteminde üretimine geçilmiştir. 2001 yılına kadar ülkemizde üretilen haritaların ED50 datumunda, 2002 yılından sonra üretilen haritaların WGS84 datumunda olması ve GPS alıcıları veya diğer yöntemlerle WGS84 sisteminde belirlenen koordinatların ED50 datumunda üretilmiş olan haritalar ile uyumunun sağlanması için dönüşüm zorunluluğu doğmuştur [10], [19].

ED50 datumunda; referans elipsoidi olarak Uluslararası (Hayford) 1924 elipsoidi ($a=6378388m$; $b=6356911.9461m$; $f=1/297$) kullanılmıştır.

WGS84 datumunda kullanılan referans elipsoidinin parametreleri ise ($a=6378137.0m$; $b=6356752.3141m$; $f=1/298.257223563$) dir. WGS84 koordinat sistemi aynı zamanda yer gravite alanına ait fiziksel özellikleri de bünyesinde toplayan bir sistemdir. Bu nedenle ED50 sistemine göre üstündür.

2005 yılında yürürlüğe giren BÖHBBÜY Madde-10 da "Bu Yönetmelik

kapsamında hesaplanacak koordinatlar, en son güncellenmiş TUTGA'ya bağlı, GRS80 elipsoidi ve Transversal Mercator (TM) izdüşümünde üç derecelik dilim esasına göre belirlenir." demektedir. Yani hesaplamalarda GRS80 elipsoidinin kullanılacağı söylenmektedir. GRS80 elipsoidinin parametreleri(a=6378137.0m ; f=1/298.257222101) dir.

GPS alıcılarının ürettiği ham koordinatlar WGS84 sistemindeki (XYZ) kartezyen koordinatlarıdır. Oysa ülke koordinatları ED50 sistemindedir. Bu nedenle GPS koordinatlarından ülke koordinatlarına geçiş bir dizi dönüşüm gerektirir. Genelde GPS alıcıları kendi üzerlerindeki yazılımlarla ve ölçü anında kullanılan sabit nokta koordinatlarından yararlanarak bu dönüşümü kendiliğinden yapabilmektedir.

GPS koordinatlarından ülke koordinatlarına geçiş için gerekli dönüşüm adımları aşağıda sayılmıştır :

i-) Önce $(XYZ)_{WGS84}$ koordinatlardan üç boyutlu bir koordinat dönüşümü ile $(XYZ)_{ED50}$ koordinatları elde edilir.

Bilindiği üzere iki üç boyutlu koordinat sistemi arasında dönüşüm yapabilmek için 7 adet dönüşüm (datum) parametresinin bilinmesi gerekir. Söz konusu 7 adet datum parametresi 3 öteleme (t_x, t_y, t_z) 3 dönüklük ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) ve 1 ölçek (k) her iki koordinat sisteminde de en az 2 noktanın (XYZ) koordinatları ve diğer bir noktanın yalnız bir koordinatı biliniyorsa cebrik olarak belirlenir. Üç ya da daha fazla sayıda noktanın her iki sistemde koordinatları biliniyorsa dönüşüm parametreleri dengelemeli olarak belirlenir [8].

WGS84 sistemiyle ED50 sistemi arasında öteleme farkı olduğu, dönüklüklerin son derece küçük olduğu bilinmektedir. Her iki koordinat sistemi arasındaki dönüklükler küçük ise özel durum olarak aşağıdaki dönüşüm eşitliği kullanılabilir.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ED50} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+k & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1+k & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1+k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS84} \quad (1)$$

HGK tarafından yapılan bir çalışma ile WGS84 sistemi ile ED50 sistemi arasındaki dönüşüm parametreleri aşağıda gösterilmiştir. WGS84'den ED50'ye dönüşüm parametreleri yaklaşık olarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$t_x = 84.003$ m	$t_y = 102.315$ m	$t_z = 129.879$ m	$k = -1.0347$ ppm
$\varepsilon_x = 0.0183$ "	$\varepsilon_y = -0.0003$ "	$\varepsilon_z = 0.4738$ "	

