5. HARİTA PROJEKSİYONLARI

Harita Projeksiyonunun Tanımı: Yeryuvarının topoğrafik yüzeyindeki doğal ve yapay her türlü özellik ve tesislerin bir haritaya aktarılabilmesi için yeryüzü bilgileri önce yeryuvarı için kabul edilmiş bulunan elipsoid veya küre gibi referans yüzeyine indirgenir. Daha sonra bu bilgiler bir harita düzlemine taşınır. Referans yüzeyi olarak alınacak küre veya elipsoid gibi eğri yüzeyler doğrudan doğruya düzleme açılamazlar. Bu nedenle referans yüzeyine indirgenmiş yeryüzü bilgileri matematiksel veya geometrik kurallar uygulanarak ya doğrudan doğruya ya da düzleme açılabilen silindir ve koni gibi ara yüzeylere aktarılırlar. Bu işleme "Harita Projeksiyonu" denir. Harita projeksiyonunda yararlanılan düzlem ya da düzleme dönüşebilen koni ve silindir gibi yardımcı yüzeylere "projeksiyon yüzeyi" adı verilir [4],[6],[18]. Doğaldır ki jeodezik çalışmalar için referans yüzeyinin düzlem alınması durumunda projeksiyon işlemine gerek duyulmaz.

Fiziksel yeryüzündeki harita yapımına konu olan bilgiler arasında uzunluk, alan ve şekil (açı) bakımından daima bir ilişki vardır. Bu bilgiler projeksiyon yüzeyine aktarıldığında aralarında bulunan ilişkilerin esas yüzeydeki gibi kalması beklenemez ve ilişkilerde bazı değişmeler ve bozulmalar olur. Projeksiyonda ortaya çıkan kaçınılmaz değişme ve bozulmalara "deformasyon" denir. Projeksiyon yöntemlerinde deformasyonların hesaplanabilme olanağı vardır.

Küre ve elipsoid gibi yüzeylerin düzleme projeksiyonları söz konusu olduğunda orijinal yüzey üzerindeki şekil düzleme geçirilirken mutlaka şekil, uzunluk, açı ya da alan cinsinden değişikliğe uğrar. Yukarıda sayılan üç özelliğin bir arada korunduğu bir projeksiyon türü mevcut değildir.

