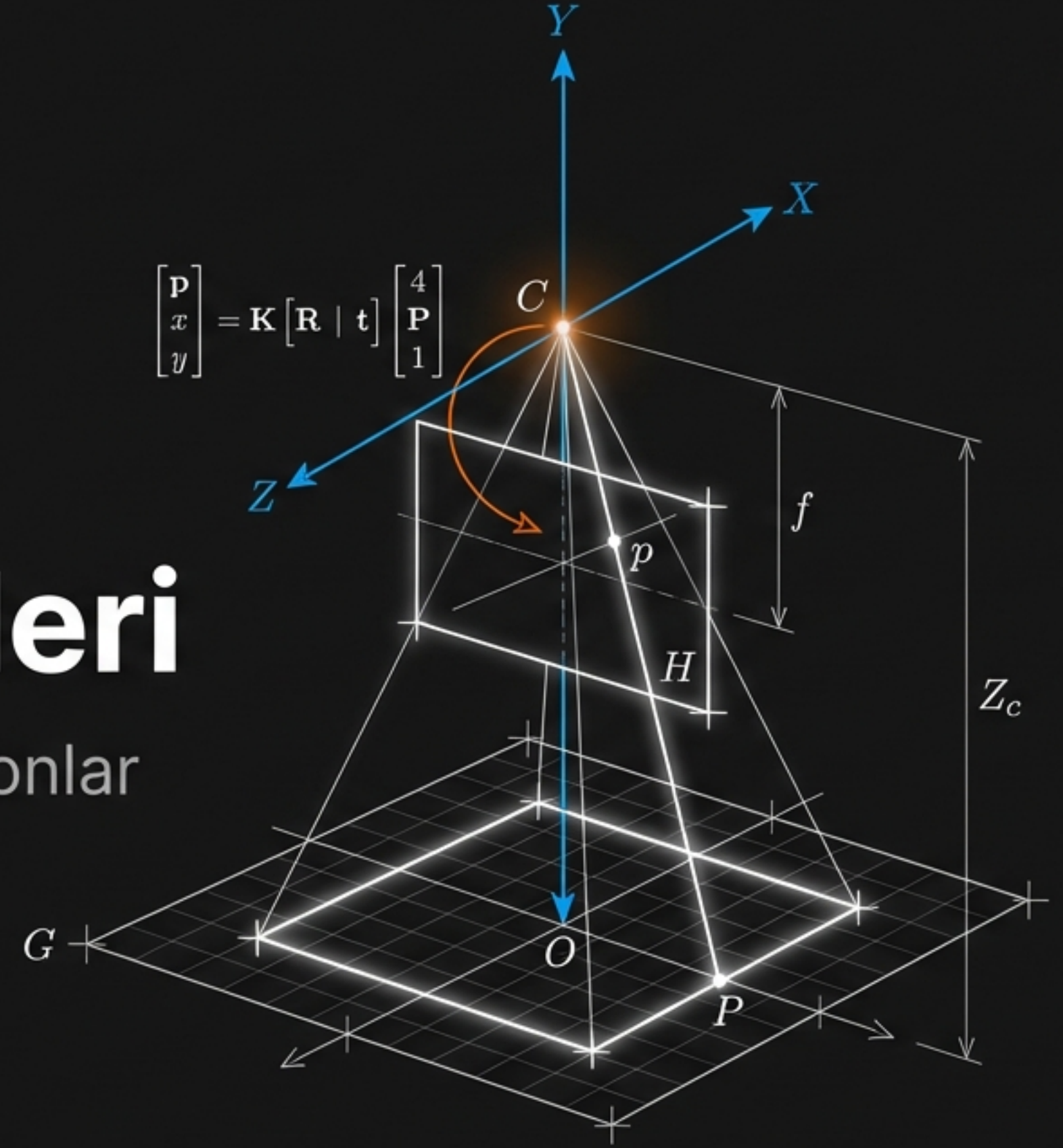
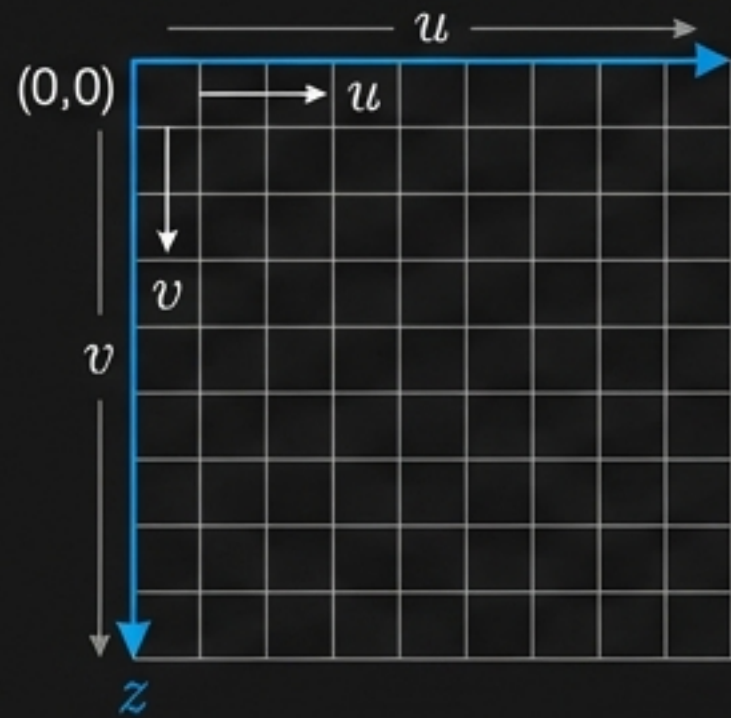