ED-50'den WGS-84'e dönüşüm yapılması istenirse

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS84} = \begin{bmatrix} 1+k & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1+k & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1+k \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ED50} - \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

yukarıdaki ters dönüşüm eşitliği kullanılır.

ii-) ED50 sistemindeki (XYZ) kartezyen koordinatlarından elipsoidal coğrafi koordinatlar (BLh) hesaplanır.

iii-) (BLh) den Gauss-Krüger koordinatları ve son olarak da ülke koordinatları (SAĞA, YUKARI) hesaplanır.

$$(XYZ)_{WGS84} \rightarrow (XYZ)_{ED50} \rightarrow (BLh)_{ED50} \rightarrow (y_g, x_g) \rightarrow (SAĞA, YUKARI)$$

Ancak ED50 sistemi ile WGS84 sistemi arasında yukarıda anlatıldığı gibi geometrik dönüşüm yapmak yeterli olmamakta fiziksel etkileri de göz önüne almak gerekmektedir. Diğer bir deyişle iki sistem arasında tüm ülke çapında dönüşümü sağlayacak dönüşüm parametreleri bulunamaz. Zira ülke temel nirengi ağının ölçülerinin yapıldığı 1934 ile 1991 yılları arasında ülkemizde çok sayıda deprem olmuş ve bu depremler sırasında yatay ve düşey konumda $\pm 3m$ ye varan konum değişiklikleri olmuş bu nedenle ülke temel nirengi ağında bölgesel ve yerel nitelikli bozulmalar olmuştur. Harita Genel Komutanlığı, ED50 sistemi ile WGS84 sistemi arasında datum farklılığının belirlenmesi amacıyla ; değişik zamanlarda yapılan periyodik GPS ölçüleri yardımıyla yer kabuğu hareketlerinin hızını modellemiş ve datum dönüşümü için 3'x3' sıklığında grid dönüşüm dosyası hazırlayıp Nisan 2002 tarihi itibariyle kullanıma sunmuştur [10].

Örnek-2: WGS84 sisteminde kartezyen koordinatları (X= 3869416.9130 Y= 2830423.6819 Z= 4192997.6984)_{WGS84} olarak verilen P noktasının, yukarıda verilen dönüşüm parametrelerini kullanarak ED50 sistemindeki kartezyen koordinatlarını ve UTM koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Noktanın ED50 sisteminde koordinatları

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ED50} = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+k & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1+k & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS84}$$

dönüşüm eşitliği kullanılırsa;

$$(X= 3869503.4200 \ Y= 2830514.5520 \ Z= 4193122.9822)_{ED50}$$

olarak noktanın, ED50 sisteminde koordinatları bulunur.

Noktanın UTM koordinatlarını bulmak için önce noktanın ED50 sisteminde elipsoidal coğrafi koordinatları

$$(B = 41^{\circ} 21' 54.0194'' \quad L = 36^{\circ} 11' 6.7481'' \quad h = 181.2874m.)_{ED50}$$

olarak bulunur. Noktanın UTM koordinatları için önce, noktanın Gauss-Krüger koordinatları;

$$Y_g = 15496.9219m \quad X_g = 4581206.7245m \quad (L_o = 36^{\circ})$$

$$Y_g = -235534.6602m \quad X_g = 4585015.2555m \quad (L_o = 39^{\circ})$$

6⁰ lik UTM koordinatları ($m_0 = 0.9996$)

$$DN= \text{INT}(L/6)+31 = 37 \quad (\text{D.O.M} = 39^{\circ})$$

$$SAĞA = (DN)(500\ 000 + m_0.Y_g) = 37\ 264559.5537 \text{ m}$$

$$YUKARI = m_0.X_g = 4\ 583\ 181.2494 \text{ m}$$

3⁰ lik *Değiştirilmiş UTM* koordinatları ($m_0 = 1.0000$) ($\text{D.O.M} = 36^{\circ}$)

$$SAĞA = 500\ 000 + m_0.Y_g = 515496.9219 \text{ m}$$

$$YUKARI = m_0.X_g = 4\ 581\ 206.7245 \text{ m}$$

Örnek-3: Örnek-2 deki P noktasının WGS84 sisteminde coğrafi koordinatları ($B= 41^{\circ} 21' 50.68'' \quad L = 36^{\circ} 11' 5.79'' \quad h = 217m$)_{WGS84} dır. P noktasının, ED50 sistemindeki coğrafi koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Bu problem için Örnek-2 deki hesaplamalara uygun olarak $(BLh)_{WGS84} \rightarrow (XYZ)_{WGS84} \rightarrow (XYZ)_{ED50} \rightarrow (BLh)_{ED50}$ sırasında işlem yapılırsa;

