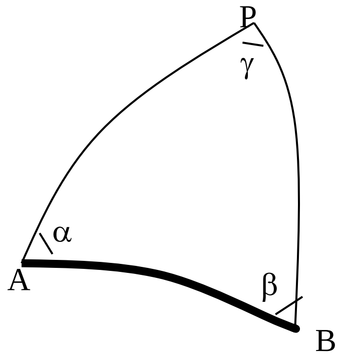
4.8 KÜRE YÜZEYİNDE KESTİRME HESAPLARI

Tıpkı düzlemde olduğu gibi Küre yüzeyinde de, kestirme hesapları yapmak mümkündür. Aşağıda Küresel Jeodezik dik koordinatlardan en çok kullanılan meridyen sisteminde (Soldner koordinatlarıyla) Önden ve geriden kestirmenin nasıl yapılacağı bütün işlem adımlarıyla gösterilmiştir.

4.8.1-ÖNDEN (İLERİDEN KESTİRME)

Verilenler: $A(x_a,y_a)$, $B(x_b,y_b)$, α,β,γ
İstenilenler: $P(x,y)$



Önden kestirme probleminin düzlemdeki çözümünde olduğu gibi kürede çözümünde de kestirilecek noktadaki γ açısının ölçülme zorunluluğu yoktur. γ açısının ölçülmesi aranan koordinatların doğruluk derecesini arttırır ve ayrıca açı ölçmelerinde kontrolü sağlar.

Çözüm:Önce jeodezik dik koordinatlardan temel ödev çözümlerinden yararlanarak (AB), (BA) açıklık açıları ile AB kenarı hesaplanır.

$$u = x_b - x_a,\ v = y_b - y_a$$

$$\delta_{yAB} = -\frac{u^2 y_a}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2} \quad , \quad \delta_{xAB} = +\frac{u^2 y_b}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2}$$

olmak üzere

$$\tan(AB) = \frac{y_b - y_a - \delta_{y_{ab}}}{x_b - x_a - \delta_{x_{ab}}}$$

$$AB = \frac{y_b - y_a - \delta_{y_{ab}}}{\sin(AB)} = \frac{x_b - x_a - \delta_{x_{ab}}}{\cos(AB)}$$

eşitlikleri ile (AB) açıklık açısıyla AB kenarı kontrollü olarak bulunur.

(BA) açıklık acısı için

$$\delta_{ab} = -\frac{\rho}{2R^2}(y_a + y_b)(x_b - x_a)$$

$$(BA) = (AB) + \delta_{ab} \pm \pi$$

şeklinde hesaplanır.

Eksesi hesaplayabilmek ABP üçgeninin üç açısı da ölçülmüş olsa bile eksesi

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^o$$

şeklinde ölçülen açılardan hesaplamak ölçü hataları nedeniyle pratikte doğru sonuç vermez. Bu nedenle eksesin küresel ABP üçgeninin alanından hesaplanması hatta ABP üçgenini düzlem üçgen şeklinde düşünülerek yine alanından aşağıdaki gibi hesaplanması çoğu kez yeteri doğruluğu verir.

$$F = \frac{AB^2}{2}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$ ve Alandan ekses hesabı, $$\varepsilon = \frac{F}{R^2}\rho$$

şeklinde ABP üçgeninin eksesi hesaplanır.
Ölçülen üçgen açılarının düzeltilmesi için iki durum söz konusudur:

a) γ açısının da ölçülmüş olması,

ölçülen açılar α, β, γ ve w da üçgen kapanması olmak üzere

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon + w$$

eşitliği yazılabileceğinden,
düzeltilmiş açılar α', β', γ' olmak üzere

$$\alpha' = \alpha - \frac{w+\varepsilon}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{w+\varepsilon}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{w+\varepsilon}{3}$$

şeklinde bulunur.

b) γ açısı ölçülmemişse,

bu durumda üçgen kapanmasını belirlemek mümkün değildir. Ekses yukarıdaki gibi hesaplanır. γ açısı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\gamma = 180 + \varepsilon - (\alpha + \beta)$$

ve düzeltilmiş açılar α', β', γ' olmak üzere

$$\alpha' = \alpha - \frac{w}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{w}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{w}{3}$$

şeklinde bulunur.

Üçgen kenarlarının hesaplanması düzeltilmiş açılardan yararlanarak Legendre yöntemine göre hesaplanabilir.

$$AP = AB\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma'}, \qquad BP = AB\frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma'}$$

eşitliklerinden AP ve BP kenarları hesaplanır.
P noktasının koordinatlarının hesaplanması:

(AP) = (AB)-(α - w / 3), (BP) = (BA)+(β - w / 3)

açıklık acıları ile

$$u_A = AP.\cos(AP) \qquad v_A = AP.\sin(AP)$$
$$u_B = BP.\cos(BP) \qquad v_B = BP.\sin(BP)$$

hesaplanır ve küresellik düzeltmelerinin hesabı için gerekli y_p değeri için yaklaşık değer

$y_P \cong y_A + v_A$ şeklinde hesaplanır. Küresellik düzeltmeleri

$$\delta_{yAP} = -\frac{u_A^2 y_A}{2R^2} - \frac{u_A^2 v_A}{6R^2}, \qquad \delta_{yBP} = -\frac{u_B^2 y_B}{2R^2} - \frac{u_B^2 v_B}{6R^2},$$

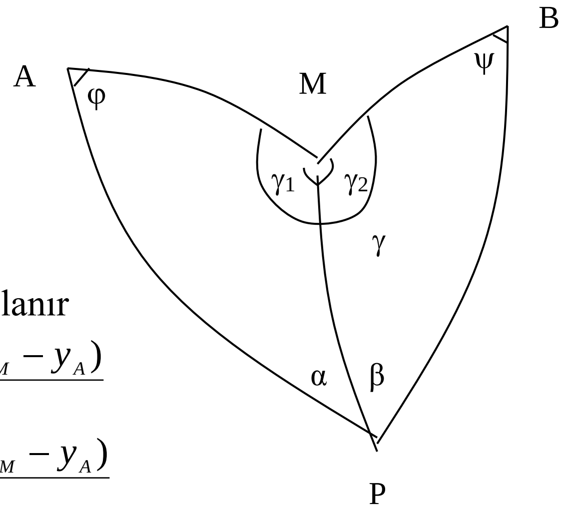
$$\delta_{xAP} = +\frac{u_A y_P^2}{2R^2} - \frac{u_A v_A^2}{6R^2}, \qquad \delta_{xBP} = +\frac{u_B y_P^2}{2R^2} - \frac{u_B v_B^2}{6R^2},$$

yukarıdaki gibi hesaplanır ve P noktasının aranan koordinatları aşağıdaki gibi hem A noktasından hem de B noktasından kontrollü olarak hesaplanır.