# Fotogrametrik Matematik Temelleri

Koordinat Sistemleri ve Transformasyonlar



# 5 Coordinate System of Photogrammetry



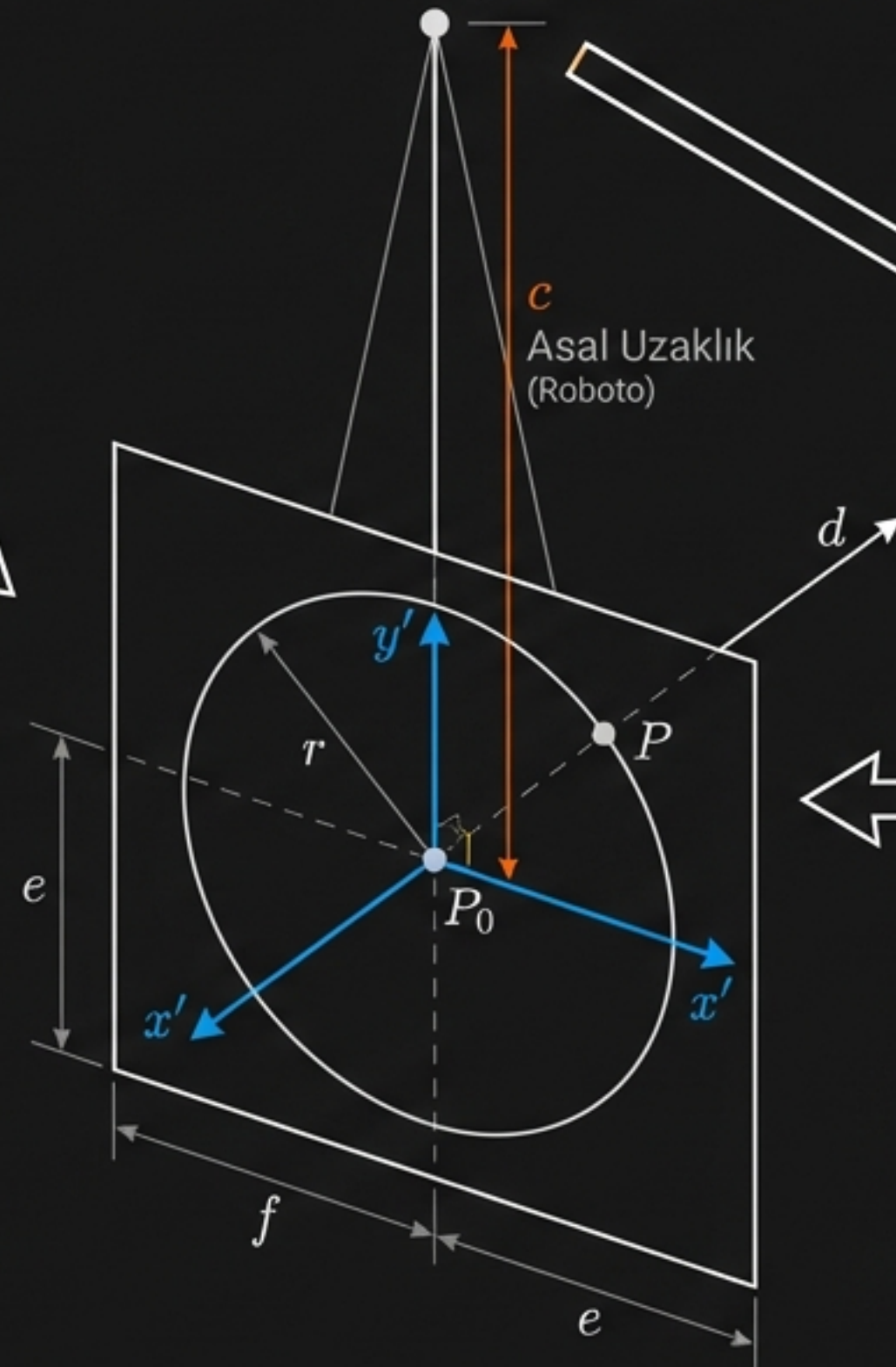
**Piksel Sistemi (S)**

**Kamera Sistemi (K)**  
( $P_0$ , Computer Modern)

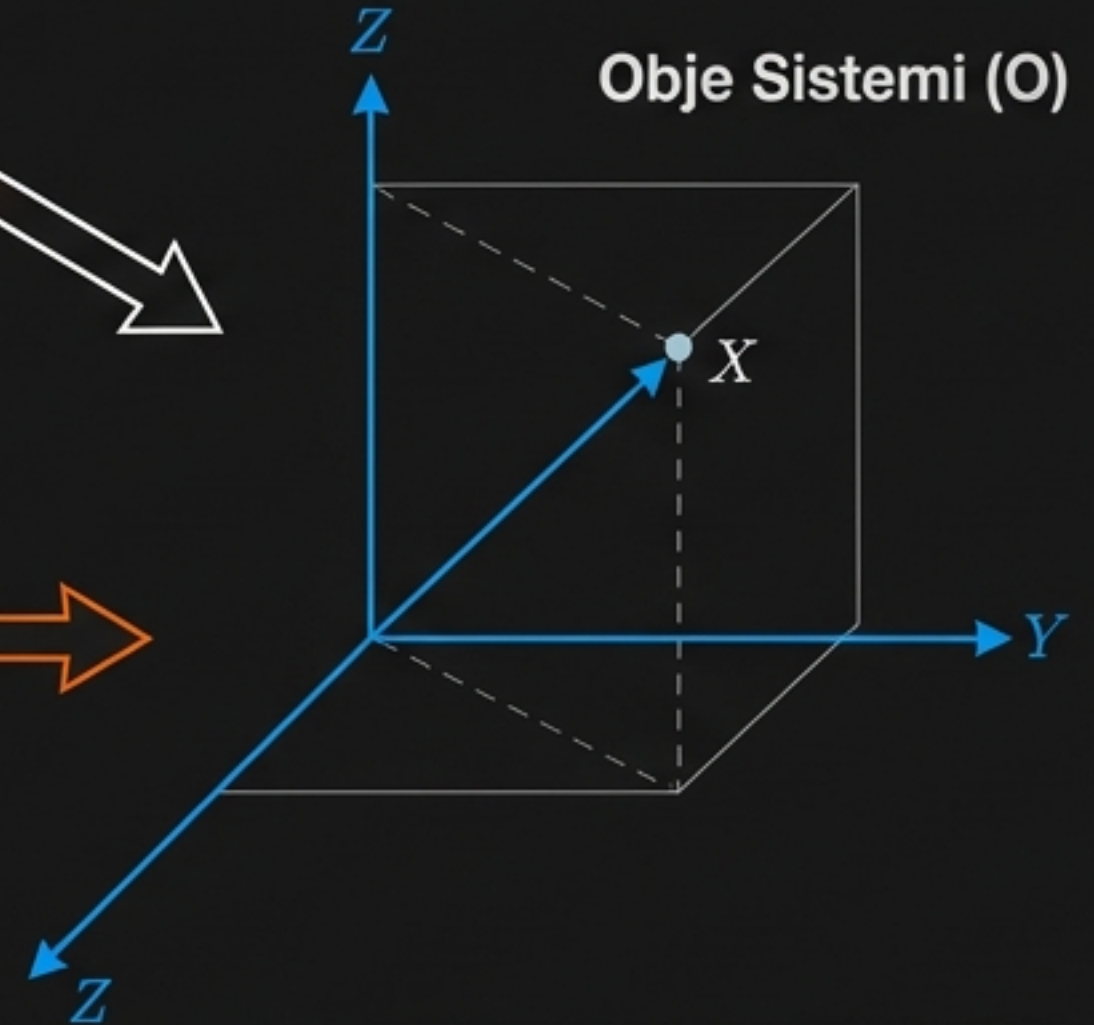
( $P_0$ , Computer Modern)