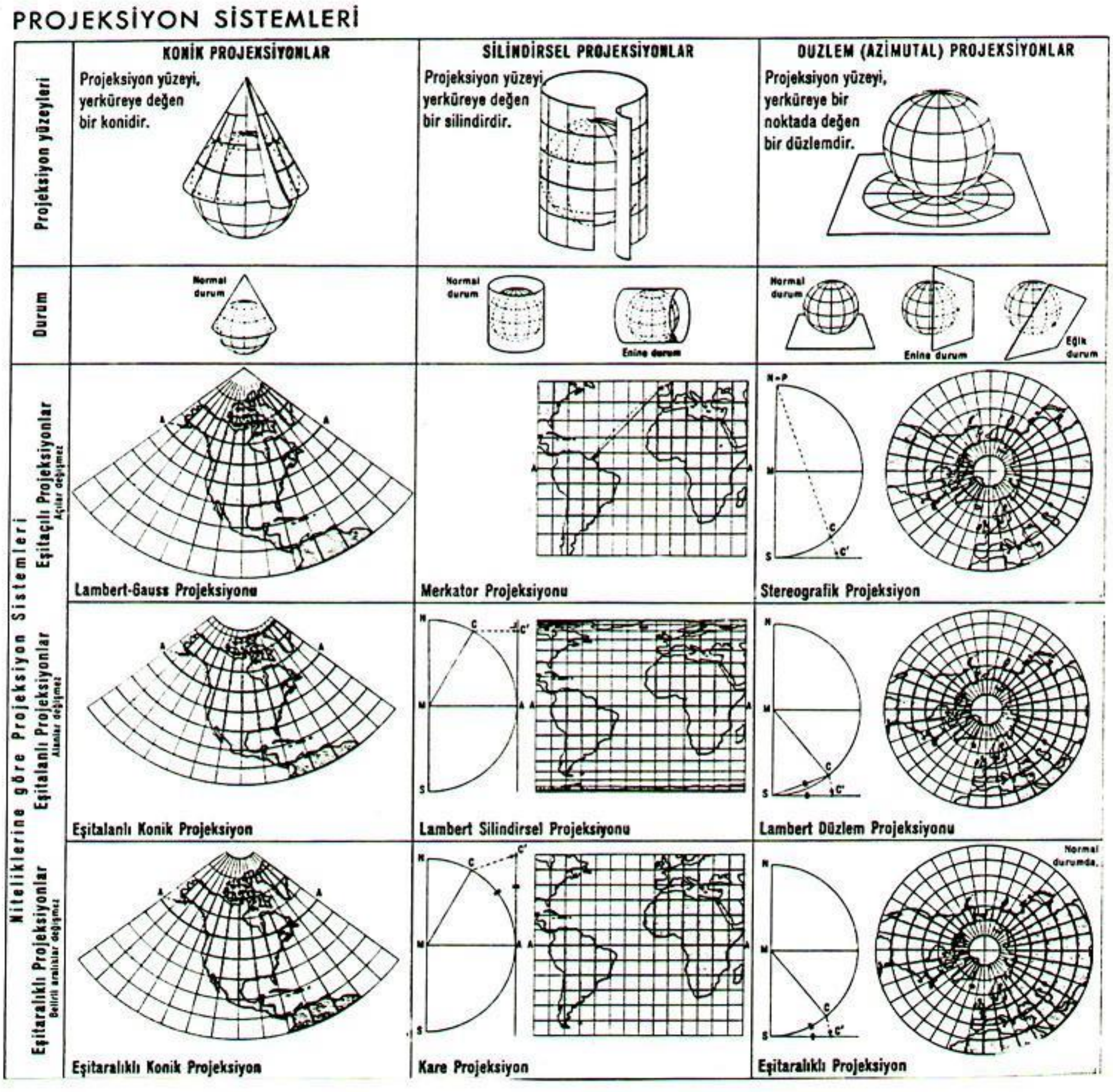
5.1. Projeksiyonların Sınıflandırılması

Değişik türleri bulunan ve farklı özellikler taşıyan harita projeksiyonları, kullanılan projeksiyon yüzeylerine ve projeksiyonun özelliklerine bağlı olarak iki ana gruba ayrılarak sınıflandırılır. Her grup içinde yer alan değişik projeksiyon türlerinden söz edilebilir. Harita projeksiyonları, projeksiyonun oluşumunda kullanılan yüzeylerin cinsine göre düzlem, silindirik ve konik projeksiyonlar olmak üzere üçe ayrılır. Bu projeksiyonlardan konik projeksiyonlar en genel durumdur. Zira koninin tepe açısı sıfır alındığında koni silindire,tepe açısı 180 derece alınması durumunda koni düzleme dönüşür.

Harita projeksiyonları, projeksiyonun özelliğine göre; açı koruyan (konform), alan koruyan, belirli doğrultularda uzunluk koruyan olarak üçe ayrılır.

Projeksiyon yüzeylerinin referans yüzeyiyle ortak noktalarına göre teğet yüzeyli, kesen yüzeyli ve çok yüzeyli olmak üzerede sınıflandırma yapılabilir.

Aşağıda çeşitli projeksiyonların sınıflandırılması çizelge üzerinde gösterilmektedir.



Şekil-1 Çeşitli Projeksiyon Türleri

Harita projeksiyon yöntemleri geliştirilirken orijinal yüzey üzerindeki uzunluk, alan ve şekil (açı) ilişkilerinden bir tanesinin korunması istenir.

Bu durumda karşımıza üç değişik harita projeksiyonu çıkar.

1) Uzunluk Koruyan Projeksiyonlar

Uzunluk koruyan projeksiyonlara örnek olarak silindirik transversal bir projeksiyon olan Ordinat Koruyan Projeksiyon (Cassini-Soldner Projeksiyonu) verilebilir. Bu projeksiyonda Y ekseni boyunca uzunluk korunur (Bölüm 17.12).

2) Açı Koruyan (Konform) Projeksiyonlar

Bu projeksiyon türünde, uzunluk deformasyonu doğrultuya bağlı olmaksızın her yönde eşit olduğundan şekillerde bozulma olmaz, açılar korunur. Gauss-Kruger Projeksiyonu ile Lambert (Konik) Projeksiyonu açı koruyan projeksiyonlardır.

3) Alan Koruyan Projeksiyonlar

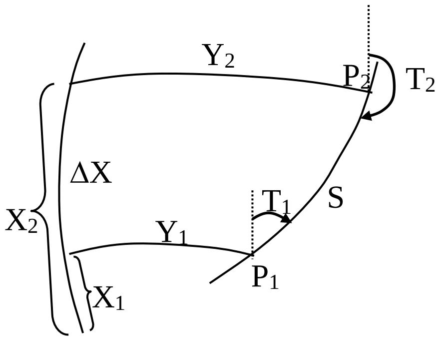
Alan koruyan projeksiyonda orijinal yüzeydeki alan ile projeksiyon yüzeyindeki alan arasında bir fark yoktur. Bu tür projeksiyona örnek olarak Bonne Projeksiyonu verilebilir.

BÖHYY ve şu an yürürlükte olan BÖHHBÜY yatay kontrol (nirengi) noktalarının koordinatlarının üç derecelik Gauss-Krüger Projeksiyon yüzeyinde hesaplanması gerektiğini belirtmektedir (madde-7). Bu nedenle harita projeksiyonlarından yalnızca Gauss-Krüger Projeksiyonu hakkında özet bilgi verilecektir.

