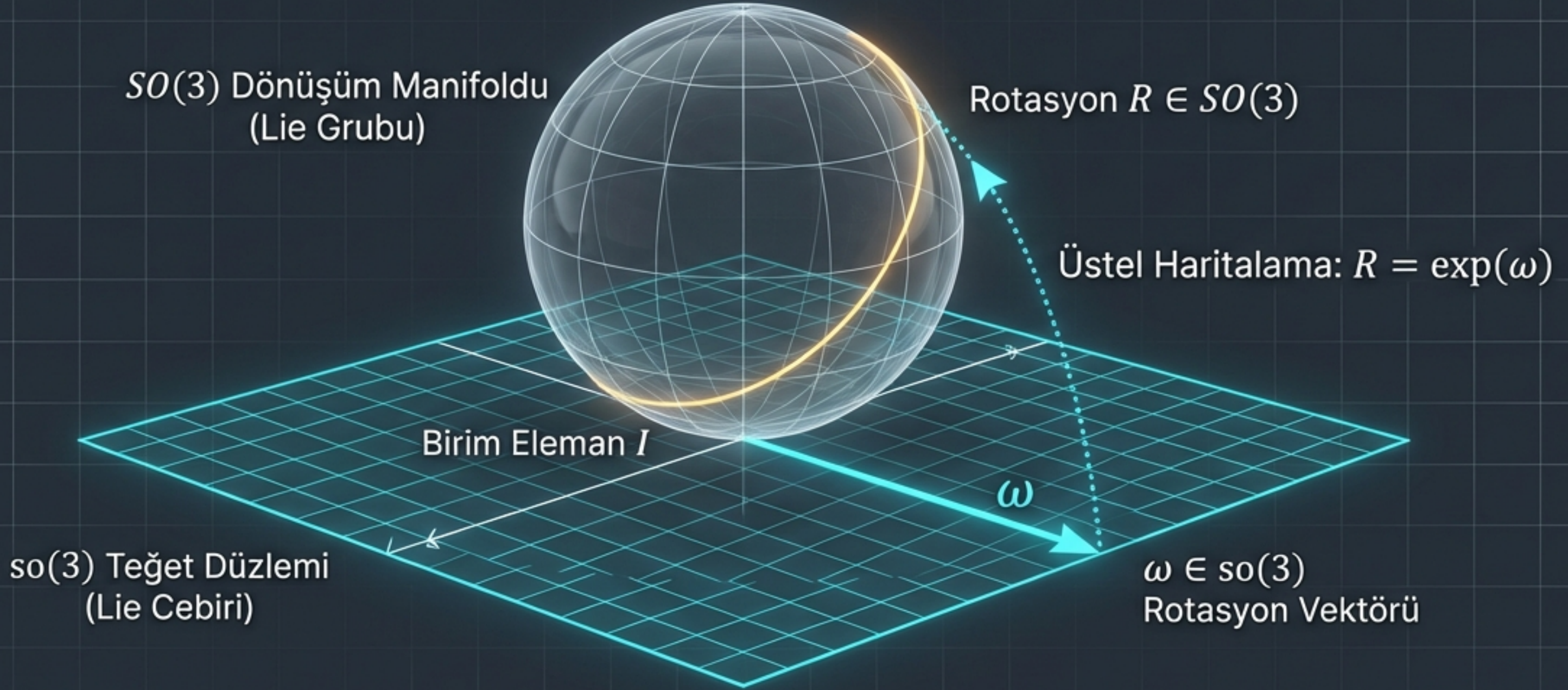


Üstel Haritalama ve Rodrigues Formülü

$\mathfrak{so}(3)$ ve $SO(3)$ Arasındaki Geometrik ve Cebirsel Köprü

Rotasyon vektörlerinin (ω) sürekli ve doğrusal olmayan rotasyon matrisleri manifolduna (R) eşlenmesinin adım adım matematiksel türetimi. Hartley & Zisserman, Ek 4.3 temel alınmıştır.