$$y_P = y_A + v_A + \delta_{yAP}, \qquad y_P = y_B + v_B + \delta_{yBP}$$

$$x_P = x_A + u_A + \delta_{xAP}, \qquad x_P = x_B + u_B + \delta_{xBP}$$

4.8.2-GERİDEN KESTİRME



Verilenler: A(y_A,x_A), M(y_M,x_M), B(y_B,x_B)

α,β acıları

İstenilenler: P(y_P, x_P)

İşlem adımları:

1- $\delta_{AM}, \delta_{MA}, MA, \delta_{BM}, \delta_{MB}$ büyüklükleri hesaplanır

$$\delta_{yAM} = -\frac{(x_M - x_A)^2 y_A}{2R^2} - \frac{(x_M - x_A)^2 (y_M - y_A)}{6R^2}$$

$$\delta_{xAM} = +\frac{(x_M - x_A)^2 y_M}{2R^2} - \frac{(x_M - x_A)^2 (y_M - y_A)}{6R^2}$$

olmak üzere

$$\tan(AM) = \frac{y_M - y_A - \delta_{YAM}}{x_M - x_A - \delta_{XAM}}$$

ile (AM) bulunur.

$$\delta_{AM} = -\frac{\rho}{2R^2}(y_M + y_A)(x_M - x_A)$$

$$(MA) = (AM) + \delta_{AM} \pm \pi$$

ile (MA) hesaplanır. MA kenarı,

$$MA = \frac{y_M - y_A - \delta_{y_{AM}}}{\sin(AM)} = \frac{x_M - x_A - \delta_{x_{AM}}}{\cos(AM)}$$

kontrollü olarak hesaplanır. (BM), (MB) ve MB kenarı da benzer biçimde hesaplanır.

2- γ = (MA) – (MB) ile γ açısı hesaplanır.

3- AMP ve BMP üçgenlerinde ekses, üçgenlerin düzlem alanlarından yararlanarak

$$\varepsilon_A = \frac{F_A}{R^2}\rho \qquad \varepsilon_B = \frac{F_B}{R^2}\rho$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Eğer üçgen eksesleri ε_A, ε_B nin hesapla bulunması isteniyorsa (φ) ve (ψ) yaklaşık değerleri bulunur. Bunun için (φ) + (ψ) ve(φ) - (ψ) değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{(\varphi) + (\psi)}{2} = 180^0 - \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{2}$$

$$\frac{(\varphi)-(\psi)}{2}=\arctan\{\cot(45^0+(\lambda))\tan\frac{(\varphi)+(\psi)}{2}\};\qquad \cot(\lambda)=\frac{MB\sin\alpha}{MA\sin\beta}=\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\psi)}$$

yukarıdaki iki denklem taraf tarafa bir toplanıp bir de çıkarılırsa (φ) ve (ψ) değerleri bulunur.

$$\varepsilon_A=\frac{MA^2}{2}\frac{\sin(\alpha+(\varphi))\sin(\varphi)}{\sin\alpha}\frac{\rho}{R^2};\qquad \varepsilon_B=\frac{MB^2}{2}\frac{\sin(\beta+(\psi))\sin(\psi)}{\sin\beta}\frac{\rho}{R^2};$$

4- açıların Legendre yöntemine göre indirgenmesi ve (φ'), (ψ') yardımcı açılarının hesaplanması

$$\alpha'=\alpha-\frac{\varepsilon_A}{3},\quad \beta'=\beta-\frac{\varepsilon_B}{3}\quad \gamma'=\gamma-\frac{\varepsilon_A+\varepsilon_B}{3}$$

olmak üzere AMP ve MBP üçgeninde S ortak kenarı da sinüs teoreminden

$$\frac{AM\sin\beta'}{BM\sin\alpha'}=\frac{\sin\psi'}{\sin\varphi'}=\tan\lambda'$$

denilerek λ' hesaplanır. Böylece

$$\frac{\varphi'+\psi'}{2}=\pi-\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma')\ \text{ve}\qquad \tan\frac{\varphi'-\psi'}{2}=\tan\frac{\varphi'+\psi'}{2}\cot(\frac{\pi}{4}+\lambda')$$

eşitlikleri ile

$\frac{\varphi'+\psi'}{2}$ ve $\frac{\varphi'-\psi'}{2}$ değerleri bulunur. Bu değerlerin taraf tarafa toplanıp ve çıkarılmalarıyla

$$\varphi'=\frac{\varphi'+\psi'}{2}+\frac{\varphi'-\psi'}{2}\quad \text{ve}\quad \psi'=\frac{\varphi'+\psi'}{2}-\frac{\varphi'-\psi'}{2}$$

φ' ve ψ' elde edilir.

5- AP, BP, (AP) ve (BP) değerlerinin hesabı

$$AP=AM\frac{\sin(\alpha'+\varphi')}{\sin\alpha'},\qquad BP=BM\frac{\sin(\beta'+\psi')}{\sin\beta'}$$

$$(AP)=(AM)+(\varphi'+\frac{\varepsilon_A}{3}),\qquad (BP)=(BM)-(\psi'+\frac{\varepsilon_B}{3})$$

6- P noktasının koordinatları

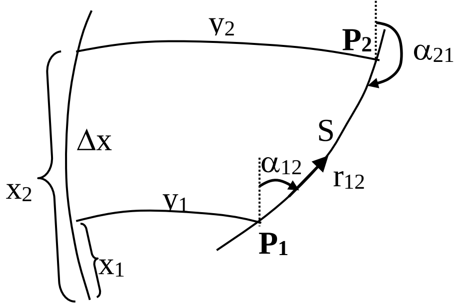
$$y_P=y_A+AP\sin(AP)+\delta_{y_{AP}}=y_B+BP\sin(BP)+\delta_{y_{AP}}$$
$$x_P=x_A+AP\cos(AP)+\delta_{x_{AP}}=x_B+BP\cos(BP)+\delta_{x_{AP}}$$

şeklinde bulunur.