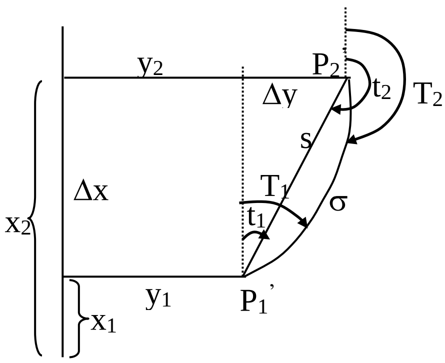
5.2 Kürenin Düzleme Ordinat Koruyan (Cassini-Soldner Projeksiyonu) Projeksiyonu

Herhangi bir projeksiyon kuralı koymaksızın küresel meridyen dik koordinatları (Soldner dik koordinatları) düzlem koordinatlar gibi işleme tabi tutulursa, kürenin düzleme ordinat koruyan projeksiyonu elde edilir. Bu projeksiyonda düzlem ve küresel dik koordinatlar arasındaki ilişki;

$x = X \quad y = Y$ şeklindedir.



Küre Yüzeyi



Projeksiyon Yüzeyi

Ancak, bu şekilde projeksiyon düzlemi koordinatları ile hesaplanan uzunluk ve doğrultular, karşılıkları olan uzunluk ve doğrultulardan farklı olur. Başlangıç meridyenine yakın bölgelerde bu farklar dikkate alınmayacak kadar küçük olmakla beraber başlangıç meridyeninde uzaklaşıldıkça bu farkların dikkate alınması gereği ortaya çıkar.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Uzunluk İndirgemesi:

Uzunluk indirgemesi P_1P_2 büyük daire yayının S uzunluğu ile $P_1'P_2'$ doğrusunun s uzunluğu arasındaki farktır. Uzunluk indirgemesi $\delta s = S - s$ şeklinde ifade edilmiştir.

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_1$$

Yukarıdaki formüldeki t_1 yerine T_1 ve s yerine S kullanılması, sonucu büyük ölçüde değiştirmez. $T = \pi/2$ için $\delta s = 0$ olur. Bu da projeksiyonun ordinat koruduğunun bir göstergesidir. T = 0 için de $\delta s = \max$ olur. Bu durumda da $y_1 = y_2$ olur. Ordinat koruyan projeksiyon konform (açı koruyan) bir projeksiyon değildir.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Doğrultu İndirgemesi:

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho''}{6R^2}\left(x_2 - x_1\right)\left(2y_1 + y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_1 \cos t_1$$

$$T_2 - t_2 = \frac{\rho''}{6R^2}\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 + 2y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_2 \cos t_2$$

Bu formüllerde T ve t farklarının çok küçük olduğu gerekçesi ile t yerine T de kullanılabilir.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Alan İndirgemesi:
Küre üzerinde apsis ve ordinat daireleri ile sınırlandırılmış bir şekil projeksiyon düzlemine bir dikdörtgen olarak geçer. Küre yüzeyindeki F alanı ile projeksiyon yüzeyindeki f alanı arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$$F - f = -\frac{f}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)$$

Ortalama bir

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

değeri için alan farkı

$$F - f = -\frac{y_m^2}{2R^2} f \quad \text{olur.}$$

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Jeodezik Temel Ödevlerin Çözümü:

I. Jeodezik Temel Ödev

Verilenler: $P_1(X_1,Y_1)$, T_1, S
İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

İşlem Adımları:

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.
$x_1 = X_1 \qquad y_1 = Y_1$

2) İndirgeme formüllerinde kullanılmak üzere x_2, y_2 için yaklaşık değer hesaplanır.
$x_2 \approx x_1 + S\cos T_1 \qquad y_2 \approx y_1 + S\sin T_1$

3) s ve t_1 için indirgemeler ve düzlem değerler hesaplanır.

$$s = S + \frac{S}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_1$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) - \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_1 \cos t_1$$

4) Problem düzlemde çözülür.

$x_2 = x_1 + s\cos t_1$ $y_2 = y_1 + s\sin t_1$ $t_2 = t_1 \pm \pi$

5) T_2 için t_2 değerinden faydalanarak indirgeme formülü ile değeri hesaplanır.

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}(x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\sin t_2 \cos t_2$$

6)Projeksiyon kuralına göre küresel değerlere geçilir.

$X_2 = x_2$ $Y_2 = y_2$

4. işlem adımında bulunan kesin koordinatlar (x_2, y_2) kullanılarak 3. adımdaki düzeltme değerleri yeniden hesaplanır ve değişiklik olup olmadığına bakılır. Eğer değişiklik miktarı önemli ise 4. Adımdaki koordinat hesabı yeniden yapılmalıdır.