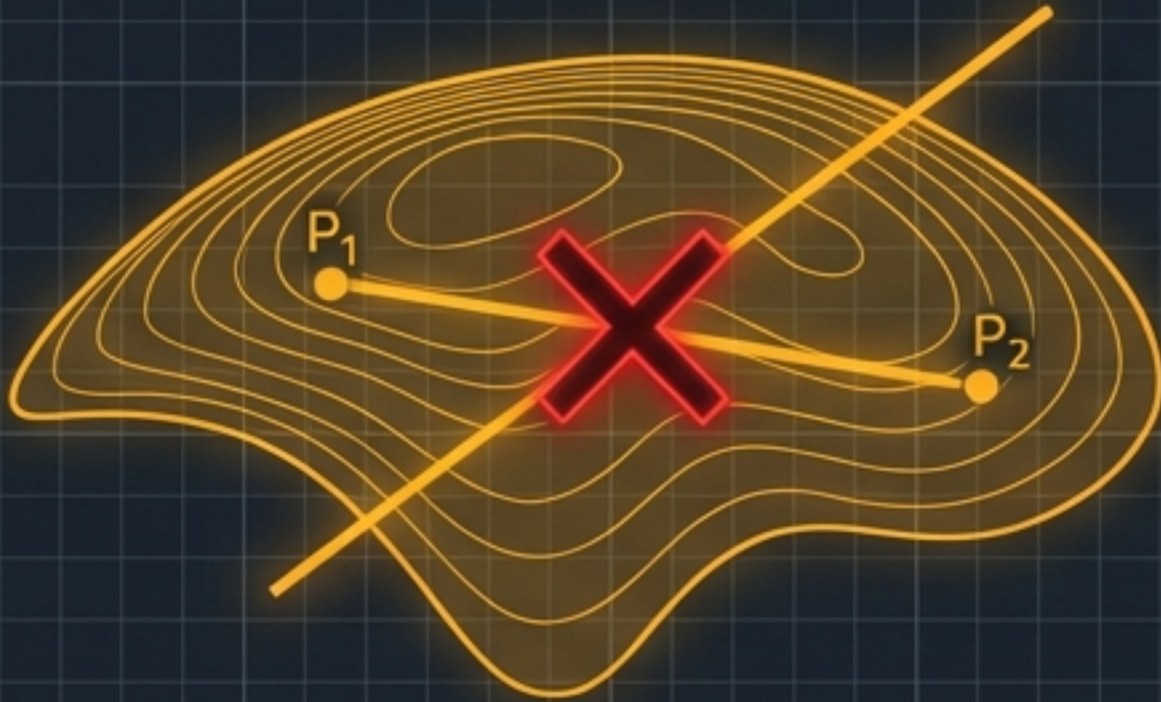


Optimizasyon İçin Neden Üstel Haritalamaya İhtiyaç Duyarız?

Doğrusal Olmayan Dünyalar

$$R^T R = I$$
$$\det(R) = +1$$

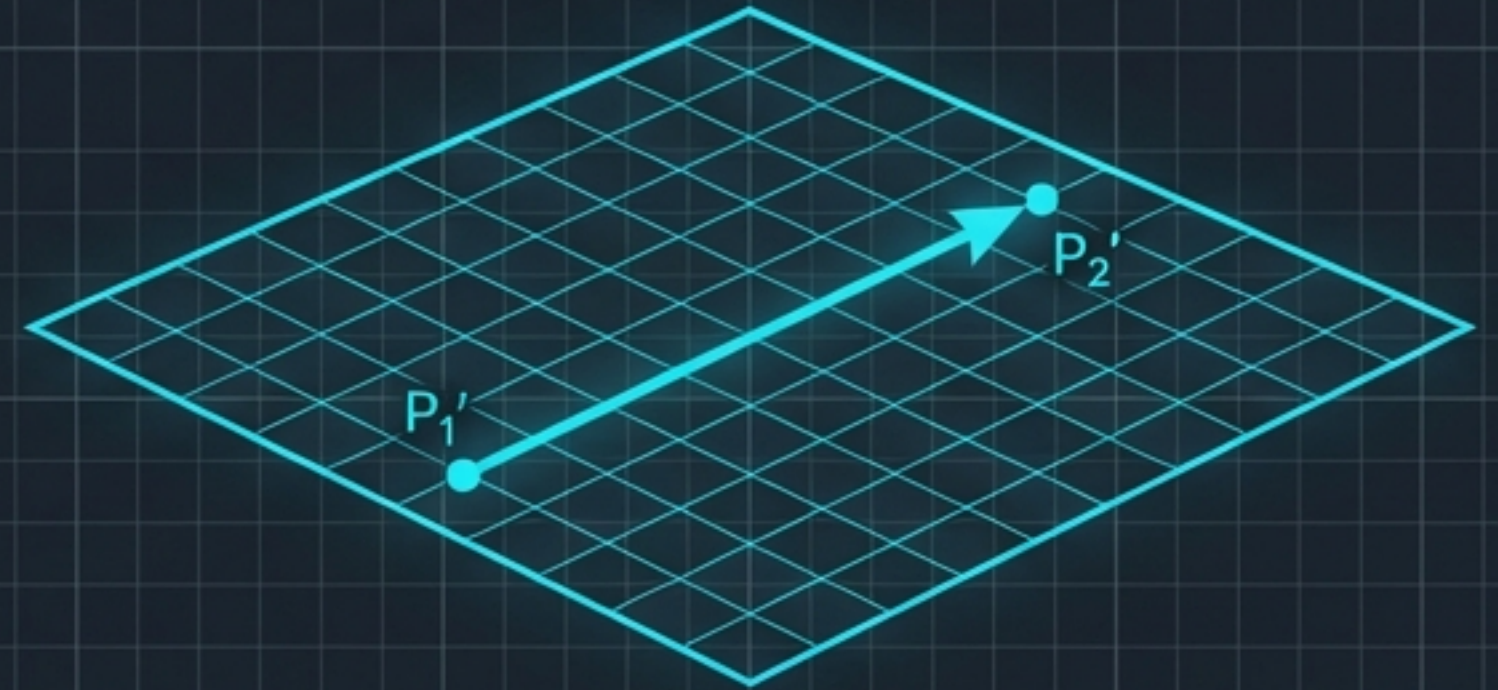
$SO(3)$ grubu bir manifolddur. Doğrusal kısıtlamalar içerdiği için üzerinde standart türev alma veya toplama işlemleri yapılamaz ($R_1 + R_2 \notin SO(3)$).