$c$   
Asal Uzaklık  
(Roboto)

**Görüntü Sistemi (I)**



**Obje Sistemi (O)**



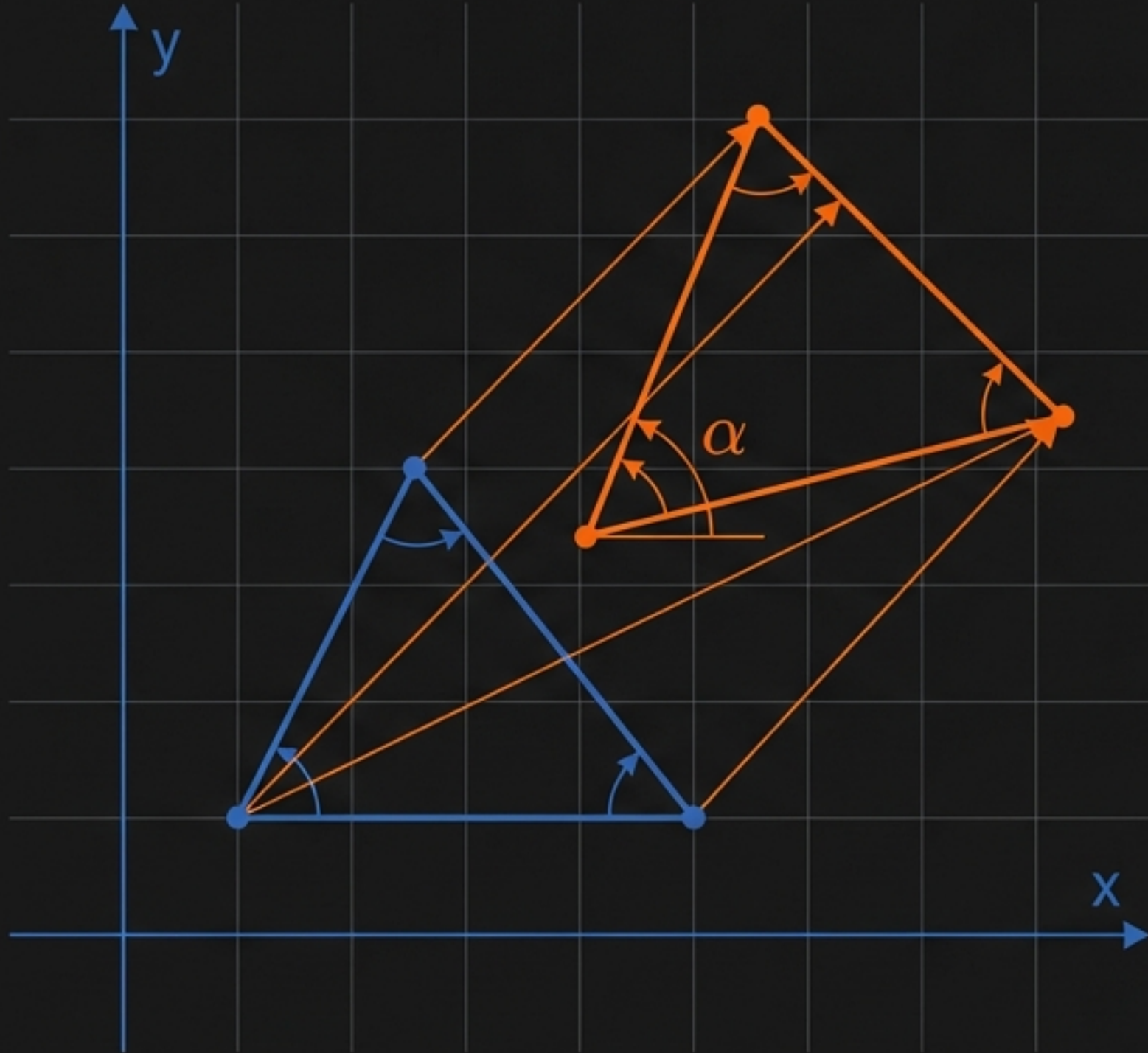
$$M = \begin{bmatrix} x_0 & y & x_{rsts} \\ 1 & -u_0 & x_{3,u} \\ 0 & v & x \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos r & x \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & u_u & c_{pD} & 0 \\ 0 & v & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

Görüntü Koordinatları:  $x', y'$   
Asal Uzaklık:  $c$   
Obje Koordinatları:  $X, Y, Z$