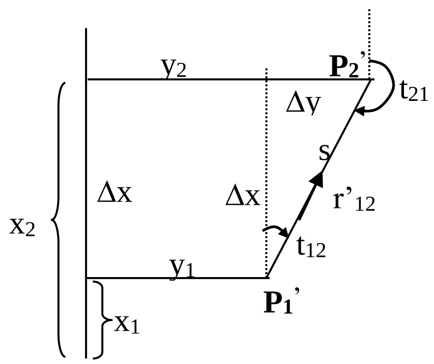
4.9 KÜREDE JEODEZİK HESAPLAMALARIN DÜZLEM ESASLARA GÖRE (İNDİRGEMEYLE) YAPILMASI

Tıpkı düzlemde olduğu gibi küre yüzeyinde de temel ödev hesapları, kestirme hesapları, poligon hesapları yapılabilir. Literatürde bu hesaplamaların nasıl yapılacağı mevcuttur. Bu bölümde farklı olarak küre yüzeyindeki jeodezik hesaplamaların düzlem esaslara göre nasıl yapılacağını göreceğiz. Küresel formülleri hiçkullanmaksızın düzlem formüllerle küresel hesaplamaların yapılabilmesi şüphesiz büyük hesap kolaylığı sağlamaktadır.Ancak bu şekildeki hesaplamalar sınırlı büyüklükteki çalışma bölgeleri için yürütülebileceği de gözardı edilmemelidir.

Küre yüzeyindeki Soldner koordinatları hiçbir değişiklik yapılmaksızın düzlem koordinatlar olarak ele alınırsa küre yüzeyinin düzleme *ordinat koruyan projeksiyonu (Cassini-Soldner Projeksiyonu)* yapılmış olur. Bu durumda küre üzerindeki P_1 ve P_2 noktalarının düzlemdeki karşılıkları P'_1 ve P'_2 olur(şekil-16). Sözkonusu iki nokta arasında hesaplanacak semt,kenar değerleri her iki yüzeyde farklı olacaktır.



Şekil-16 Küre Yüzeyi



Projeksiyon Yüzeyi (Düzlem)

$\Delta y = y_2 - y_1$ ve $\Delta x = x_2 - x_1$ koordinat farkları olmak üzere,

Düzlemde;

$$\tan t_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad t_{21} = t_{12} \pm \pi$$

$$s = \frac{\Delta y}{\sin t_{12}} = \frac{\Delta x}{\cos t_{12}} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

Kürede;

Serilerle temel ödev eşitliklerinden (Bölüm 4.7.3.2)

$$\tan \alpha_{12} = \frac{\Delta y - \delta y}{\Delta x - \delta x} \qquad \alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta\alpha \pm \pi$$

$$S = \frac{\Delta y - \delta y}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\Delta x - \delta x}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(\Delta y - \delta y)^2 + (\Delta x - \delta x)^2}$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen δy, δx, $\delta\alpha$ küresellik düzeltmeleri olup aşağıdaki formüllerden hesaplanırlar.

$\delta y = -\dfrac{\Delta x^2}{2R^2}\left(y_1+\dfrac{\Delta y}{3}\right)$ $\delta x = \dfrac{\Delta x}{2R^2}\left(y_2^2-\dfrac{\Delta y^2}{3}\right)$

$\delta\alpha = -\dfrac{\Delta x}{R^2}\rho\left(y_1+\dfrac{\Delta y}{2}\right)$

Küre ve düzlemde hesaplanan semt ve kenar değerleri arasındaki farklar hesaplanabilir[4],[7],[16].

$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12}$: semt indirgemesi
$\delta s = S - s$: kenar indirgemesi

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2+y_1y_2+y_2^2\right)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1+y_2)+\frac{\rho}{6R^2}\left(y_1^2+y_1y_2+y_2^2\right)\sin t_{12}\cos t_{12}$$

Öte yandan semt farkları yerine doğrultu farklarının alınabileceği gerçeğinden hareketle doğrultu indiregemesinin semt indirgemesine eşit olacağı ortaya çıkar.

$\delta r_{12} = \delta t_{12} = r_{12} - r'_{12}$

Yukarıdaki indirgeme eşitliklerine bakıldığında indirgeme miktarlarının doğrultuya bağlı olduğu buradan Ordinat koruyan projeksiyonun konform (açı koruyan) bir projeksiyon olmadığı ortaya çıkar. Başlangıç meridyenine yakın bölgelerde bu indirgeme farkları dikkate alınmayacak kadar küçük olmakla beraber başlangıç meridyeninden uzaklaşıldıkça bu farkların dikkate alınması gereği ortaya çıkar. İndirgeme miktarlarının büyüklüğü ilgili kenarın doğrultusuna ve meridyenden uzaklaşmaya bağlıdır. $\Delta x = 0$ olması ya da kenarın ordinat ekseni yönünde ($\alpha=90^o$ ya da 270^o) olması halinde tüm indirgemeler sıfır olur. Ordinat koruyan projeksiyonun adı da buradan gelmektedir. Ayrıca tüm indirgeme eşitliklerinde geçen $1/6R^2$ terimi nedeniyle s ve t düzlem değerleri yerine S, α küresel değerlerinin indirgeme eşitliklerinde kullanılması sorun yaratmaz.

İndirgeme formüllerinde geçen noktalardan herhangi birinin sözgelimi P_2 noktasının Soldner koordinatları (x_2,y_2) şayet bilinmiyorsa, bu noktaya koordinatları bilinen bir noktadan (örneğin P_1 den) düzlem esaslara göre I.temel ödevden aşağıdaki gibi koordinat taşınabilir.

$x_2 \approx x_1 + S\cos\alpha_{12}$ $y_2 \approx y_1 + S\sin\alpha_{12}$
$x_2 \approx x_1 + s\cos t_{12}$ $y_2 \approx y_1 + s\sin t_{12}$ $t_{12} = (P_1P_2) = \tan^{-1}(\Delta y/\Delta x)$

Şüphesiz bu şekilde P_2 noktasının hesaplanan koordinatları yaklaşık değerler olup sadece indirgeme işlemi için kullanılabilir.

O halde küre yüzeyinde verilen α:semt (r:doğrultu),S:kenar ölçü değerleri düzleme

$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12}$

$r'_{12} = r_{12} - \delta t_{12}$

$s = S - \delta s$

şeklinde indirgenerek elde edilecek düzlem değerlerle düzlem esaslara göre hesaplamalar yürütülürse bulunacak koordinatlar aynı zamanda küre yüzeyindeki Soldner koordinatları olacaktır.

Böylece düzlem hesapla küresel koordinatlar bulunmaktadır. Bu şekilde küre yüzeyindeki temel ödev hesapları,kestirme hesapları, poligon hesapları yapılabilir. Ancak bu şekildeki hesaplamalar sınırlı büyüklükteki çalışma bölgeleri için yürütülebilir.

Özet olarak küre yüzeyindeki hesaplamaları düzlem esaslara göre yapmak istersek, yapılması gereken sadece küre yüzeyindeki semt, doğrultu ve uzunluk (α, r ve S) ölçülerinin *ordinat koruyan projeksiyon* kuralına göre indirgenerek düzlem karşılıklarının (t, r' ve s) bulunması ve bu değerlerle düzlem hesap yapılmasıdır.