Örnek:
Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, T_1, S

X_1= -92276.440 m S=105455.230 m $T_1 = 321°56'06.09''$
Y_1= 82130.142 m R=6373924.115 m

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

$x_1 = X_1 = -92276.440$ m $y_1 = Y_1 = 82130.142$ m
$x_2 \approx x_1 + S\cos T_1 \approx -9250.265$ m

$y_2 \approx y_1 + S\sin T_1 \approx 17111.224$ m

$$s = S + \frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\cos^2 t_1$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) - \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\sin t_1 \cos t_1$$

s = S + 2.264 m = 105457.494 m
$t_1 = T_1 - 12.74'' + 3.47'' = 321°55'56.82''$

$x_2 = x_1 + s \cos t_1 = -9251.404$ m
$y_2 = y_1 + s \sin t_1 = 17106.096$ m

Kontrol için bulunan bu x_2 ve y_2 değerleri ile s ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır.

$$t_1 = T_1 - 12.74'' + 3.47'' = 321°55'56.82''$$
s = S + 2.264m = 105457.494 m

Aynı indirgeme büyüklükleri elde edildiği için iterasyona gerek yoktur. Karşıt semt;

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}(x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\sin t_2 \cos t_2$$

$$t_2 = t_1 - \pi = 141°55'56.82''$$
$$T_2 = t_2 - 8.17'' - 3.47'' = 141°55'45.18''$$

ll. Jeodezik Temel Ödev

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$
İstenenler: S , T_1, T_2

Bu problemde l.Jeodezik temel problemde olduğu gibi iteratif işlem gerekmez.

İşlem Adımları:

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.
$x_1 = X_1 \qquad y_1 = Y_1$
$x_2 = X_2 \qquad y_2 = Y_2$

2) Düzlemde 2. temel problem çözümü yapılır.
$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta y = y_2 - y_1$

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad t_2 = t_1 + \pi$$

3) İndirgemelerle küresel S, T_1 ve T_2 değerlerine geçilir.

$$S = s - \frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_1$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x\left(2y_1 + y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_1 \cos t_1$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x\left(y_1 + 2y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_2 \cos t_2$$

Örnek:

Verilenler: $P_1(X_1,Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$

X_1= 18560.115 m X_2= 46587.077 m
Y_1= 17043.856 m Y_2= 59433.954 m
R= 6373924.115 m

İstenenler: S , T_1, T_2

$x_1 = X_1$ = 18560.115 m $x_2 = X_2$ = 46587.077 m

$y_1 = Y_1$= 17043.856 m $y_2 = Y_2$ = 59433.954 m

$\Delta x = x_2 - x_1$= 28026.962 m
$\Delta y = y_2 - y_1$= 42390.098 m

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad t_2 = t_1 + \pi$$

$$t_1 = 56°31'43.00'' \qquad t_2 = t_1 + \pi = 236°31'43.00''$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 50817.625 \text{ m}$$

$$S = s - \frac{s}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\cos^2 t_1$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x\left(2y_1 + y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_1 \cos t_1$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x\left(y_1 + 2y_2\right) + \frac{\rho''}{6R^2}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)\sin t_2 \cos t_2$$

S = s - 0.307m = 50817.318 m

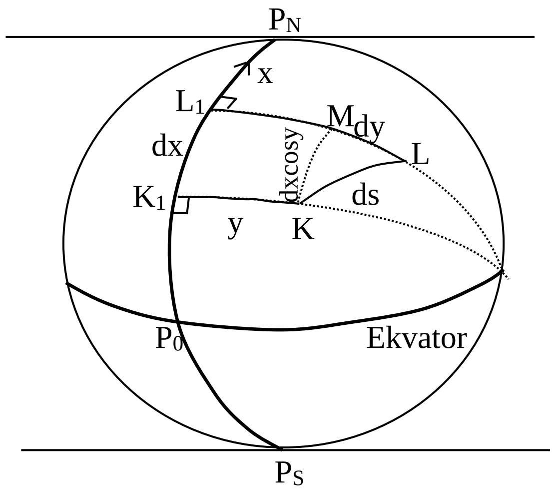
$$T_1 = t_1 + 2.22'' + 1.88'' = 56°31'47.10''$$
$$T_2 = t_2 - 3.22'' + 1.88'' = 236°31'41.66''$$

Not: Projeksiyon düzlemindeki jeodezik hesaplamalar için daha pratik yol tüm ölçüler(doğrultu ve kenarlar) önce projeksiyon düzlemine indirgenir. Gerekli bütün jeodezik hesaplar(kestirme, poligon hesapları) düzlemde yapılır. Gerekiyorsa sonunda düzlemden küreye geçilir.

5.3 Kürenin Düzleme Gauss – Krüger (Konform) Projeksiyonu

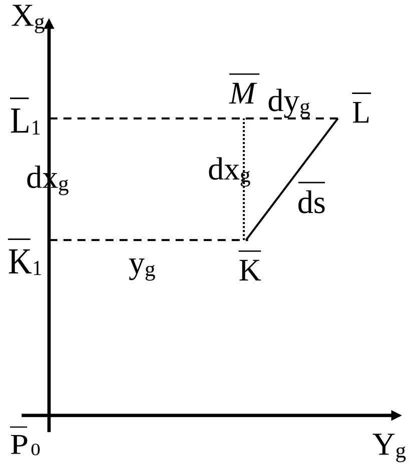
1931 yılından beri ülkemizde de kullanılmakta olan Gauss-Kruger Projeksiyonu silindirik, transversal, açı koruyan(konform) bir projeksiyondur. İzdüşüm yüzeyi olan silindir, küreye başlangıç olarak seçilen meridyen boyunca teğettir. Bu meridyene " başlangıç meridyeni" denir. Ülkemiz genelindeki çalışmalar için belirlenmiş başlangıç meridyenleri vardır.