## 2B Benzerlik Dönüşümü (Similarity)



$$x' = \lambda(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + x_0$$

$$y' = \lambda(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + y_0$$

Bilinmeyenler: 4 adet

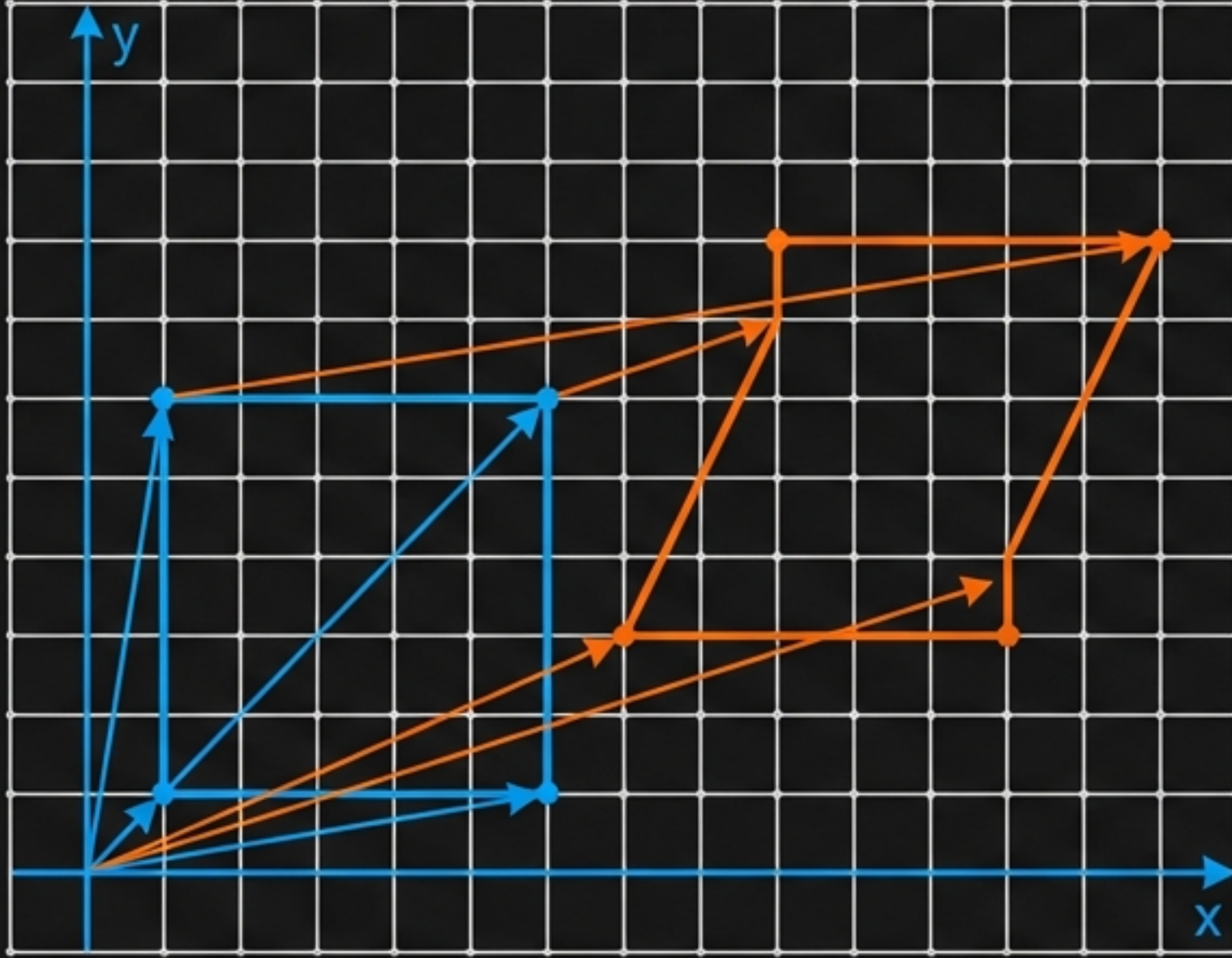
$x_0, y_0$ : Öteleme

$\lambda$ : Ölçek faktörü

$\alpha$ : Dönüklük açısı

Açıları korur (Conformal). Şekil bozulmaz, sadece ölçeklenir ve döner.