Doğrusal Teğet Uzayı

Dönme vektörü $\omega \in \mathbb{R}^3$

Vektör uzayıdır. Gradient descent, bundle adjustment ve interpolasyon gibi işlemler için idealdir. (Not: Rijit öteleme t ile karışmaması için ω kullanılmıştır).



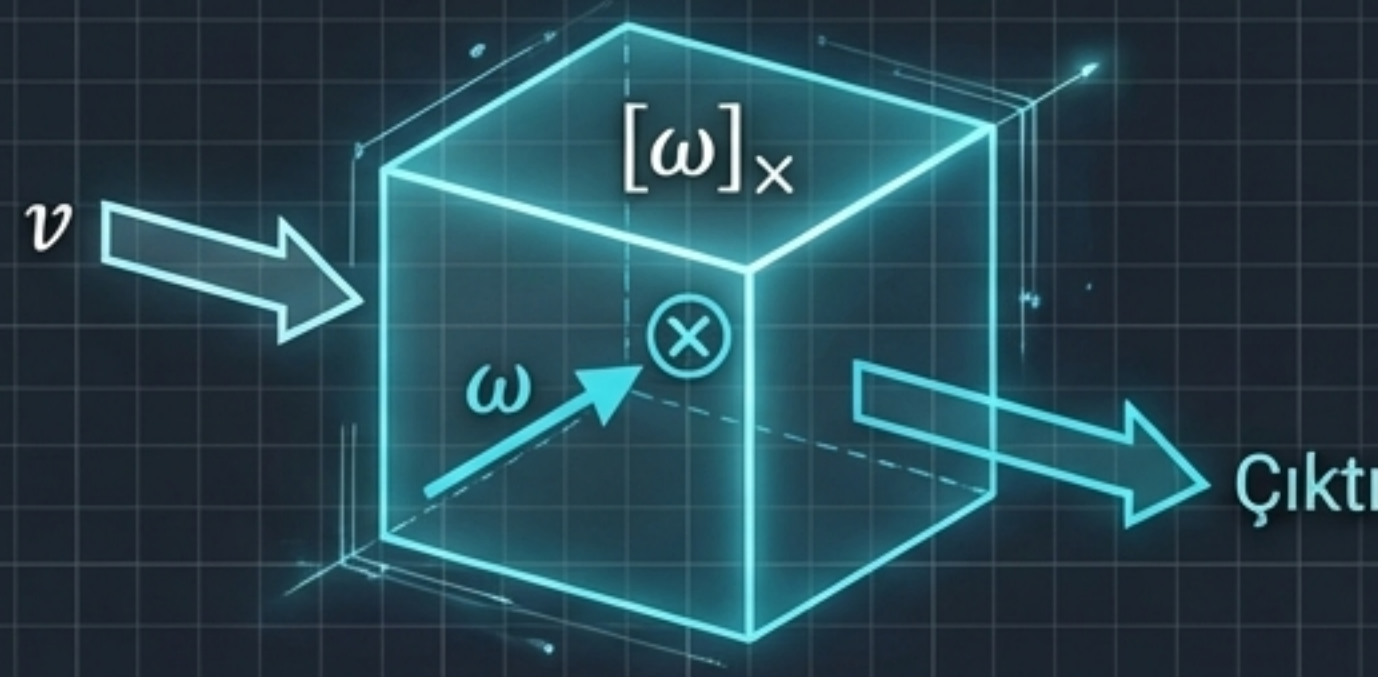
İki Uzayın Matematiksel Anatomisi:

$SO(3)$ ve $so(3)$

	Lie Grubu: $SO(3)$ (Geometri)	Lie Cebiri: $so(3)$ (Cebir)
Elemanlar	Rotasyon Matrisleri (R)	Skew-Simetrik Matrisler ($[\omega]_{\times}$)
Uzay Yapısı	Doğrusal Olmayan Eğrisel Manifold	Düz ve Doğrusal Vektör Uzayı ($\mathbb{R}^3$)
Kısıtlamalar	$R^T R = I, \det(R) = 1$	$[\omega]_{\times}^T = -[\omega]_{\times}$
Temel İşlem	Matris Çarpımı ($R_1 R_2$)	Komütatör / Çapraz Çarpım ($\omega_1 \times \omega_2$)
Geçiş Haritası	$\leftarrow \log(R)$ (Logaritma)	$\exp([\omega]_{\times}) \rightarrow$ (Üstel Haritalama)

Dönüşüm Motoru: Skew-Simetrik Matrisler ve $[\omega]_{\times}$ Operatörü

Bir vektörel çapraz çarpım işlemi ($\omega \times v$), bir matris çarpımı olarak ifade edilebilir: $\omega \times v \equiv [\omega]_{\times} v$



Eğer $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ ise:

$$[\omega]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temel Özellik: Anti-simetri şartını sağlar: $[\omega]_{\times}^T = -[\omega]_{\times}$

Lie Cebirinden Gruba Geçiş: Matris Üsteli (Matrix Exponential)

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümünden bildiğimiz skaler Taylor serisi, matrisler için de genelleştirilebilir.

Genel Tanım:

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k$$

Operatöre Uygulanması ($X = [\omega]_{\times}$):

$$R = \exp([\omega]_{\times}) = I + [\omega]_{\times} + \frac{1}{2!}[\omega]_{\times}^2 + \frac{1}{3!}[\omega]_{\times}^3 + \dots$$

Problem: Sınırsız sayıda 3×3 matris çarpımını hesaplamak hesaplamalı olarak imkansızdır. Bu seriyi nasıl indirgeyebiliriz?

Dönme Vektörünün Ayırıştırılması: Eksen ve Açı

$\omega \in \mathbb{R}^3$ vektörü, sadece bir doğru yönü değil, aynı zamanda o yön etrafında ne kadar döneleceğini de kodlar.

$$\omega = \theta n$$

$\theta = \|\omega\|$ (Rotasyon açısı, skaler büyüklük)

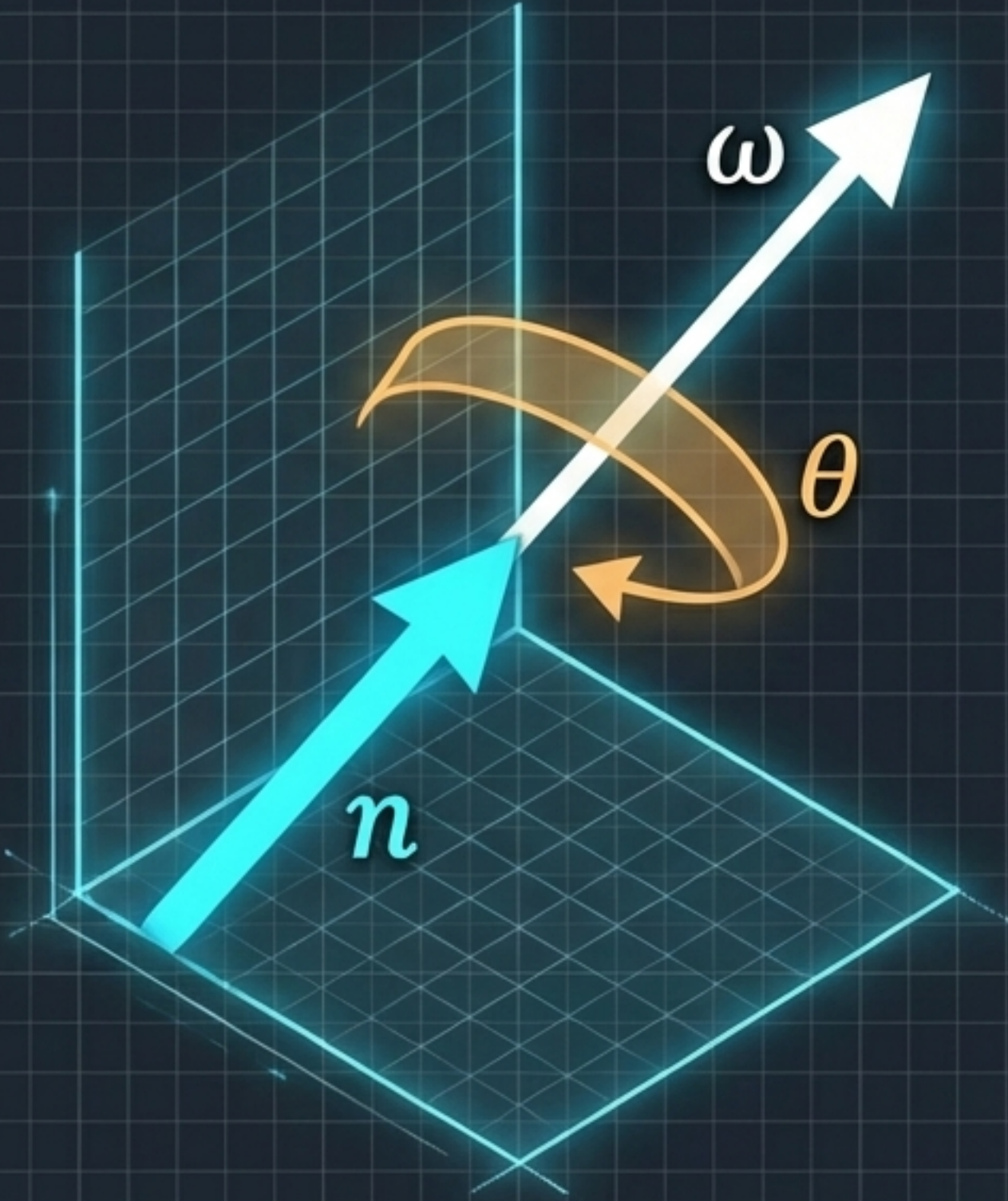
$n = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ (Rotasyon eksenini, birim vektör, $\|n\| = 1$)