Bunlar $27°, 30°, 33°, 36°, 39°, 42°, 45°$ meridyenleridir.



Küre

$dx_g = dx$



Gauss-Kruger Projeksiyon

GKP de seçilen başlangıç meridyeninin Gauss-Kruger projeksiyonu düzlemindeki karşılığı X_g ekseni olarak alınır. Bu durumda başlangıç meridyeninde uzunluk deformasyonu yoktur.

Gauss-Kruger projeksiyonunda x_g değerleri ekvatordan başlar. Bu yüzden jeodezik dik koordinat sisteminin başlangıç noktasının ekvator üzerinde olduğu düşünülmelidir.

P_0 başlangıç noktasının Gauss-Kruger projeksiyon düzlemindeki karşılığı olarak seçilen $\overline{P}_0$ noktasından X ekseninin karşılığı olacak herhangi bir x_g ekseni alınır. Başlangıç meridyeninde uzunluk korunduğundan

$$P_0 K_1 = \overline{P}_0 \overline{K}_1 \qquad P_0 L_1 = \overline{P}_0 \overline{L}_1$$

alınarak K_1,L_1 noktalarının $\overline{K}_1, \overline{L}_1$ karşılıkları bulunur. K, L noktalarının karşılıklarını bulmak için $\overline{K}_1, \overline{L}_1$ noktalarından çıkılan dikler üzerinde y_g ve y_g+dy_g değerleri kadar alınır. Bu değerler projeksiyon formüllerinden hesaplanır.

GKP konform açı koruyan bir projeksiyondur. Şekildeki küre yüzeyindeki diferansiyel KLM üçgeni ile projeksiyon düzlemindeki karşılığı $\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}$ üçgeninin benzer olmalıdır.Bu benzerliğin olabilmesi için,

$$\frac{\overline{ds}}{ds} = \frac{dy_g}{dy} = \frac{dx_g}{dx.\cos Y}$$

olmalıdır.
X ler eşit olduğu için $dx_g = dx$ yazılabilir. Bu durumda;

$$\frac{dy_g}{dy} = \frac{1}{\cos Y} = m \qquad (\ m : \text{ölçek,diferansiyel büyüme oranı})$$

Buradan

$$dx_g = dx$$
$$dy_g = dy / \cos Y$$

çıkar. Bu eşitliklerin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$x_g = X$$

$$y_g = Y + \frac{Y^3}{6R^2} + \frac{Y^5}{24R^4} \quad \text{ya da} \quad y_g = R \arctan h\left(\sin\frac{Y}{R}\right)$$

böylelikle jeodezik dik (Soldner) koordinatlarıyla Gauss-Kruger koordinatları arasındaki ilişki çıkarılmış olur.

5.3.1 Jeodezik Dik (Soldner) Koordinatlardan Gauss-Kruger Koordinatlarının Bulunması

Verilenler: X,Y İstenenler: x_g,y_g

$$x_g = X$$

$$y_g = Y + \frac{Y^3}{6R^2} + \frac{Y^5}{24R^4} \quad \text{ya da} \quad y_g = R \arctan h\left(\sin\frac{Y}{R}\right)$$

Örnek: Başlangıç noktası ekvatordan olan bir jeodezik dik koordinat sisteminde koordinatları X = 4183627m ve Y = 153728m olan noktanın Gauss-Kruger projeksiyon koordinatlarını bulunuz. (R = 6373394m)

x_g= X = 4183627m
y_g= 153728 + 14.906 + 0.002 = 153742.908 m

5.3.2 Gauss- Kruger Koordinatlarından Jeodezik Dik (Soldner) Koordinatlarının Bulunması

Verilenler: xg, yg
İstenenler: X, Y

$$X = x_g$$

$$Y = y_g - \frac{y_g^3}{6R^2} + \frac{y_g^5}{24R^4} \quad \text{ya da}$$

$$Y = R \arcsin\left(\tanh \frac{y_g}{R}\right)$$

Örnek: Gauss-Kruger koordinatları xg = 4183627 m ve yg = 153742.908 m olan noktanın jeodezik dik koordinatlarını hesaplayınız.