# 2B Afin Dönüşümü (Affine)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

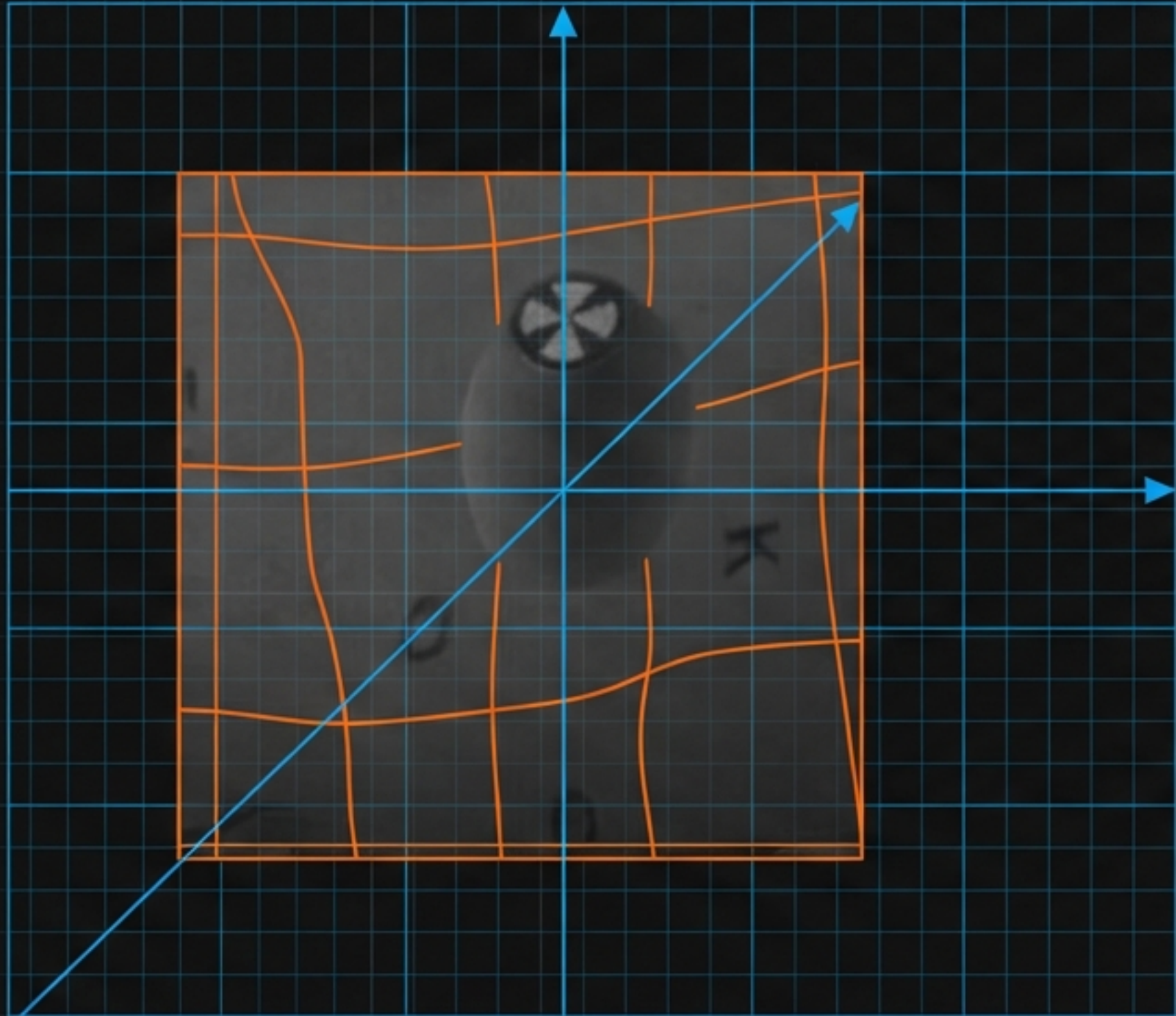
Bilinmeyenler: 6 adet

Farklı ölçek faktörleri ( $m_x \neq m_y$ )

Eksen diklik bozukluğu (Shear)

Uygulama: Sensör deformasyonları,  
tarayıcı hataları.

# 2B Projektif Dönüşüm (Projective)



$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1}$$




$$y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1}$$

Bilinmeyenler: 8 adet

Doğrular korunur, paralellik korunmaz.

Not: Homografya (Homography) -  
Düzlemden düzleme izdüşüm.

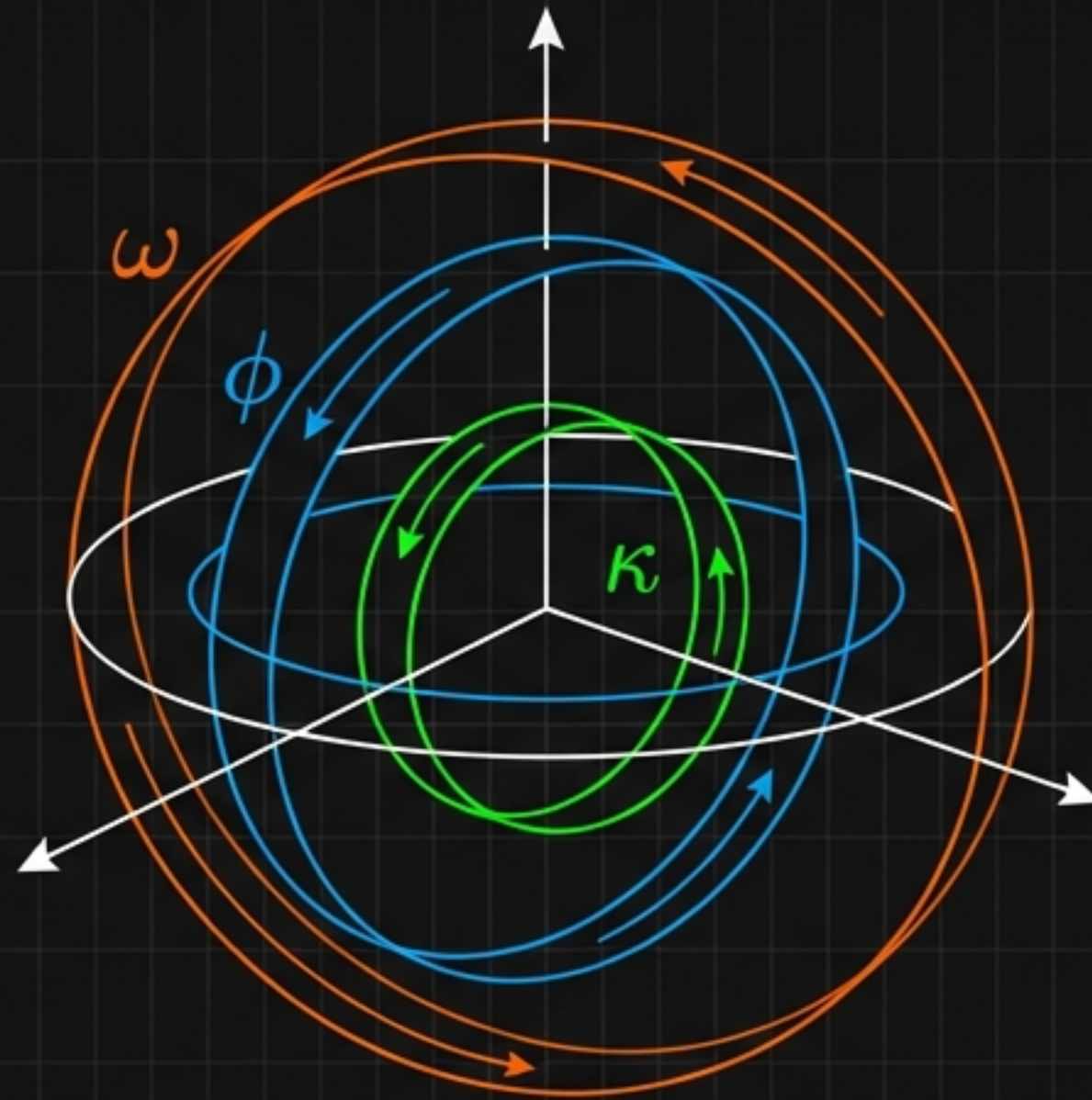
# Dönüşüm Sentezi ve Doğrusal Gözlem Denklemleri