Operatör Etkisi: Skew-simetrik operatör doğrusaldır, bu nedenle skaler dışarı alınabilir:

$$[\omega]_{\times} = [\theta n]_{\times} = \theta [n]_{\times}$$

Yeni Seri Hedefi:

Artık serimiz $e^{\theta [n]_{\times}}$ halini almıştır. Hedefimiz birim eksen $[n]_{\times}$ 'in matris kuvvetlerini (powers) analiz etmektir.



Sihirli İndirgeme: Birim Eksen İçin Çevrimsel Özellik

Teorem:

$\mathbf{n}$ bir birim vektör ($\mathbf{n}^T \mathbf{n} = 1$) ise,

$$[\mathbf{n}]_{\times}^3 = -[\mathbf{n}]_{\times}$$

İspat Adımları:

1. Karesi: $[\mathbf{n}]_{\times}^2 = \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}$
2. $[\mathbf{n}]_{\times}$ ile çarp: $[\mathbf{n}]_{\times}^3 = [\mathbf{n}]_{\times}(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I})$
3. Dağıtma: $[\mathbf{n}]_{\times}^3 = [\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{n}\mathbf{n}^T - [\mathbf{n}]_{\times}$
4. $[\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ olduğu için ilk terim sıfırlanır.
5. Sonuç: $[\mathbf{n}]_{\times}^3 = -[\mathbf{n}]_{\times}$



Geometrik Anlam: Bir vektöre aynı eksen etrafında üç kez çapraz çarpım uygulamak, onu başlangıçtaki negatif durumuna döndürür.

Sonsuzluğun Sınırlandırılması: Serideki Terimlerin İndirgenmesi

$$\text{İndirgeme Kuralı: } [n]_x^3 = -[n]_x$$

Matris Kuvvetleri k

$$k=1 \Rightarrow [n]_x \quad k=2 \Rightarrow [n]_x^2$$

$$k=3 \Rightarrow [n]_x^3 = -[n]_x \quad k=4 \Rightarrow [n]_x^4 = -[n]_x^2 \quad k=5 \Rightarrow [n]_x^5 = [n]_x \quad k=6 \Rightarrow [n]_x^6 = [n]_x^2$$

Temel Çıkarım: Sonsuz matris kuvvetleri, yalnızca iki matris bazında salınımın yapar: $[n]_x$ (Tek kuvvetler) ve $[n]_x^2$ (Çift kuvvetler).