P noktasının ED50 sistemindeki coğrafi koordinatları

$$(B = 41^{\circ} 21' 54.0194'' \quad L = 36^{\circ} 11' 6.7481'' \quad h = 181.2874m.)_{ED50} \quad \text{olur.}$$

GPS Yüksekliklerinden Ortometrik Yüksekliklerin Eldesi

GPS koordinatlarından elde edilen h yükseklikleri elipsoidal yükseklikler olup pratikte kullanılan H ortometrik yüksekliklerinden (deniz seviyesinden itibaren) farklıdır. Bu nedenle her iki yükseklik sistemi arasında geçişin yapılabilmesi için o bölgedeki jeoid yüksekliklerinin (N) bilinmesi gerekir.

Bir P_i noktasının yüksekliği için $h_i = H_i + N_i$ dönüşüm eşitliği kullanılır.

Geniş çalışma bölgelerinde jeoid yükseklikleri değişim gösterecektir. Uygulamada bu nedenle çalışma bölgesinde jeoid yükseklikleri bilinen noktalardan yararlanarak bir nevi enterpolasyonla bölgedeki diğer noktaların jeoid yüksekliklerinin bulunması yoluna gidilir. Enterpolasyon işlemi grafik ya da sayısal olarak yapılır. Grafik enterpolasyon olarak jeoid yükseklikleri bilinen noktalardan yararlanarak *eş jeoid yükseklik eğrileri* çizilir ve daha sonra jeoid yüksekliği belirlenmesi istenen noktalar için çizim üzerinde enterpolasyon yapılır. Ancak grafik enterpolasyondan yüksek doğruluk beklenemez. Daha yüksek doğruluk için sayısal olarak jeoid yükseklik belirleme işlemi yapılır. Bunun için bölgedeki jeoid yükseklikleri bilinen noktalardan yararlanarak (noktaların hem ortometrik hem de elipsoid yükseklikleri elde varsa jeoid yükseklikleri $N=h-H$ hesaplanabilir) arazinin *sayısal jeoid yükseklik modeli* oluşturulur ve enterpolasyon işlemi bu sayısal model üzerinden gerçekleştirilir. Sayısal jeoid yükseklik modeli belirleme işlemi tüm çalışma bölgesini kapsayacak şekilde yapılabileceği gibi çalışma bölgesi parçalara ayrılarak da yapılabilir [5]. Sayısal enterpolasyon yöntemleri olarak genelde En Küçük Kareler veya Multiquadric enterpolasyon yöntemi ya da düşük dereceden bir yüzey fonksiyonu, örneğin 2.dereceden

$$N(x,y) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 x y + a_4 x + a_5 y + a_6 \quad (3)$$

şeklinde bir yüzey fonksiyonu kullanılabilir. Bu işleme *GPS Nivelmanı* da denir. Bu model seçilirse en az 6 noktanın x,y,N değerlerinin bilinmesi gerekir. Elde 6 noktadan fazla bilgi varsa yüzey parametreleri (a_1, a_2, \dots, a_6) dengelemeli olarak belirlenir. Böylece çalışma bölgesindeki herhangi bir noktanın x,y koordinatlarından noktanın jeoid yüksekliği yukarıdaki denklemden hesaplanır. Bu sayısal enterpolasyon işleminin doğruluğu hesaplamada kullanılan nokta sayısının fazlalığına, noktaların çalışma sahasını çevrelemesi ve homojen olarak dağılmasına bağlıdır.

Pratikte, jeoid yüksekliklerinin sınırlı bir çalışma bölgesinde değişmediği varsayılır. Dolayısıyla elipsoidal yükseklik farkları ortometrik yükseklik farkları olarak değerlendirilir.