X = xg = 4183627 m

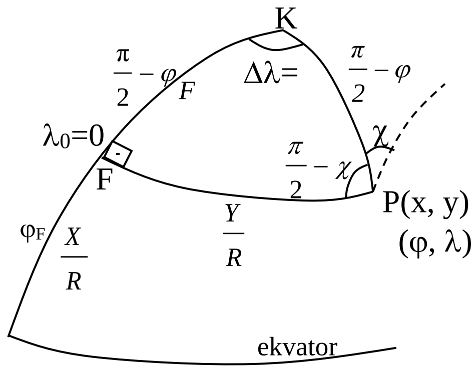
$$Y = y_g - \frac{y_g^3}{6R^2} + \frac{y_g^5}{24R^4}$$

Y = 153742.908m - 14.9105m + 0.0022m
Y = 153727.9997 m = 153728 m

5.4 KÜRESEL COĞRAFİ KOORDİNATLARDAN GAUSS- KRÜGER KOORDİNATLARININ HESABI

Bir P noktasının (φ, λ) küresel coğrafi koordinatları bilinmektedir. Bu noktanın λ_0 boylam başlangıcına göre Gauss- Krüger (x, y) koordinatları istenmektedir. Boylam farkı olarak,

$\lambda = \Delta\lambda = \lambda_P - \lambda_0$



Küresel meridyen sistemi dik koordinatları cinsinden projeksiyon eşitliği,

$$x = X$$

$$y = R \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y}{R}\right)$$

ve

$$X = x$$

$$Y = R \arcsin\left(\tanh \frac{y}{R}\right)$$

Küre üzerinde meridyen sistemi dik koordinatları, coğrafi koordinatlar cinsinden,

$$X = R \arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\cos\lambda}\right)$$

$$Y = R \arcsin(\sin\lambda \cos\varphi)$$

şeklindedir. Bu değerler x ve y'li eşitliklerde yerine konulursa,

$$x = R \arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\cos\lambda}\right)$$

$$y = R \operatorname{arctanh}(\sin\lambda \cos\varphi)$$

olur.

Gauss- Krüger Koordinatlardan Küresel Coğrafi Koordinatların Hesabı

Küresel coğrafi koordinatlar küresel meridyen dik koordinatları cinsinden,

$$\varphi = \arcsin(\sin\frac{X}{R}\cos\frac{Y}{R})$$

$$\lambda = \arctan(\frac{\tan\frac{Y}{R}}{\cos\frac{X}{R}})$$

Gauss- Krüger koordinatları cinsinden,

$$\varphi = \arcsin(\frac{\sin\frac{x}{R}}{\cosh\frac{y}{R}})$$

$$\lambda = \arctan(\frac{\sinh\frac{y}{R}}{\cos\frac{x}{R}})$$

Örnek 1:

Verilenler: Küresel coğrafi koordinatları

$\varphi = 38^{o}\ 12'\ 24.16''$ $\quad \lambda = 31^{o}\ 10'\ 29.22''$ olarak veriliyor.

İstenenler: $\lambda_{o} = 30^{o}$ sistemindeki (x, y) Gauss- Krüger koordinatları

$$R = 6373924.115 \text{ m}$$

$$\lambda = \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 1^{\circ}\ 10'\ 29.22''$$

$$x = R \arctan(\frac{\tan\varphi}{\cos\lambda}) = 4250993.561 \text{ m}$$

$$y = R \text{ arctanh } (\sin\lambda \cos\varphi) = 102695.782 \text{ m}$$

Örnek 2:

Verilenler: Bir noktanın $\lambda_{o} = 30^{o}$ sisteminde Gauss- Krüger koordinatları

x = 4250993.561 m $\qquad$ y = 102695.782 m olarak veriliyor

R = 6373924.115 m

İstenenler: (φ, λ) küresel coğrafi koordinatlar

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{x}{R}}{\cosh\frac{y}{R}}\right) = 38^{\circ}\ 12'\ 24.16''$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{\sinh\frac{y}{R}}{\cos\frac{x}{R}}\right) = 1^{\circ}\ 10'\ 29.22''$$

Gauss -Kruger Projeksiyonunda Uzunluk Deformasyonu

Gauss-Kruger projeksiyonunda her yönde uzunluk deformasyonu eşit olduğundan (açı koruyan) olma özelliği nedeniyle ölçek;

$$m = 1 + \frac{Y^2}{2R^2} + \frac{5Y^4}{24R^4}$$

$$m = 1 + \frac{y_g^2}{2R^2} + \frac{y_g^4}{24R^4}$$

olur.

Projeksiyon yüzündeki kenar her zaman yeryüzündeki karşılığından büyüktür.

$$\delta_s = S - s = -\frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$\delta_s = S - s = -S\frac{y_m^2}{2R^2}$$

Gauss- Kruger Projeksiyonunda (Açıklık Açısı) Doğrultu İndirgemesi

Yeryüzündeki açıklık açısıyla projeksiyon düzlemindeki karşılığı arasındaki farka açıklık açısı redüksiyonu denir ve

$$\delta_t = T - t$$

şeklinde gösterilir.

$$\delta_1 = T_1 - t_1 = \frac{\rho}{4R^2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - \frac{\rho}{12R^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\delta_2 = T_2 - t_2 = \frac{\rho}{4R^2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) - \frac{\rho}{12R^2}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

Bu formüller daha kısa olacak şekilde aşağıdaki gibi tek terimde yazılabilir.

$$\delta_1 = T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) \qquad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\delta_2 = T_2 - t_2 = -\frac{\rho}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2)$$

üzerinde hesap yapılan kenarlar kısa ise redüksiyon bağıntıları daha basit biçime dönüştürülebilir. y_1 ve y_2 yerine bunların ortalama değeri,