<b>Benzerlik</b>	4 Parametre   Açı Korunur   Rijit	
<b>Afin</b>	6 Parametre   Parallellik Korunur   Afin bozulma	
<b>Projektif</b>	8 Parametre   Doğrusallık Korunur   Perspektif bozulma	

$$L = A \cdot x$$

Matris Rankı artışı = Serbestlik derecesi (DOF) artışı

# Uzaysal Dönüklükler: Euler Açıları ( $\omega$ , $\phi$ , $\kappa$ )



1.  $R_\omega$  (Birincil - X ekseni)
2.  $R_\phi$  (İkincil - Y ekseni)
3.  $R_\kappa$  (Üçüncül - Z ekseni)

$$R = R_\kappa \cdot R_\phi \cdot R_\omega$$

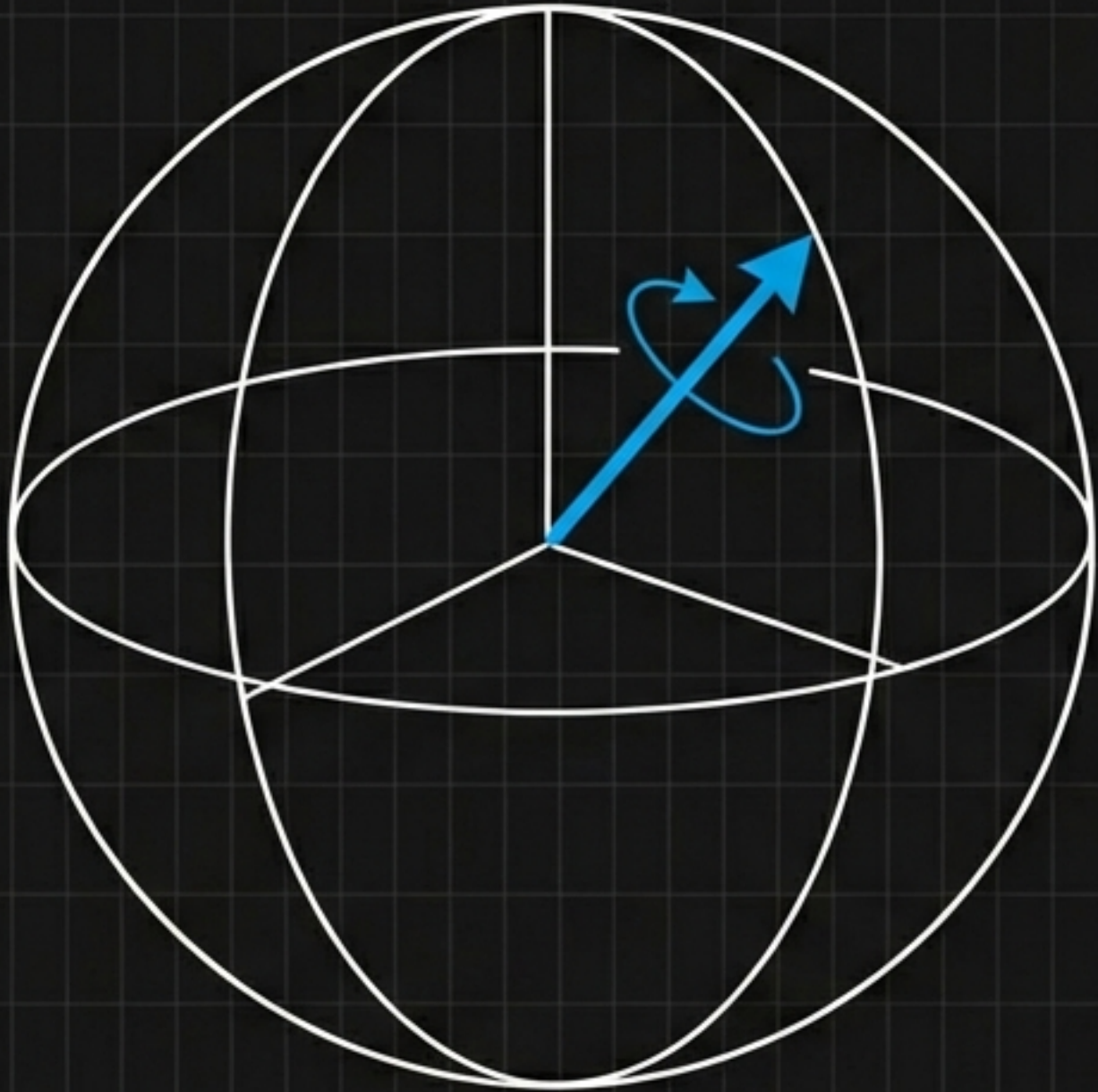
# Tam Dönüklük Matrisi ( $R$ )

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \phi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \phi \cos \kappa \\ -\cos \phi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \phi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \phi \sin \kappa \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{bmatrix}$$

Ortogonal Matris:  $R^T = R^{-1}$

Determinant = 1

# Alternatif Yöneltilme: Kuaterniyonlar (Quaternions)



Euler Sorunu: Tekillik (Gimbal Lock) riski ( $\cos \phi = 0$ ).

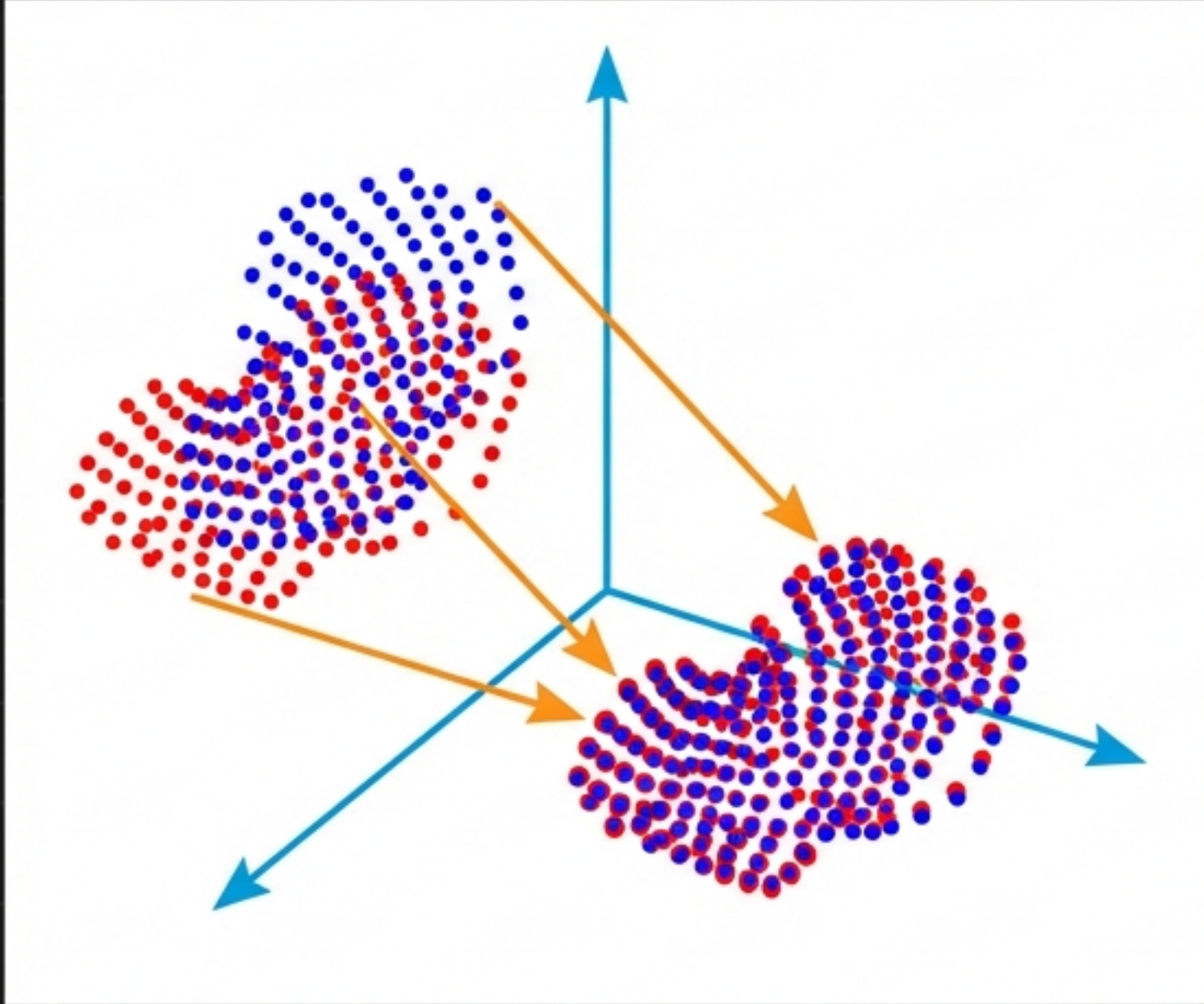
Çözüm: 4 Parametrelili cebirsel yaklaşım.