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i \approx H_j - H_i \quad (N_j \approx N_i)$$

Örnek: GPS Nivelmanı

Aşağıda bir çalışma bölgesindeki 11 noktanın Y,X koordinatları ve bu noktalarda hesaplanmış N jeoid yükseklikleri verilmiştir. Arazinin

$$N(x,y) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 x y + a_4 x + a_5 y + a_6$$

şeklinde sayısal jeoid yükseklik modelini oluşturunuz ve koordinatları

Y=477800. X= 4492300. olan noktanın jeoid yüksekliğini hesaplayınız.

Nokta	Y	X	N
1	477827.965	4492432.518	24.400
2	477901.613	4492429.777	23.100
3	477984.711	4492414.139	22.100
4	478007.096	4492362.011	21.600
5	477932.890	4492372.436	21.900
6	477857.458	4492351.892	20.850
7	477778.346	4492381.942	23.420
8	477773.439	4492289.338	22.150
9	477841.512	4492242.116	21.200
10	477947.609	4492300.684	20.800
11	477993.297	4492248.862	20.400

Çözüm:

Verilen tüm noktalar için (3) nolu denklemi yazarsak aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\mathbf{A}_{11 \times 6} \cdot \mathbf{X}_6 = \mathbf{b}_{11}$$

A matrisinin i. satırı

$$[x_i^2 \quad y_i^2 \quad x_i \cdot y_i \quad x_i \quad y_i \quad 1]$$

b vektörünün i. elemanı

$$[N_i]$$

Verilen koordinatlar büyük sayılardan oluştuğu için aşağıdaki şekilde normlandırılmışlardır. Aksi takdirde sağlıklı çözüm elde edilemez.

$$x_i = (x_i - 477000) / 1000; \quad y_i = (y_i - 4492000) / 1000; \quad N_i = (N_i - 20) / 10$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1871 & 0.6855 & 0.3581 & 0.4325 & 0.8280 & 1.0000 \\ 0.1847 & 0.8129 & 0.3875 & 0.4298 & 0.9016 & 1.0000 \\ 0.1715 & 0.9697 & 0.4078 & 0.4141 & 0.9847 & 1.0000 \\ 0.1311 & 1.0142 & 0.3646 & 0.3620 & 1.0071 & 1.0000 \\ 0.1387 & 0.8703 & 0.3474 & 0.3724 & 0.9329 & 1.0000 \\ 0.1238 & 0.7352 & 0.3017 & 0.3519 & 0.8575 & 1.0000 \\ 0.1459 & 0.6058 & 0.2973 & 0.3819 & 0.7783 & 1.0000 \\ 0.0837 & 0.5982 & 0.2238 & 0.2893 & 0.7734 & 1.0000 \\ 0.0586 & 0.7081 & 0.2037 & 0.2421 & 0.8415 & 1.0000 \\ 0.0904 & 0.8980 & 0.2849 & 0.3007 & 0.9476 & 1.0000 \\ 0.0619 & 0.9866 & 0.2472 & 0.2489 & 0.9933 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.4400 \\ 0.3100 \\ 0.2100 \\ 0.1600 \\ 0.1900 \\ 0.0850 \\ 0.3420 \\ 0.2150 \\ 0.1200 \\ 0.0800 \\ 0.0400 \end{bmatrix}$$

Oluşur. EKK ilkesine göre denklem sisteminin çözümü yapılırsa

$$x=(A^T A)^{-1} (A^T b)$$

$$x^T = [10.6055 \quad 5.5243 \quad -1.6948 \quad -4.2400 \quad -9.9648 \quad 5.3308]$$

jeoid yüksekliği yüzey parametreleri elde edilmiş olur.

$$N(x,y)= 10.6055x^2 + 5.5243y^2 -1.6948xy -4.2400x - 9.9648y + 5.3308$$

Koordinatları Y=477800. X= 4492300. olan noktanın jeoid yüksekliğini hesaplamak için önce gerekli normlandırma işlemi yapılır.