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

alınırsa

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{2R^2} y_m \Delta x$$

$$T_2 - t_2 = -\frac{\rho}{2R^2} y_m \Delta x$$

Gauss -Kruger Projeksiyonunda Alan Redüksiyonu

Küre yüzeyindeki F alanı ile projeksiyon yüzeyindeki f alanı arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$$F - f = -f\,\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3R^2}$$

$$F - f = -f\,\frac{y_m^2}{R^2}$$

Gauss -Kruger Projeksiyonunda Jeodezik Temel Ödevlerin Çözümü

I. Jeodezik Temel Ödevin Çözümü

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, T_1 ve S

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

Ordinat koruyan projeksiyonda olduğu gibi Gauss-Kruger projeksiyonda I. Jeodezik temel ödevlerin çözümü için bir iteratif işlem söz konusudur. İşlem adımları;

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$x_1 = X_1$$

$$y_1 = Y_1 + \frac{Y_1^3}{6R^2} + \frac{Y_1^5}{24R^4}$$

$$y_1 = R * \operatorname{arctanh}(\sin\frac{Y_1}{R})$$

2) İndirgeme formülleri için x_2, y_2'nin yaklaşık değerleri hesaplanır.

$$x_2 \cong x_1 + S.\cos T_1$$

$$y_2 \cong y_1 + S.\sin T_1$$

3) s ve t_1 için indirgemeleri ve düzlem değerleri hesaplanır.

$$s = S + \frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2)$$

4) Problem düzlemde çözülür

$$x_2 = x_1 + s.\cos t_1$$

$$y_2 = y_1 + s.\sin t_1$$

Bu adımdan sonra x_2, y_2 değerleri ile 3. adıma dönülerek uzunluk ve doğrultu indirgemeleri formülleri ile s_1 ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır. Eğer değişme yoksa 5. adıma geçilir.

5) T_2 için t_2 değerinden yararlanarak indirgeme formülleriyle değeri hesaplanır.

$$t_2 = t_1 + \pi$$

$$T_2 = t_2 - \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2)$$

6) Projeksiyon kurallarına göre küresel değerlere geçilir.

$$X_2 = x_2$$

$$Y_2 = R\arcsin(\tanh\frac{y_2}{R})$$

Örnek:

Verilenler:

X_1 = -92276.440 m Y_1 = 82130.142 m

$S = 105455.230$ m $\qquad T_1 = 321^o\ 56'\ 06.09''$

İstenenler: X_2, Y_2 ve T_2

$$x_1 = X_1 = -92276.440 \text{ m}$$

$$y_1 = R * \text{arctanh}(\sin \frac{Y_1}{R}) = 82132.415 \text{ m}$$

$$x_2 \cong x_1 + S\cos T_1 = -9250.265 \text{ m}$$

$$y_2 \cong y_1 + S\sin T_1 = 17113.497 \text{ m}$$

$$s = S + \frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$s = S + 3.653 = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2)$$

$$t_1 = T_1 - 12.74''$$

$$t_1 = 321^\circ\ 55'\ 53.35''$$

$$x_2 = x_1 + s\cos t_1 = -9251.405 \text{ m}$$

$$y_2 = y_1 + s\cos t_1 = 17106.116 \text{ m}$$

Bu adımdan sonra son bulunan x_2, y_2 değerleri kullanılarak indirgeme eşitlikleri ile s ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır.

$$s = S + 3.653 \text{ m} = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_1 = T_1 - 12.74'' = 321^\circ\ 55'\ 53.35''$$

yani değerler değişmemiştir. O halde x_2 ve y_2 için yapılan düzlem hesap sonucu bulunan değerler kesin değerlerdir. Son olarak karşı noktadaki semt hesaplanır.

$$t_2 = t_1 + \pi = 141^\circ\ 55'\ 53.35''$$

$$T_2 = t_2 - \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2) = t_2 - 8.17''$$

$$T_2 = 141^\circ\ 55'\ 45.18''$$

istenirse projeksiyon kuralına göre küresel koordinatlar hesaplanır.

$$X_2 = x_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$Y_2 = R\arcsin(\tanh \frac{y_2}{R}) = 17106.096 \text{ m}$$

Gauss- Kruger Projeksiyonda II. Jeodezik Temel Ödevin Çözümü

Verilenler: P_1 (X_1, Y_1), P_2 (X_2, Y_2)

İstenenler: S, T_1 ve T_2

Bu problemlerin çözümünde I. Jeodezik temel ödevinde olduğu gibi iteratif işleme gereksinim duyulmaz. Öncelikle projeksiyon koordinatları hesaplanır. Problem düzlemde çözülür ve elde edilen düzlem hesap sonuçlarından indirgemelerle küresel karşılıklarına geçilir. İşlem adımları aşağıda açıklanmıştır.

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$x_1 = X_1 \qquad y_1 = R \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_1}{R}\right)$$

$$x_2 = X_2 \qquad y_2 = R \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_2}{R}\right)$$

2) Düzlemde II. temel problem çözümü yapılır.