4.9.1 Küre Yüzeyinde Temel Ödev Çözümlerinin İndirgemelerle Yapılması

Küre üzerindeki temel ödev çözümleri, eğer ölçüler ordinat koruyan projeksiyon kuralına göre indirgenirse düzlem esaslara göre temel ödev çözümleri yapılabilir. Böylece hesaplamalarda büyük kolaylık sağlanır.

I. Temel Ödevin İndirgeme Formülleriyle Çözümü

Verilenler : P_1 (x_1,y_1), S, α_{12}

İstenenler : $P_2(x_2,y_2)$, α_{21}

İndirgeme formüllerinde ikinci noktanın koordinatları da gerektiği için öncelikle bu amaç için ikinci noktanın yaklaşık koordinatları hesaplanmalıdır.

$$y_2 \approx y_1 + S \sin \alpha_{12}$$

$$x_2 \approx x_1 + S \cos \alpha_{12}$$

İndirgenmiş açıklık açısı ve kenar değeri

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_{12}\cos t_{12}$$

yukarıdaki indirgeme formüllerinden,

$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12}$ $\qquad$ $t_{21} = t_{12} \pm \pi$

$s = S - \delta s$

şeklinde elde edilir. İstenen ikinci noktanın kesin koordinatları düzlem I. Temel ödev çözümüne göre,

$y_2 = y_1 + s \sin t_{12}$

$x_2 = x_1 + s \cos t_{12}$

karşı açıklık açısı α_{21} de δt_{21} indirgemesi hesaplanarak

$\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21}$

Olur. Bu yöntemle temel ödev çözümünde, indirgeme değerleri ikinci noktanın yaklaşık koordinatları kullanılarak hesaplandığı için doğruluğu artırmak amacıyla kesin koordinat değerleri kullanılarak indirgeme değerleri yeniden hesaplanmalı şayet anlamlı bir fark varsa bu yeni indirgeme değerleriyle hesaplama tekrarlanmalıdır. İndirgeme yönteminin kullanıldığı tüm jeodezik hesaplamalarda bu durum söz konusudur.

Örnek-7:

Verilenler;

$x_1 = 4394996.195$ m $\qquad$ $y_1 = 0.000$ m

$\alpha_{12} = 141^{o}\,48'\,41.2706''$ $\qquad$ S = 69912.6734 m $\qquad$ (R= 6374249.664m)

İstenenler : y_2, x_2, α_{21}

Çözüm: İkinci noktanın yaklaşık koordinatları

$y_2 \approx y_1 + S \sin \alpha_{12} = 43223.59$m

$x_2 \approx x_1 + S \cos \alpha_{12} = 4340046.189$m

İndirgenmiş açıklık açısı ve kenar değeri yukarıdaki indirgeme formüllerinden,

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_{12}\cos t_{12}$$

$\delta t_{12} = -2.7777''$, $\delta t_{21} = +3.2508''$ ve $\delta s = -0.33099$m

$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12} = 141^o\ 48'\ 44.0482''$ $t_{21} = t_{12} \pm \pi = 321^o\ 48'\ 44.0482''$
$s = S - \delta s = 69913.0044m$
şeklinde elde edilir. İstenen ikinci noktanın kesin koordinatları düzlem I. Temel ödev çözümüne göre,

$y_2 = y_1 + s \sin t_{12} = 43223.055m$
$x_2 = x_1 + s \cos t_{12} = 4340045.347m$

karşı açıklık açısı α_{21} de

$\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21} = 321^o\ 48'\ 47.2990''$ olarak hesaplanır.

II. Temel Ödevin İndirgeme Formülleriyle Çözümü

Verilenler : $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$

İstenenler : S, α_{12}, α_{21}

Çözüm: Önce projeksiyon düzlemindeki açıklık açısı ve uzunluk değerleri noktaların verilen koordinatlarından yararlanılarak hesaplanır.

$\Delta y = y_2 - y_1$ ve $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\tan t_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad t_{21} = t_{12} \pm \pi$$

$$s = \frac{\Delta y}{\sin t_{12}} = \frac{\Delta x}{\cos t_{12}} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

indirgeme formüllerinden yararlanarak küresel değerler,

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_{12}\cos t_{12}$$

$\alpha_{12} = t_{12} + \delta t_{12}$ $\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21}$
$S = s + \delta s$

şeklinde elde edilir. II. temel ödev çözümünde noktaların koordinatları verildiği için iterasyona gerek yoktur.

Örnek-8:

Verilenler:

Nokta	y	x	
1	0.000	4394996.195	
2	43223.055	4340045.347	(R= 6374249.664m)

İstenenler : S, α_{12}, α_{21}

Çözüm: Önce projeksiyon düzlemindeki açıklık açısı ve uzunluk değerleri noktaların verilen koordinatlarından yararlanılarak hesaplanır.

$\Delta y = y_2 - y_1 = 43223.055$ $\Delta x = x_2 - x_1 = -54950.848$

$t_{12} = \arc \tan \frac{\Delta y}{\Delta x} = 141.8122356^o = 141^o\ 48'\ 44.0482''$,

$t_{21} = t_{12} \pm \pi = 321.8122356^o = 321^o\ 48'\ 44.0482''$ ve

$s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = 69913.0044m$

İndirgeme formüllerinden yararlanarak küresel değerler,

$\delta t_{12} = -2.7777''$, $\delta t_{21} = +3.2508''$ ve $\delta s = -0.33099m$

$\alpha_{12} = t_{12} + \delta t_{12} = 141^o\ 48'\ 41.2705''$ $\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21} = 321^o\ 48'\ 47.2990''$

$S = s + \delta s = 69912.6734m$

şeklinde elde edilir.

Soru:

Soldner koordinatları;

$Y_1 = 27652.00m$ $Y_2 = -17400.00m$

$X_1 = 4327642.00m$ $X_2 = 4321000.00m$

Olarak verilen iki nokta arasında II. temel ödev yparak istenenleri bulunuz.