$$x = (4492300-4492000)/1000 = 0.3$$

$$y = (477800 -477000) /1000 = 0.8$$

bu değerler denkleminde yerine konursa

$$N(x,y)= 10.6055x^2 + 5.5243y^2 -1.6948xy -4.2400x - 9.9648y + 5.3308$$

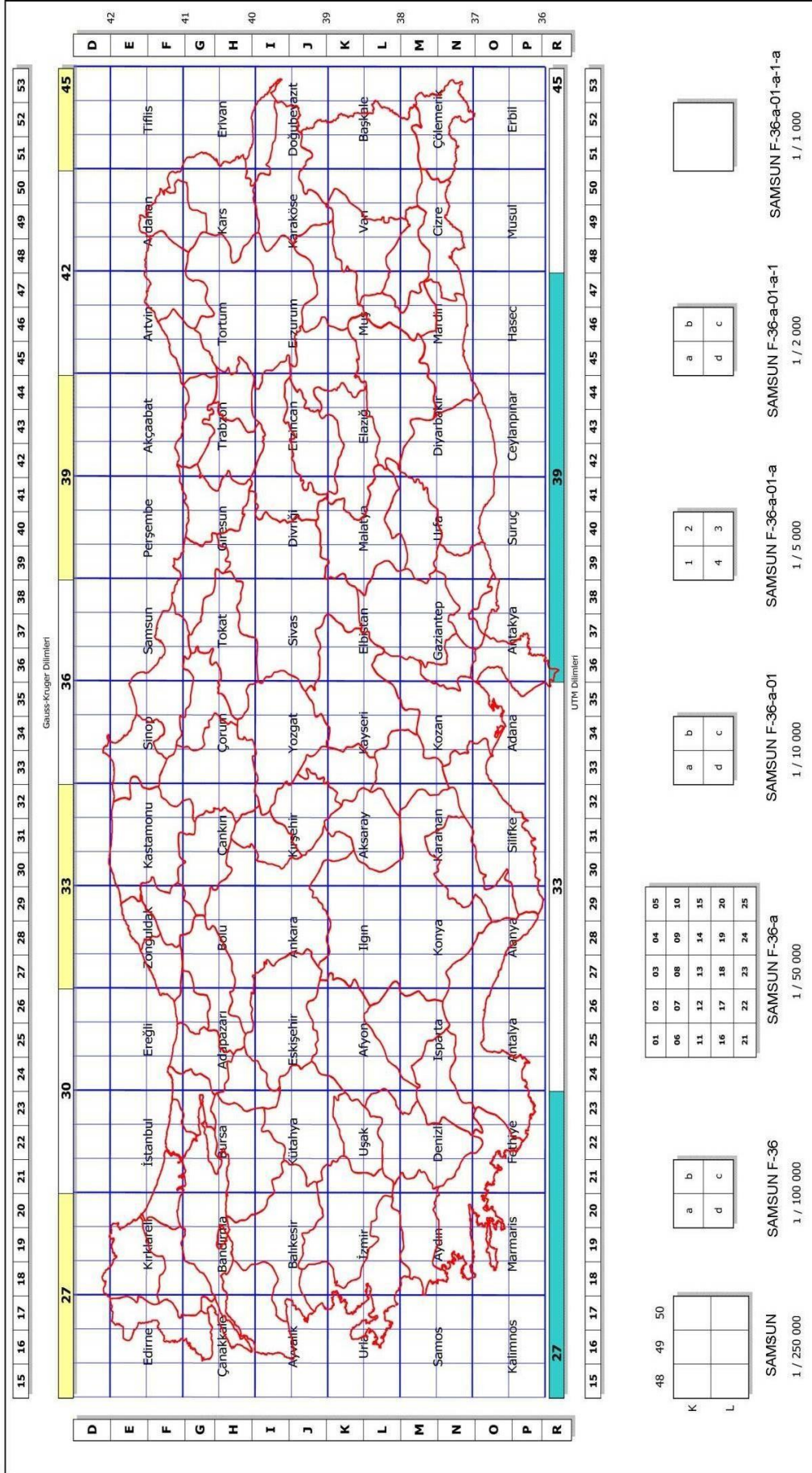
Jeoid yüksekliğinin normlandırılmış değeri olarak

$$N(x,y)= 0.1703$$

Noktanın gerçek jeoid yüksekliğini

$$N_i= 10 \times N + 20 = 21.703m$$

Olur.