Üstel Serinin Yeniden Düzenlenmesi (Tek ve Çift Kuvvetler)

Asıl serimize dönelim ve $X = \theta[n]_x$ koyup indirgeme kurallarını uygulayalım:

Identity Terimi: I

$$R = I + \theta[n]_x + \frac{\theta^2}{2!} [n]_x^2 - \frac{\theta^3}{3!} [n]_x - \frac{\theta^4}{4!} [n]_x^2 + \frac{\theta^5}{5!} [n]_x + \dots$$

Tek Kuvvetler Bloğu ($[n]_x$ çarpanı):

$$\left[+ \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) [n]_x \right]$$

Çift Kuvvetler Bloğu ($[n]_x^2$ çarpanı):

$$\left[+ \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots \right) [n]_x^2 \right]$$

Taylor Serisi Eşleşmeleri ve Beklenmedik Geometri

Kalkülüsten bildiğimiz standart Maclaurin Serilerini hatırlayalım:

$$\left[\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \right]$$

Doğrudan $[n]_{\times}$
matrisinin
skaler katsayısı!

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\left[\left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots \right) \right]$$

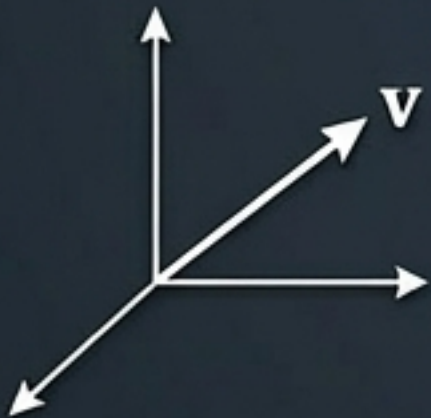
Doğrudan $[n]_{\times}^2$
matrisinin
skaler katsayısı!

$$(1 - \cos(\theta)) = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

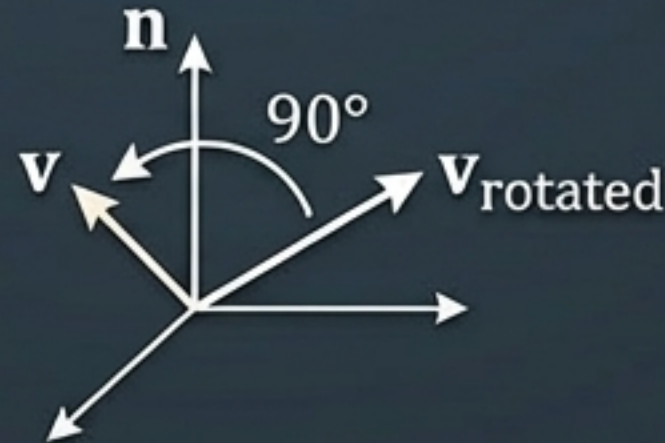
Saf Geometrik Şıklık: Rodrigues Formülü

$$R = I + \sin \theta [n]_{\times} + (1 - \cos \theta) [n]_{\times}^2$$

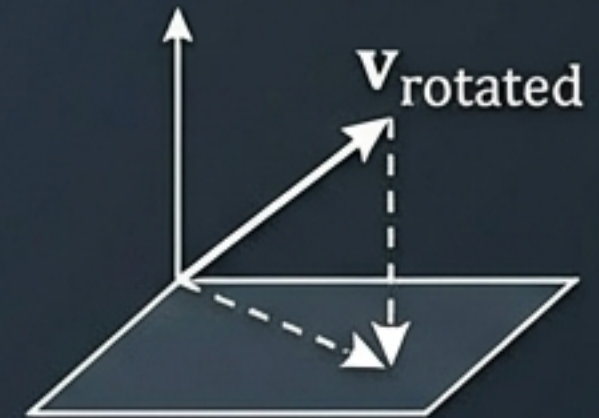
I (Birim Matris)
Hiçbir şey yapma. Eksene
paralel bileşeni korur.