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}({y_1}^2 + y_1 y_2 + {y_2}^2)\sin t_1 \cos t_1$$

$$S - s = -\frac{\rho}{6R^2}({y_1}^2 + y_1 y_2 + {y_2}^2)cos^2 t_1$$ (R=6370km)

Cevap:

$$t_{12} = arctan\frac{\Delta y}{\Delta x} = 261°6133187 = 261°36'47.95''$$

$$s = 45538.98185m$$

$$t_{21} = 81°36'47.95''$$

$$T_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}({y_1}^2 + y_1 y_2 + {y_2}^2)\sin t_1 \cos t_1$$

$$S - s = -\frac{\rho}{6R^2}({y_1}^2 + y_1 y_2 + {y_2}^2)cos^2 t_1$$

$$S - s = -.002332m$$

$$S = 45538.97952m$$

$d_{t1} = T_{12} - t_{12} = -0.14162653''$ $T_{12} = 261°6132794 = 261°36'47.8056''$

$d_{t1} = T_{21} - t_{21} = 0.0314''$ $T_{21} = 81°36'47.9787''$

4.10. Küre Yüzeyinde İndirgeme Formülleriyle Kestirme Hesapları

Küre yüzeyinde kestirme hesapları için geliştirilmiş özel yöntemler olup bunlar literatürde mevcuttur [1],[4],[20]. Ancak burada kestirme hesapları hesap kolaylığı nedeniyle indirgemeler suretiyle düzlem esaslara göre yapılacaktır. Bu amaçla yapılan tüm ölçüler indirgeme formülleriyle düzlem değerlere dönüştürülür. Şayet ölçülen açılar verilmişse bunlar doğrultulara çevrilir[7].

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_{12} \cos t_{12}$$

Şeklinde verilen indirgeme formüllerinde,

$\sin t_{12} = \frac{\Delta y}{s}$ $\qquad\qquad$ $\cos t_{12} = \frac{\Delta x}{s}$

değerleri kullanılarak indirgeme formülleri aşağıdaki gibi daha sade bir biçime sokulabilir. P_1 ve P_2 noktaları arasında küresel uzunluk S, küre yüzeyinde ölçülen doğrultu r ise bu değerlerin düzlem karşılıkları s ve r’ aşağıdaki gibi bulunur.

$\Delta y = y_2 - y_1$ ve $\Delta x = x_2 - x_1$ olmak üzere

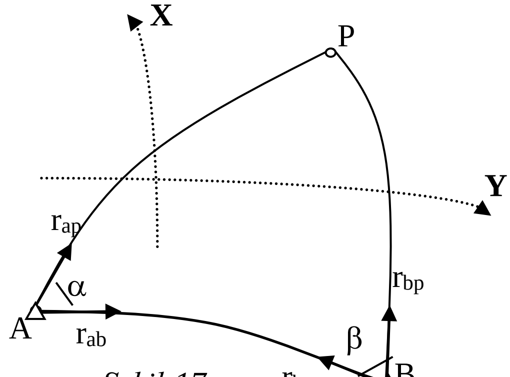
$$s = S + \frac{\Delta x^2}{6R^2 S}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)$$

$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2}\left[(2y_1 + y_2) + \left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2}\right]$$

Ölçüler indirgeme eşitlikleriyle düzleme indirgendikten sonra tamamen düzlem trigonometri esaslarına göre bütün jeodezik hesaplamalar (temel ödev, kestirme, poligon hesapları gibi) düzlemdeymiş gibi yapılır ve soldner sisteminde koordinatları bilinen noktalara dayalı olarak diğer noktaların kesin koordinatları hesaplanır. İndirgeme işlemlerinde yaklaşık koordinatlar kullanılmışsa düzlem hesap sonucunda bulunan kesin koordinatlarla indirgeme büyüklükleri yeniden hesaplanır. Eğer yeni hesaplanan indirgeme değerleri ile ilk hesaplanan indirgeme değerleri arasında anlamlı bir fark varsa bu yeni değerlerle hesaplama tekrarlanır yani iterasyon yapılır.

4.11 KÜREDE ÖNDEN KESTİRME

Verilenler: A(x_a,y_a), B(x_b,y_b), α , β
İstenilenler: P(x,y)



Şekil-17

Çözüm:
Küre yüzeyinde ölçüldüğü varsayılan açılar (yatay doğrultular) düzleme indirgenir. Ölçülen açılar doğrultu farkları şeklinde düşünülürse aralarındaki ilişki,

$$\alpha = r_{ab} - r_{ap} \qquad \beta = r_{bp} - r_{ba}$$

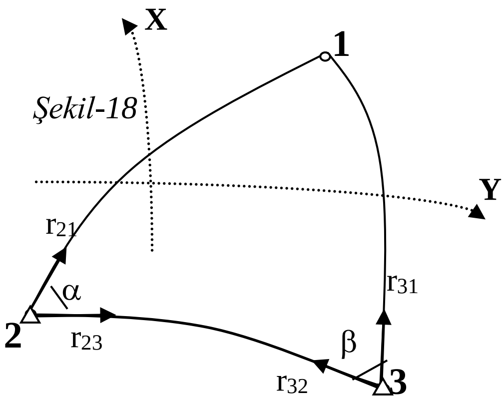
şeklinde olur.
Bu dört r_{ik} doğrultusu aşağıdaki şekilde indirgenir

$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2}\left[(2y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2}\right]$$

ve elde edilen r'_{ik} doğrultularıyla düzlemdeki α ve β açıları bulunur ve bu değerlerle düzlem önden kestirme hesabı yapılarak sonuca ulaşılır. Bu indirgeme işlemlerinde kestirilecek noktanın koordinatlarının yaklaşık da olsa bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle kestirilecek noktanın yaklaşık koordinatları problemin bütün verilenleriyle düzlemde kabul edilip çözülmesiyle elde edilir.

Örnek-1: Soldner sisteminde koordinatları verilen 2 ve 3 noktalarından kestirilecek 1 noktasına olan doğrultu ölçüleri verilmiştir. 1 noktasının soldner koordinatlarını bulunuz (şekil-18).

Nokta	Y	X
2(A)	43223.055	4340045.347
3(B)	43462.260	4450468.234



Şekil-18

DN	*BN*	*r_{ik} (Ölç.Doğrultu)*
2	1	322.12787160°
2	3	0.44222481
3	2	180.44858670
3	1	218.40557320

İstenilenler: (1)P(x,y) koordinatları

P (1) noktasının yaklaşık koordinatlarını düzlem önden kestirme hesabıyla bulabilmek için öncelikle ölçülen doğrultu farklarından α ve β taban açıları hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir.
$\alpha = 38.31435321^o$ ve $\beta = 37.9569865^o$
Taban açılarıyla önden kestirme eşitliklerinden kestirilecek noktanın yaklaşık koordinatları,

$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a)\cot\alpha - (x_b - x_a)}{\cot\alpha + \cot\beta} = -3.838\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a)\cot\alpha + (y_b - y_a)}{\cot\alpha + \cot\beta} = 4394996.197\text{m}$$

olarak bulunur.

Not: Bu eşitlikler şekil-17 ye göredir ve kestirilecek olan nokta AB doğrusunun solunda kalmaktadır. Yani kestirilecek noktadan bakıldığında sağdaki nokta A ve bu noktada ki taban açısı α , soldaki nokta B ve bu noktadaki taban açısı β dır. AB doğrusunun sağında kalan P noktası için yukarıdaki eşitliklerdeki α ve β açılarının eksi işaretli alınması gerekir.