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$t_2 = t_1 \pm \pi$$

3) İndirgemelerle küresel S, T_1 ve T_2 değerlerine geçilir.

$$S = s - \frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2)$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2)$$

Örnek:

Verilenler:

$$X_1 = -92276.440 \text{ m} \qquad X_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$Y_1 = 82130.142 \text{ m} \qquad Y_2 = 17106.096 \text{ m}$$

$$R = 6373924.115 \text{ m}$$

İstenenler: S, T_1 ve T_2

$$x_1 = X_1 = -92276.440 \text{ m}$$

$$y_1 = R \arctan h\,(\sin \frac{Y_1}{R}) = 82132.415 \text{ m}$$

$$x_2 = X_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$y_2 = R \arctan h\,(\sin \frac{Y_2}{R}) = 17106.116 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$t_1 = \arctan(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = 321^o\ 55'\ 53.35''$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_2 = t_1 + \pi = 141^o\ 55'\ 53.35''$$

$$S = s - \frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$S = s - 3.653 \text{ m} = 105455.230 \text{ m}$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) = t_1 + 12.74'' = 321^o\ 56'\ 06.09''$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2) = t_2 - 8.17'' = 141^o\ 55'\ 45.18''$$

5.5 Ordinat Koruyan ve Gauss- Krüger Projeksiyonların Karşılaştırılması

Küresel dik koordinatlardan hareket edildiğinde ordinat koruyan projeksiyon büyük kolaylık sağlar. Çünkü küresel dik koordinatlarla projeksiyon koordinatları aynı sayısal değerlere eşittir. Bu kolaylık sebebiyle ordinat koruyan projeksiyon geçen yüzyılda geniş kullanım alanı bulmuştur. İndirgemeler açısından karşılaştırıldığında durum şöyledir [16]:

Uzunluk İndirgemesi

Ordinat koruyan projeksiyonda; $S - s = -\frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\cos^2 t_1$

Gauss- Krüger projeksiyonunda; $S - s = -\frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$

Görüldüğü gibi her iki formülün yapısı da aynı fakat Gauss- Krüger projeksiyonunda *cos²t* çarpanı yoktur. Bu demektir ki Gauss- Krüger projeksiyonundaki uzunluk indirgemesi her zaman için ordinat koruyan projeksiyonundakinin maksimumudur. Buna karşılık Gauss- Krüger

projeksiyonunda uzunluk indirgemesi doğrultudan bağımsız olduğu için daha basit şekilde hesaplanır.

1 km'lik bir küresel kenar Gauss- Krüger projeksiyonunda,

y = 90 km için $\rightarrow$ 10 cm
y = 125 km için $\rightarrow$ 20 cm
y = 200 km için $\rightarrow$ 50 cm uzamış olur.

Alan İndirgemesi

Ordinat koruyan projeksiyonda; $F - f = -\frac{f}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$

Gauss- Krüger projeksiyonunda; $F - f = -\frac{f}{3R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$

Formüllerden görüldüğü gibi ordinat koruyan projeksiyondaki alan indirgemesi Gauss- Krüger projeksiyonundakinin yarısı kadardır. Ancak her iki projeksiyonda da bu indirgeme büyüklükleri kabul edilen hata sınırlarının altında kalır. Bu sebepten dolayı sadece çok büyük alanların hesabında bu indirgemeler dikkate alınır.

Doğrultu İndirgemesi

Ordinat koruyan projeksiyonda;

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x\,(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)\sin t_1 \cos t_1$$

Gauss- Krüger projeksiyonunda;

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x\,(2y_1 + y_2)$$

görüldüğü gibi ordinat koruyan projeksiyonda büyük değer ikinci terimdedir. Gauss- Krüger projeksiyonunda bu terim yoktur. O halde Gauss- Krüger projeksiyonunda doğrultu indirgemesi özellikle kısa kenarlarda daha küçük olmaktadır.

Kürede I. jeodezik temel problemlerin hem ordinat koruyan hem de Gauss-Krüger projeksiyonla çözümünde küresel sonuçlar yani P_2 noktasının küresel dik koordinatları ve T_2 semti her iki yöntemde aynı olup,

X_2 = -9251.405 m
Y_2 = 17106.096 m
$T_2 = 141^{o}\ 55'\ 45.18''$

değerleri bulunmuştur. Fakat hesap adımları içinde ara değerleri her iki projeksiyon türündeki düzlem s, y_2, t_1 ve t_2 değerleri farklıdır. Çünkü bu düzlem değerlerin karşılıkları ile ilişkilerini sağlayan indirgeme formülleri farklıdır.

Değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Ordinat koruyan projeksiyon	**Gauss- Krüger projeksiyon**
s	105457.494 m	105458.883 m
t_1	$321^{o}\ 55'\ 56.82''$	$321^{o}\ 55'\ 53.55''$
y_2	17106.096 m	17106.116 m
x_2	Her ikisinde de aynıdır (x = X)	