Parametreler:  $q_0, q_1, q_2, q_3$

Kısıt (Constraint):  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

Avantaj: Trigonometrik hesaplama yok, yüksek hız.

# 3B Uzaysal Benzerlik (Helmert) Dönüşümü

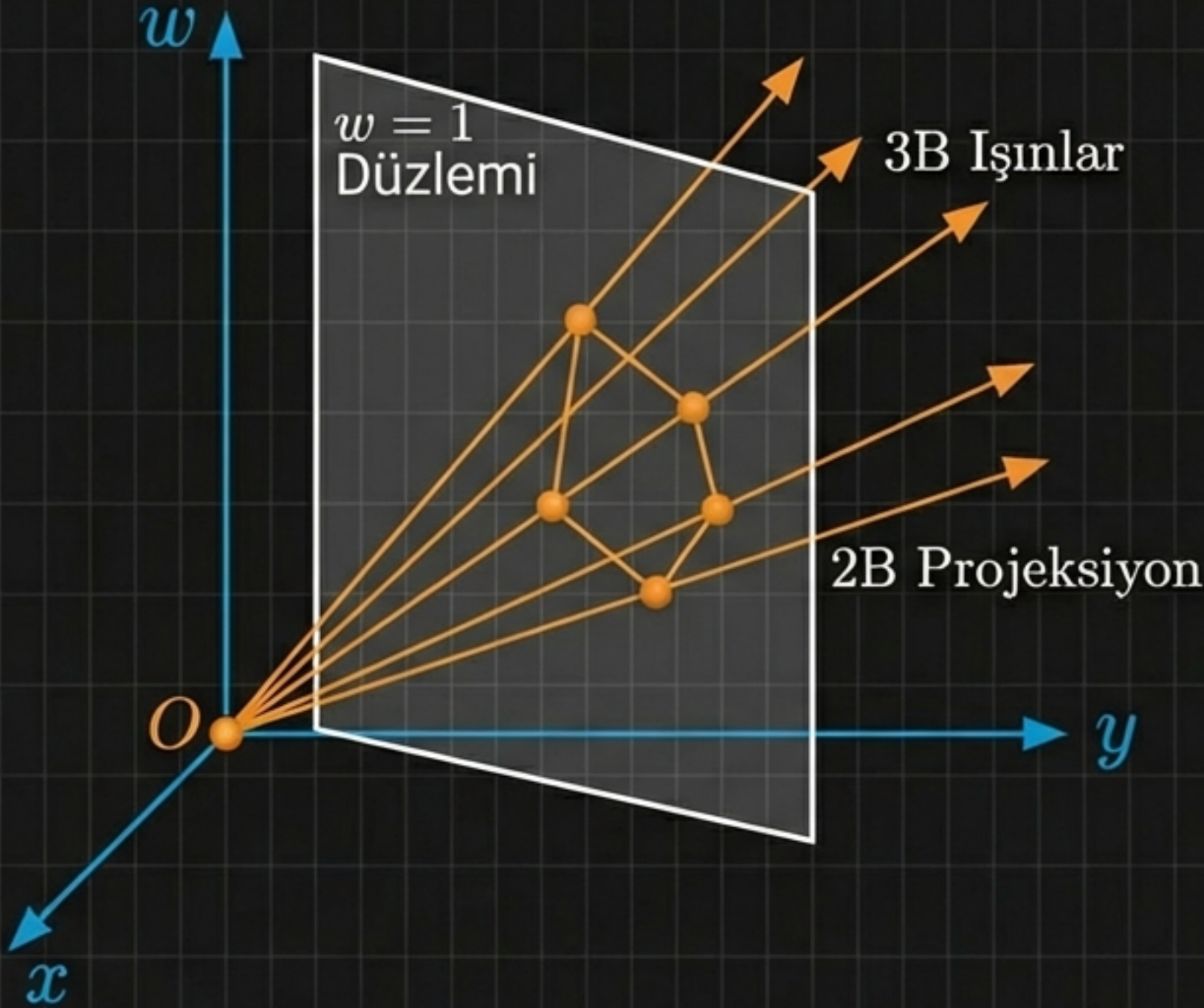


$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mu \cdot R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix}$$

- 3 Öteleme ( $T_X, T_Y, T_Z$ )
- 3 Dönüklük ( $\omega, \phi, \kappa$ )
- 1 Ölçek ( $\mu$ )

Kullanım: Datum dönüşümü ve mutlak yönelme.