Ölçülen doğrultular indirgenerek düzlem değerlere dönüştürüldüğünde

DN	BN	r_{ik}(Ölç.Doğr.)	İndirgeme	r'_{ik}(İndirg.Doğr.)
2	1	322.12787160°	3.251″	322.12696856°
2	3	0.44222481	12.147	0.43885054
3	2	180.44858670	-12.149	180.45196143
3	1	218.40557320	-3.304	218.40649089

değerleri elde edilir. Bu indirgenmiş doğrultularla düzlem taban açıları
$\alpha' = r'_{23} - r'_{21}$ $\beta' = r'_{31} - r'_{32}$
$\alpha' = 38.31188198^o$ ve $\beta' = 37.95452946^o$

olur ve bu açılarla yeniden düzlem önden kestirme yapılırsa ,
P (1) noktasının kesin koordinatları

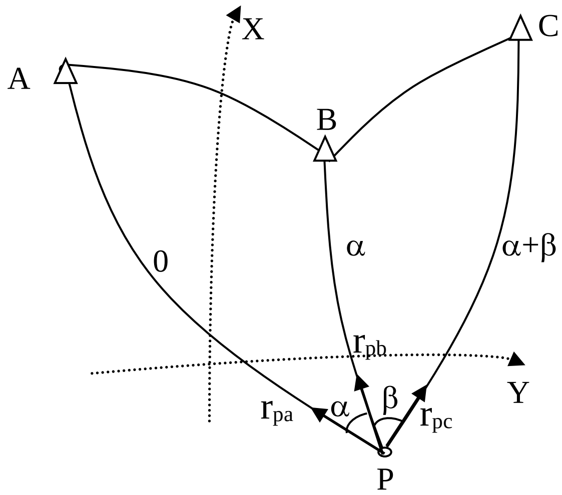
$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a)\cot\alpha' - (x_b - x_a)}{\cot\alpha' + \cot\beta'} = -0.0003\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a)\cot\alpha' + (y_b - y_a)}{\cot\alpha' + \cot\beta'} = 4394996.195\text{m}$$

olarak bulunur. İndirgeme değerlerini kontrol amacıyla yukarıda bulunan koordinatlarla doğrultu indirgeme değerleri yeniden hesaplanmış ancak aynı değerler tekrar elde edildiğinden iterasyona gerek kalmamıştır.

4.12 KÜREDE GERİDEN KESTİRME

Verilenler: $A(y_A,x_A)$, $B(y_B,x_B)$, $C(y_C,x_C)$
α,β açıları
İstenilenler: $P(y_P,x_P)$



Şekil-19

Çözüm: Küre üzerinde ölçüler (doğrultular) düzleme indirgenir. Ölçülen açılar doğrultu farkları şeklinde düşünülürse aralarındaki ilişki,

$\alpha = r_{pb} - r_{pa}$ $\quad\quad$ $\beta = r_{pc} - r_{pb}$
şeklinde olur.

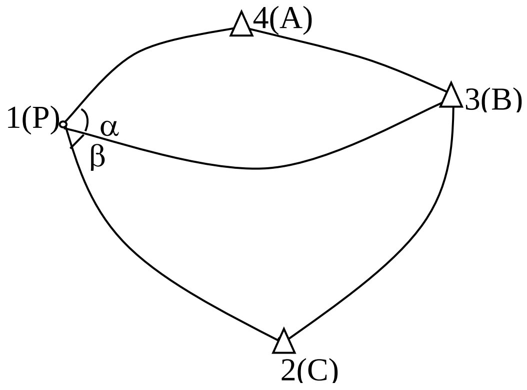
Bu üç r_{ik} doğrultusu aşağıdaki şekilde indirgenir

$$r' = r - \frac{\rho\Delta x}{6R^2}\left[(2y_1 + y_2) + \left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2}\right]$$

ve elde edilen r'_{ik} doğrultularıyla düzlemdeki α ve β açıları bulunur ve düzlem geriden kestirme hesabı yapılarak sonuca ulaşılır. Bu indirgeme işlemlerinde kestirilecek noktanın koordinatlarının yaklaşık da olsa bilinmesi gerekmektedir.

Örnek-2: Kestirilecek 1 noktasından soldner sisteminde koordinatları verilen 2, 3 ve 4 noktalarına olan doğrultu ölçüleri verilmiştir. 1 noktasının soldner koordinatlarını bulunuz (şekil-20).

Nokta	Y	X
2(C)	43223.055	4340045.347
3(B)	43462.260	4450468.234
4(A)	16916.746	4506823.277



Şekil-20

DN	BN	r_{ik} (Ölç.Doğrultu)
1	4	8.60270358°
	3	38.07942931
	2	141.81146400

İstenilenler: 1(P) noktasının (x,y) değerleri

Çözüm: Öncelikle ölçülen doğrultu farklarından α ve β taban açıları hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir.

$\alpha = 29.47672573^\circ$ ve $\beta = 103.7320347^\circ$

Kestirilecek 1 noktasının yaklaşık koordinatları Delambre yönteminden

$$\tan t_b = \frac{(Ya-Yb)\cot\alpha + (Yc-Yb)\cot\beta - (Xc-Xa)}{(Xa-Xb)\cot\alpha + (Xc-Xb)\cot\beta + (Yc-Ya)} \Rightarrow t_b = 38.07961012^\circ$$

Buradan kestirilecek 1 noktasının yaklaşık koordinatları;

$$X_1 = \frac{Yc - Ya + Xa\tan(t_b-\alpha) - Xc\tan(t_b+\beta)}{\tan(t_b-\alpha)-\tan(t_b+\beta)} = 4394996.57\text{m}$$

$$Y_1 = Ya + (X_1 - Xa)\ \tan(t_b - \alpha) = -1.212\text{m}$$

olarak bulunur.

Ölçülen doğrultular indirgeme formülleriyle düzlem değerlere dönüştürüldüğünde

DN	BN	r_{ik}(Ölç.Doğr.)	İndirgeme	r'_{ik}(İndirg.Doğr.)
1	4	8.60270358°	1.636″	8.60224909°
1	3	38.07942931	2.816	38.07864719
1	2	141.81146400	-2.778	141.81223555

doğrultu değerleri elde edilir.