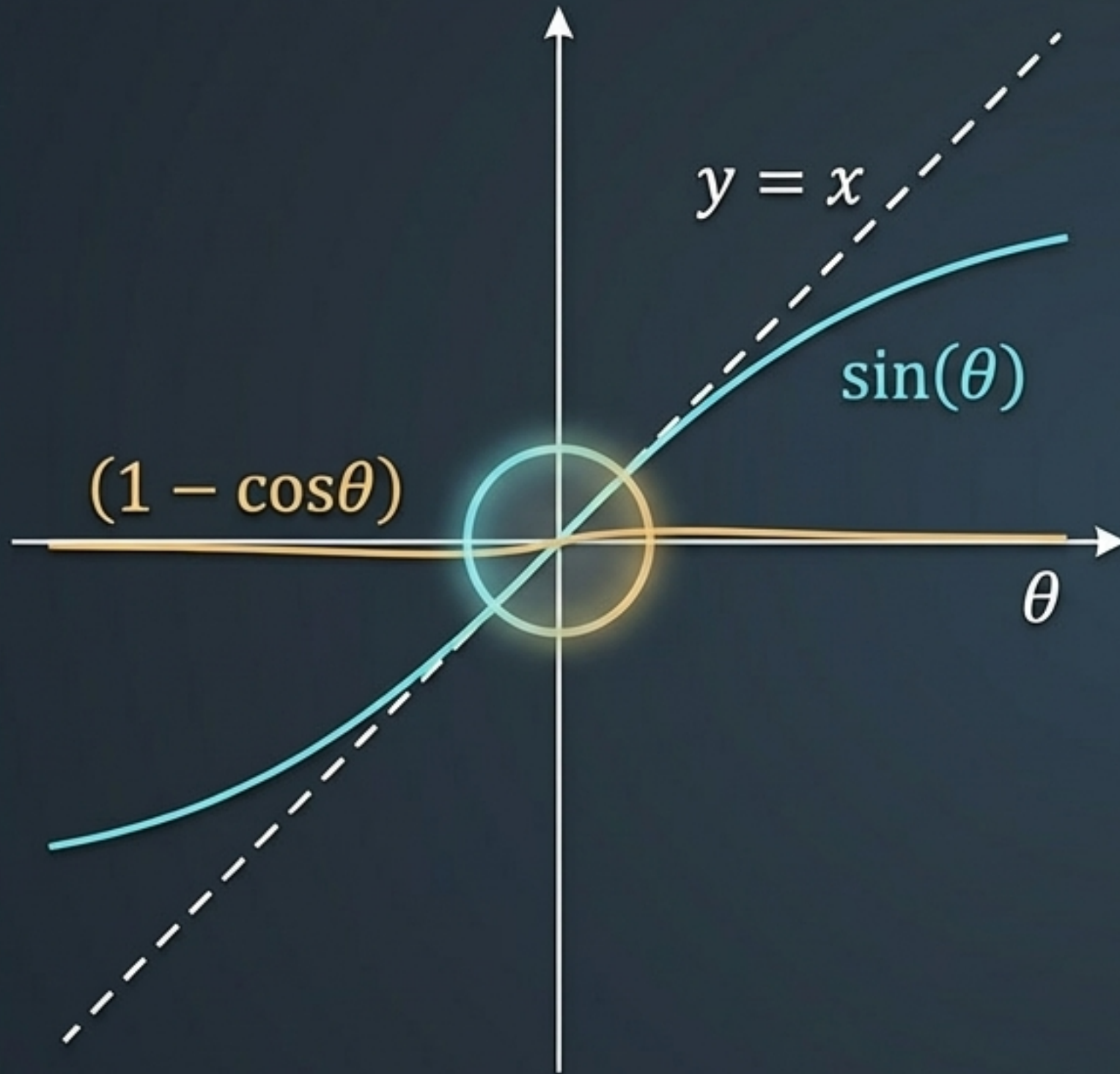
Çapraz Çarpım Terimi
Dik düzlemdeki rotasyonun
birinci bileşeni.



İzdüşüm Terimi
Rotasyon sonrası oluşan
eksenel sapmanın düzeltilmesi.



Pratik Uygulama: Küçük Rotasyonlar İçin Lineerleştirme



Optimizasyon algoritmalarında (ör. Gauss-Newton, Bundle Adjustment), $\theta \rightarrow 0$ varsayımı yapılır.

Küçük Açı Yaklaşımları (Taylor 1. Derece):

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$(1 - \cos \theta) \approx 0 \text{ (İkinci dereceden, yutulur)}$$

Lineerleştirilmiş Formül:

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \theta [\mathbf{n}]_{\times} \Rightarrow \mathbf{R} \approx \mathbf{I} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times}$$

Neden Önemli?

Manifold üzerindeki karmaşık rotasyon, başlangıç noktası etrafında tamamen lineer bir toplama işlemine dönüşür.

Ters Dönüşüm (Logaritma) I: Açığı Geri Kazanmak

Soru: Bize bir $\mathbf{R} \in SO(3)$ verilirse, θ açısını nasıl geri elde ederiz? $\log(\mathbf{R})$ işlemi.