# Homojen Koordinatlar



Konsept:  $n$  boyutlu uzayın  $n + 1$  boyutta temsili.

Notasyon:

- Öklid:  $(x, y, z)$
- Homojen:  $(x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w)$

Avantaj: Öteleme (Translation) işleminin matris çarpımı haline gelmesi.

# Birleşik Matris Formülasyonu

$$x = P \cdot X$$

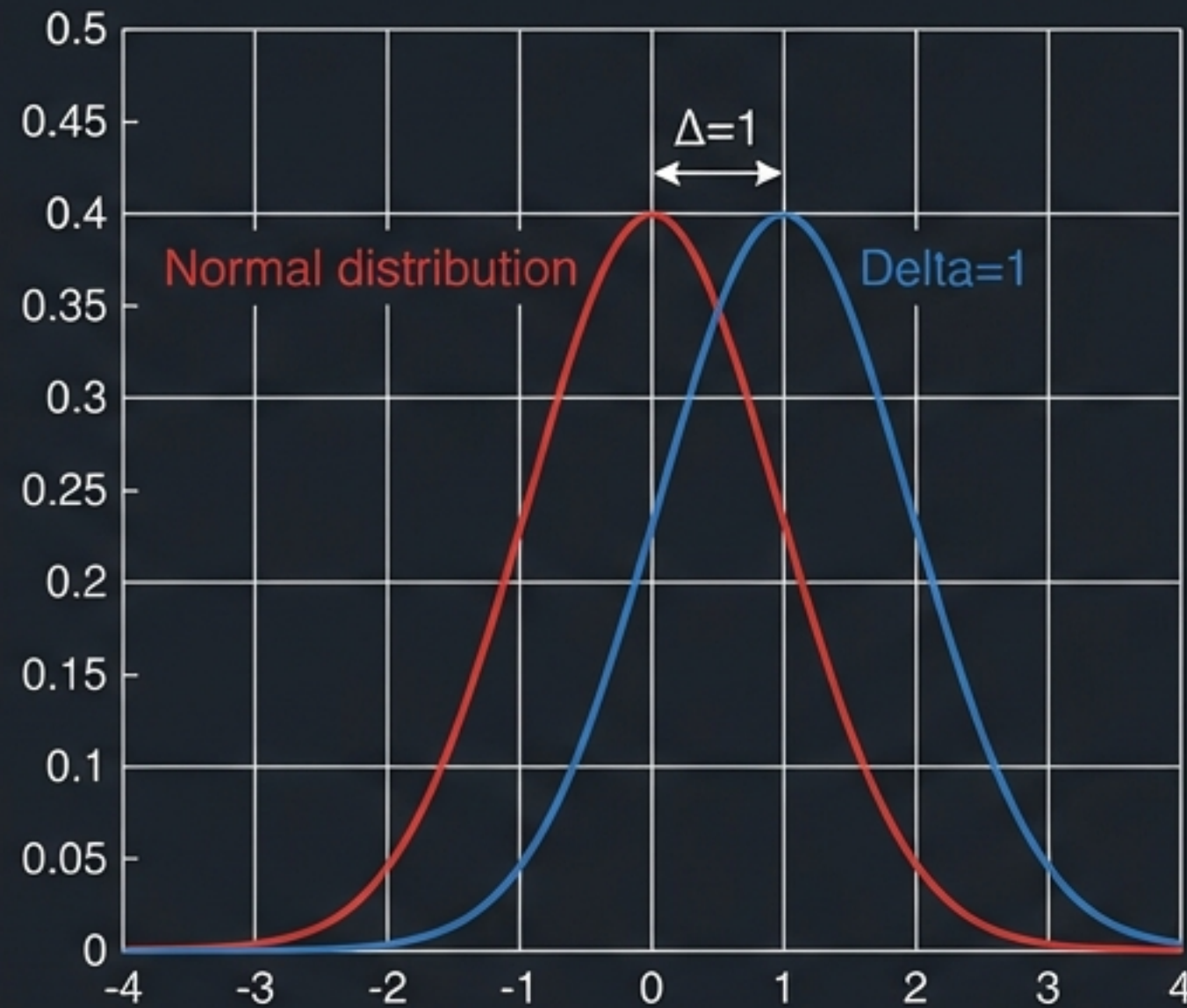
$$P = K \cdot [R \mid t]$$

İç Yöneltilme Matrisi  
(Kamera Kalibrasyonu)

Dış Yöneltilme  
(Rotasyon ve Öteleme)

Piksel koordinatlarından dünya koordinatlarına geçişin tek matrisle ifadesi.

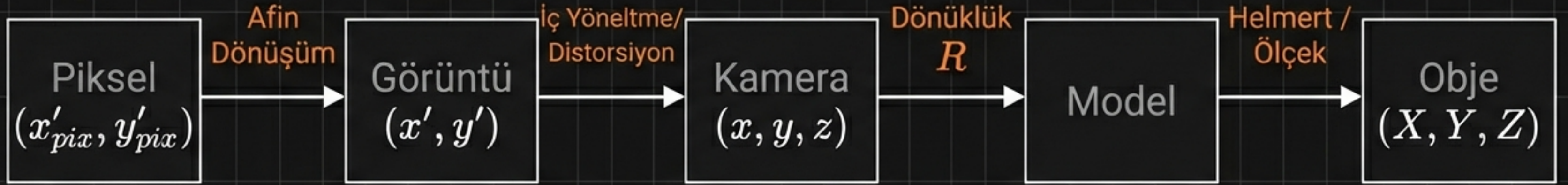
# Hata Teorisi ve Stokastik Model



- Varyans-Kovaryans Matrisi ( $Q_{xx}$ )
- Doğruluk (Accuracy) vs. Hassasiyet (Precision)
- Güven Aralığı (Confidence Interval)

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}$$

# Özet: Matematiksel İş Akışı



**Bu zincir, fotogrametrik rekonstrüksiyonun omurgasıdır.**

# Kaynakça

Luhmann, T., Robson, S., Kyle, S., & Boehm, J. (2014).  
Close-Range Photogrammetry and 3D Imaging. De Gruyter.  
Chapter 2: Mathematical Fundamentals.

Görseller ve denklemler kaynak materyalden uyarlanmıştır.