Bu indirgenmiş doğrultularla düzlem taban açılar

$\alpha' = r'_{13} - r'_{14}$ $\beta' = r'_{12} - r'_{13}$

$\alpha' = 29.4763981^{o}$ ve $\beta' = 103.7335884^{o}$

olur ve bu açılarla yeniden düzlem geriden kestirme yapılırsa,

$$\tan t_b = \frac{(Ya - Yb)\cot\alpha' + (Yc - Yb)\cot\beta' - (Xc - Xa)}{(Xa - Xb)\cot\alpha' + (Xc - Xb)\cot\beta' + (Yc - Ya)} \Rightarrow t_b = 38.07864746^{o}$$

Buradan kestirilecek 1 noktasının kesin koordinatları;

$$X_1 = \frac{Yc - Ya + Xa\tan(t_b - \alpha') - Xc\tan(t_b + \beta')}{\tan(t_b - \alpha') - \tan(t_b + \beta')} = 4394996.196\text{m}$$

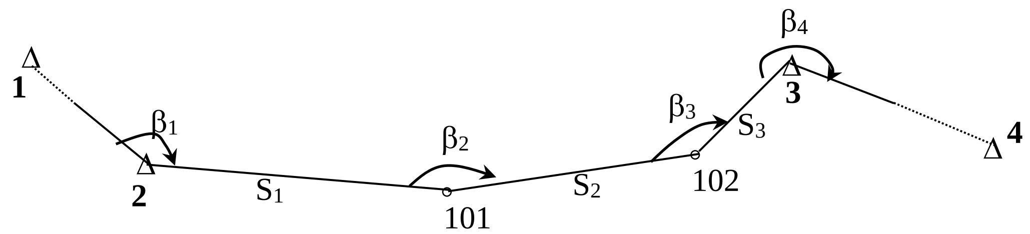
$$Y_1 = Y_a + (X_1 - X_a)\tan(t_b - \alpha') = -0.0005\text{m}$$

olarak bulunur. İndirgeme değerlerini kontrol amacıyla yukarıda bulunan koordinatlarla doğrultu indirgeme değerleri yeniden hesaplanmış ancak aynı değerler tekrar elde edildiğinden iterasyona gerek kalmamıştır.

4.13 KÜRE YÜZEYİNDE POLİGON HESABI

Çok uzun kenarlı poligonların hesabının düzlemde yapılması doğru olmaz poligon hesabının küre yüzeyinde yapılması gerekir. İndirgeme formülleriyle küre üzerinde poligon hesabı yapmak mümkündür. Bunun için ölçülen poligon açıları (doğrultular) ve kenarlar (deniz seviyesindeki) indirgeme eşitlikleri yardımıyla düzlem değerlere dönüştürülür. Ölçülerin indirgenmesi aşamasında poligon noktalarının yaklaşık da olsa koordinatlarının bilinmesi gerekir. Bunun için düzlem esaslara göre yapılacak bir poligon hesabı ile poligon noktalarının yaklaşık koordinatları bulunur. İndirgeme işlemleri tamamlandıktan sonra indirgenmiş ölçülerle yapılacak ikinci bir poligon hesabı ile poligon noktalarının soldner koordinatları bulunur[7].

Örnek-3: Küre yüzeyinde uzun kenarlı poligon hesabı



Şekil-21 Uzun Kenarlı Poligon Geçkisi

Şekil-21 deki uzun kenarlı poligon geçkisinde 1,2,3 ve 4 nolu nirengi noktalarının soldner sisteminde koordinatları , şekilde gösterilen kırık açıları ve deniz seviyesine indirgenmiş yatay kenar uzunlukları verilmiştir. Poligon hesabını yaparak 101 ve 102 nolu poligon noktalarının soldner sisteminde koordinatlarını bulunuz.

Nokta	Y	X
1	148797.8870	202114.4370
2	172019.3820	233127.7370
3	180428.5440	265006.6990
4	201374.8450	296889.5260

Poligon açı ve kenar ölçüleri

β_1=183.30540^g S_1= 11 851.879 m
β_2=183.56710^g S_2= 9 859.157 m
β_3=208.01259^g S_3= 11 426.546m
β_4=221.23667^g (R=6373882.243m)

Çözüm:

NNo	Kırılma Açıları β	Açıklık Açıları t	Kenar S	Δy=s.sint	Δx=s.cost	Y	X
1							
	-83	**40.91597**					
2	183.3054			2.139	3.85	**172019.382**	**233127.737**
	-83	24.21307	11851.879	4399.825	11004.934		
				1.779	3.202		
101	183.5671			1200.621	9785.780	176421.346	244136.521
	-83	7.77187	9859.157				
102	208.01259			2.062	3.712	177623.746	253925.503
	-83	15.77616	11426.546	2802.735	11077.483		
3	221.23667					**180428.544**	**265006.699**
		37.00446					
4	837.03773			[Δy]= 8403.181	[Δx]= 31868.197	8409.162	31878.962
	37.00446					8403.181	31868.197
	f_β= -332^{cc}		[s]= 33138m			f_y= 5.981m	f_x= 10.765m

Poligonların Yaklaşık Koordinatlarının Hesabı

$\Delta y = y_2 - y_1$ ve $\Delta x = x_2 - x_1$ olmak üzere

$$s = S + \frac{\Delta x^2}{6R^2 S}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)$$

$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2}\left[(2y_1 + y_2) + \left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2}\right]$$

Öncelikle indirgeme işlemlerinin yapılabilmesi için yeni poligon noktalarının yaklaşık koordinatlarına ihtiyaç vardır. Bu amaçla düzlem poligon hesabıyla noktaların yaklaşık koordinatları hesaplanır. Ölçülen poligon açıları doğrultulara çevrilir. Poligon hesabıyla bulunan noktaların yaklaşık koordinatları kullanılarak tüm doğrultularla ölçülen yatay kenarların aşağıdaki indirgeme eşitliklerine göre indirgemeleri yapılarak düzlem değerler hesaplanır.

Doğrultuların (açıların) İndirgenmesi

DN	BN	Ölç.Doğ r(g)	dr=r′-r (cc)	İndg.Doğr. r′(g)	İndg.Açı β′(g)
2	1	0.000000	-56.98	-0.005698	
2	101	183.305400	-96.95	183.295706	183.301405
101	2	0.000000	-66.90	-0.006690	
101	102	183.567100	-43.27	183.562772	183.569461
102	101	0.000000	-16.12	-0.001612	
102	3	208.012590	-75.24	208.005069	208.006682
3	102	0.000000	-44.15	-0.004415	
3	4	221.236670	-177.98	221.218869	221.223286

Kenarların İndirgenmesi

DN	**BN**	**Ölç.Kenar S(m)**	**ds=s-S (cm)**	**İndg. kenar s(m)**
2	101	11851.8790	381.87	11855.6977
101	102	9859.1570	374.72	9862.9042
102	3	11426.5460	423.75	11430.7835

İndirgenmiş açı ve kenar uzunluklarıyla yapılacak yeni bir düzlem poligon hesabıyla poligon noktalarının kesin soldner koordinatları bulunur.