R_{11}	R_{12}	R_{13}
R_{21}	R_{22}	R_{23}
R_{31}	R_{32}	R_{33}

Trace (İz)

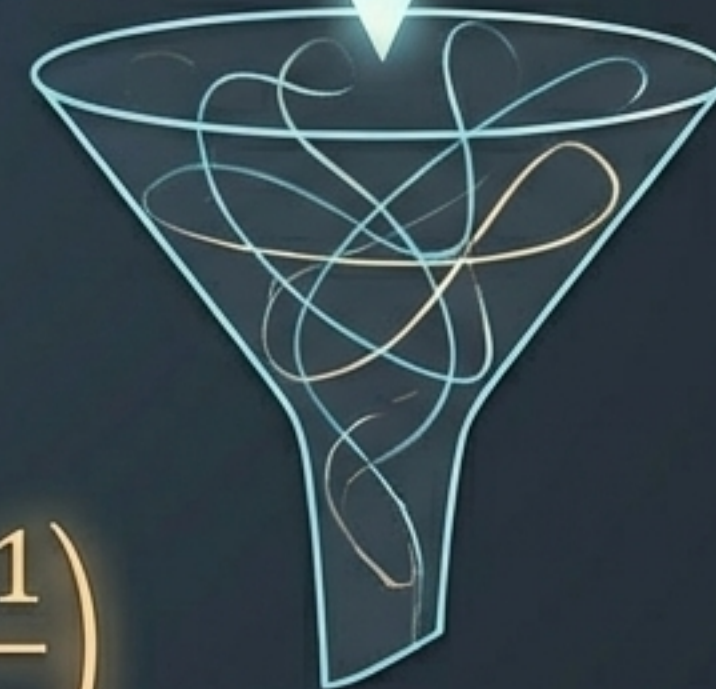
Rodrigues formülünün izini aldığımızda:

$$\text{Tr}(\mathbf{R}) = \text{Tr}(\mathbf{I}) + \sin\theta \text{Tr}([\mathbf{n}]_{\times}) + (1 - \cos\theta) \text{Tr}([\mathbf{n}]_{\times}^2)$$

Bilinenler: $\text{Tr}(\mathbf{I}) = 3$, $\text{Tr}([\mathbf{n}]_{\times}) = 0$, ve $\text{Tr}([\mathbf{n}]_{\times}^2) = -2$

$$\text{Tr}(\mathbf{R}) = 3 + 0 - 2(1 - \cos\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right)$$



Ters Dönüşüm (Logaritma) II: Eksen Geri Kazanmak

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}$$

Rodrigues formülünün transpozu alınarak kendisinden çıkartılması, simetrik terimleri ($\mathbf{I}$ ve $[\mathbf{n}]_{\times}^2$) yok eder.

Anti-Simetrik Bileşen:
 $\mathbf{R} - \mathbf{R}^T = 2 \sin \theta [\mathbf{n}]_{\times}$

Eksen Çözümü (Eğer θ biliniyorsa):

$$[\mathbf{n}]_{\times} = \frac{1}{2 \sin \theta} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)$$

$$= \begin{pmatrix} \text{[Empty]} & -(R_{12} - R_{21}) & -(R_{13} - R_{31}) \\ R_{21} - R_{12} & \text{[Empty]} & -(R_{23} - R_{32}) \\ R_{31} - R_{13} & -(R_{32} - R_{23}) & \text{[Empty]} \end{pmatrix}$$



Kritik Tekillik (Singularity): $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ durumlarında $\sin \theta = 0$ olur ve tanımsızlaşır. Bu noktalarda limit veya özvektör analizleri gereklidir.

Büyük Sentez: Manifold ve Teğet Uzayı Arasındaki Kusursuz Döngü

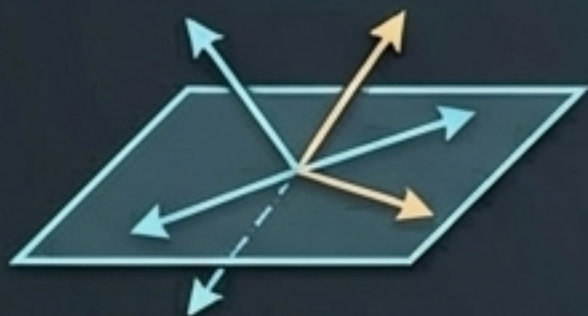
Üstel Haritalama (Exponential Map)

$$\exp([\omega]_{\times})$$

Araç: Rodrigues Formülü

Teğet Uzayı /
Lie Algebra $\mathfrak{so}(3)$

$$\omega \in \mathbb{R}^3$$



Kavisli Manifold /
Lie Group

$$R \in SO(3)$$



Logaritma Haritası (Logarithm Map)

$$\log(R)$$

Araç: İz (Trace) ve Anti-simetrik Çözümleme

Bu eşlemeler, Çoklu Görünüm Geometrisi (Multiple View Geometry), SLAM algoritmaları ve kinematik sistemlerdeki modern optimizasyonun cebirsel temelini oluşturur.