KAYNAKLAR

- [1] -Aksoy,A;Güneş,İ.H.: (1990) : " Jeodezi I-II ", İTÜ yayınları, Yayın No:1421, İstanbul
- [2] -Aksoy,A. (1999) : " Jeodezide Değişimler ", HKMO Dergisi, sayı :86, s: 40-60, Ankara
- [3] -Bektaş, S. (1991) : "Üç Boyutlu Geometrik Modelle Yerkabuğu Hareketlerinin Araştırılması", KTÜ-FBE Doktora tezi, Trabzon
- [4]-Bektaş, S. (2001) : " Matematik Jeodezi ", Kamer Matbaa Yayıncılık,Samsun
- [7] -Bektaş, S. (2004) : "Jeodezik Hesap-Düzlemde ve Küre Yüzeyinde Jeodezik Hesaplamalar", OMÜ yayınları,Yayın no:120,Samsun
- [8]-Bektaş, S. (2004) : "Dengeleme Hesabı", OMÜ yayınları, Yayın no:118, Samsun
- [9]- BÖHY(1992):"açıklamalı-örneklemeli Büyük Ölçekli Haritalar Yapım Yönetmeliği", TMMOB-HKMO İstanbul Şubesi, İstanbul
- [10]- Demirkol,E.Ö;Gürdal,M.A;Yıldırım,A: "Avrupa Datumu(ED50) ile Dünya Jeodezik Sistemi(WGS84) Arasında Datum Dönüşümü ve Askeri Uygulamaları" HGK,Ankara
- [11] Grossmann, W. (1964) : "Geodatische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung", Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1964
- [12]- Gürkan,O. (1984): "Fiziksel Jeodezi", KTÜ Yayınları, Yayın No : 19, Trabzon
- [13]-Hristow,W.K.(1943):"Die Gauss-Krüger'schen Koordinaten auf dem Ellipsoid",Berlin
- [15]- Kahveci,M.,Yıldız,F. (2001): "GPS-Global Konum Belirleme Sistemi", Nobel Yayın Dağıtım, Yayın No : 224, Konya
- [16]- Kaya,A. (1999): "Jeodezi-II", KTÜ Yayınları, Yayın No : 195, Trabzon
- [17]-Koçak,E.(1985):"Kartoğrafya", KTÜ yayınları, yayın no:31,Trabzon

[18]-Koçak,E.(1999):”Harita Projeksiyonları”, ZKÜ Yayınları, Yayın No:10,Zonguldak

[19]- Lenk,O;Fırat,O: “Avrupa Datumu 1950 (ED50) ile Türkiye Ulusal Temel GPS Ağı (TUTGA-99) Arasında Datum Dönüşümü ” HGK,Ankara

[20]- Özbenli,E. (1991): “Jeodezi”, KTÜ Yayınları, Yayın No : 154, Trabzon

[25]- Şerbetçi,M. (1979): “İlk Çağlardan Günümüze Kadar Yerin Biçimi ve Büyüklüğü”, KTÜ yayınları, Yayın no : 101, Trabzon

[28]- Ünal,T (1982): “Jeodezi-I Ders Notları” yayınlanmadı

[29]- Yaşayan,A.,Hekimoğlu,Ş. (1982): “Küresel Trigonometri”, KTÜ yayınları, Yayın no : 143/122, Trabzon

[30]- CUENIN, R. (1972) : “Cartographie Generale- Tome I”,Institut Géographique National, Paris 1972

[31]-Bektaş, S. (2019) :“Direct bearing angles determination on globe,” *MOJ Civil Engineering*, vol. 5, no. 4, pp. 78–80, Dec. 2019.

[32]- Bektaş,S (2016) “Generalized Euler Formula For Curvature” , *International Journal of Research in Engineering and Applied Sciences* ,Volume 6, Issue 3 (March, 2016) (ISSN 2249-3905)