NNo	Kırılma Açıları β’	Açıklık Açıları t	Kenar s	Δy=s.sint	Δx=s.cost	Y	X
1							
	-31	**40.91597**					
2	183.301405			0.039	-0.002	**172019.382**	**233127.737**
	-31	24.214275	11855.698	4401.450	11008.397		
101	183.569461			0.033	-0.001	176420.871	244136.132
	-31	7.780636	9862.904	1202.425	9789.334		
102	208.006682					177623.329	253925.465
	-30	15.784218	11430.783	0.038 2805.177	-0.002 11081.236		
	221.223286						
3		**37.00446**				**180428.544**	**265006.699**
4	837.016804			[Δy]= 8409.052	[Δx]= 31878.967	8409.162	31878.962
	37.00446					8403.052	31878.967
	f_β= -123^{cc}		[s]= 33149			f_y= 0.110m	f_x= -0.005m

Kesin Poligon Hesabı

Hesap Bölgesinin Sınırlılığı

Soldner koordinat sisteminde verilen jeodezik hesaplama eşitliklerinden başlangıçta Bölüm 4.7.3.1 de(sayfa 96) verilen temel ödev eşitlikleri (kapalı formüller) geneldir. Yani her kenar uzunluğu ve her ordinat değeri için geçerlidir. Oysa serilerle ve indirgemeli hesaplamalar için çıkarılan eşitliklerde ordinat ve kenar uzunlukları değerlerinin her durumda Y_{max}<200km ve S_{max}<50km olacakları varsayımından hareket edilmiştir.

Pratik olarak, S+Y_1>250km olması halinde serilerle veya indirgemeli hesaplamalar tavsiye edilmez. Aşağıdaki tablo bu konuda fikir verecektir.

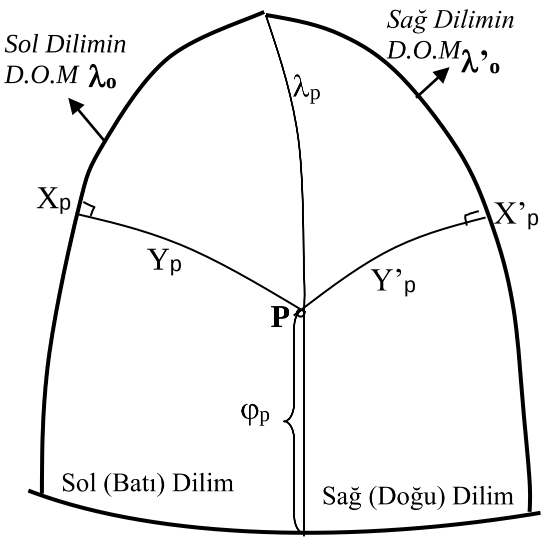
Hata	Serili ve İndirgemeli formüllerde aşılmaması gereken Y_1 ve S için sınır değerler (km)							
<1mm	**Y_1:**60 **S :**80	70 70	80 60	100 40	140 20	160 15	180 10	220 5
<1cm	**Y_1:**140 **S :**80	150 75	160 70	170 60	200 40	230 30	290 15	320 10

Bu nedenle başlangıç meridyeninden çok uzaklaşılması veya çok uzun kenarların kullanılması halinde bu eşitlikler tam doğru sonuçlar vermez. Öte yandan bu sınır değerler de jeodezi uygulamaları için genel de her zaman yeterli olur. Zira soldner sisteminde başlangıç meridyeni çalışma bölgesinin ortalarında seçilir. Buna rağmen bu sınır değerler aşılıyorsa ikinci bir meridyen sistemi seçilir ve gerekiyorsa dilimler (meridyen sistemleri) arası koordinat dönüşümü yapılır.

Farklı dilimler arasında koordinat dönüşümü yapmak için önce bir sistemdeki soldner koordinatlarından küresel coğrafi koordinatlar hesaplanır sonra da hesaplanan bu coğrafi koordinatlardan ikinci sistemdeki soldner koordinatlarına geçiş yapılır (Bkz. Bölüm 4.7.5).

SOLDNER SİSTEMİNDE KOMŞU DİLİMLER ARASINDA KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

Soldner sisteminde serilerle ve indirgemeli formüllerin kullanılması durumunda dilim genişliklerinin sınırlı tutulması gerektiğini biliyoruz. Ayrıca küre yüzeyinin düzleme projeksiyon söz konusu olduğunda dilim orta meridyeninden (D.O.M) uzaklaşmalar deformasyonları aşırı büyütür. Bu nedenle dilim genişliklerinin sınırlı tutulur. Hesap bölgesi birden fazla dilimi kapsıyorsa komşu dilimler arasında koordinat dönüşümü gerekebilir[4].



Şekil-22

Örneğin şekil-22 de bir P noktasının λ_o sisteminde Y_p,X_p soldner koordinatları verilmekte ve aynı noktanın komşu λ'_o sisteminde Y'_p,X'_p soldner koordinatları istenmektedir. Çözüm için verilen soldner koordinatlarından önce noktanın coğrafi koordinatları sonra da coğrafi koordinatlardan ikinci sistemdeki soldner koordinatları hesaplanmaktadır.

$(X_p,Y_p)_{\lambda o} \longrightarrow (\varphi_p\ \lambda_p) \longrightarrow (X'_p,Y'_p)_{\lambda' o}$

Örnek-4: 33^0 meridyen sisteminde soldner koordinatları;
Y= 164 938.865m
X = 4 891 657.885m

olarak verilen noktanın 36^0 meridyen sistemindeki soldner koordinatlarını bulunuz. (R=6373394m)

Çözüm: Bölüm 4.7.5 de verilen eşitlikler kullanılır. Önce noktanın verilen soldner koordinatlarından coğrafi koordinatlar bulunur.
$\lambda_o=33^o$ için

(ψ =X / R)

$\lambda=\lambda_o$+arc tan[tan(Y/R) / cos ψ)]= 35.06000934^o= 35^o 3' 36.03"
φ = arc sin[cos(Y/R) * sin ψ)] = 43.9567036^o = 43^o 57' 24.13"

Bu coğrafi koordinatlardan $\lambda_o=36^o$ için soldner koordinatları hesaplanır.

$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_o$= -0.93999066^o

ψ = arc tan[tan(φ)/cos($\Delta\lambda$)]= 43.96055658^o

Noktanın $\lambda_o=36^o$ meridyen sistemindeki soldner koordinatları

X=R(ψ/ρ)= 4 890 027.676m

Y= (R/ρ) arc sin[cos(φ) sin($\Delta\lambda$)]= -75 268.465m

şeklinde bulunur.