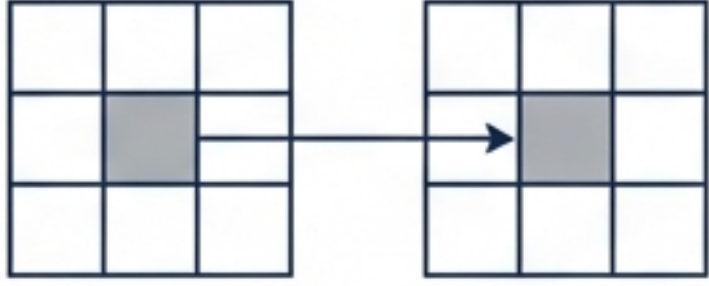


Geometrik Görüntü Dönüşümleri ve Yeniden Örnekleme

Ayrık Uzayda Matematiksel Modeller ve İleri Morfolojik Yaklaşımlar

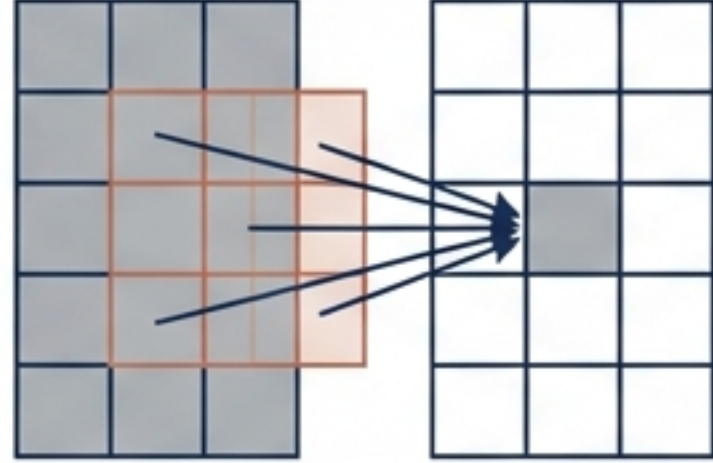
Operasyonel Mantık: Geometrik Bağımlılığın Tanımı

Piksel Operasyonları



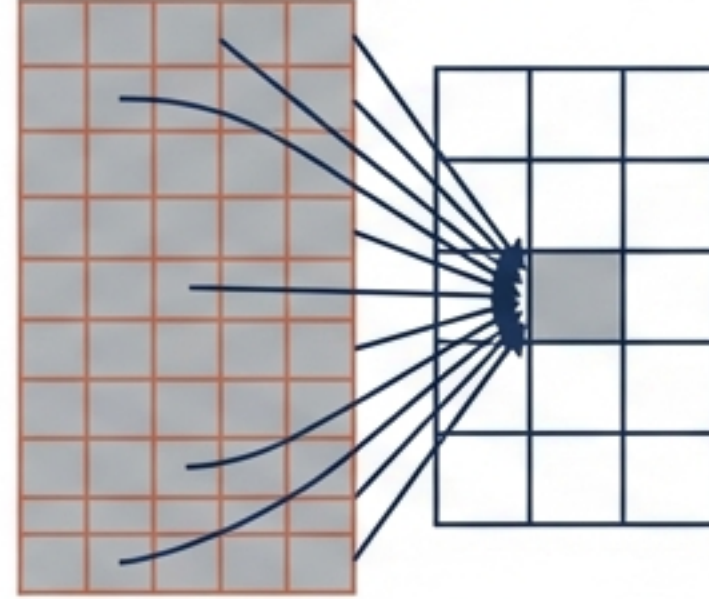
Çıktı, yalnızca aynı konumdaki girdi pikseline bağlıdır (Örn: Eşikleme).

Lokal Operasyonlar



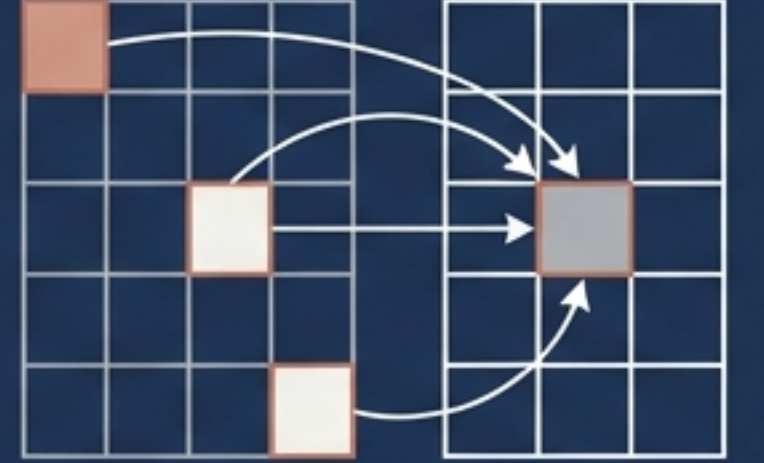
Çıktı, belirli bir komşuluk bölgesine bağlıdır (Örn: Kenar tespiti).

Global Operasyonlar



Çıktı, görüntüdeki tüm piksellerin bir fonksiyonudur.

Geometrik Operasyonlar



Çıktı, yalnızca matematiksel bir geometrik dönüşümle tanımlanan spesifik girdi piksellerine uzamsal olarak bağlıdır.

Uzamsal Dönüşümün Matris Formalizmi

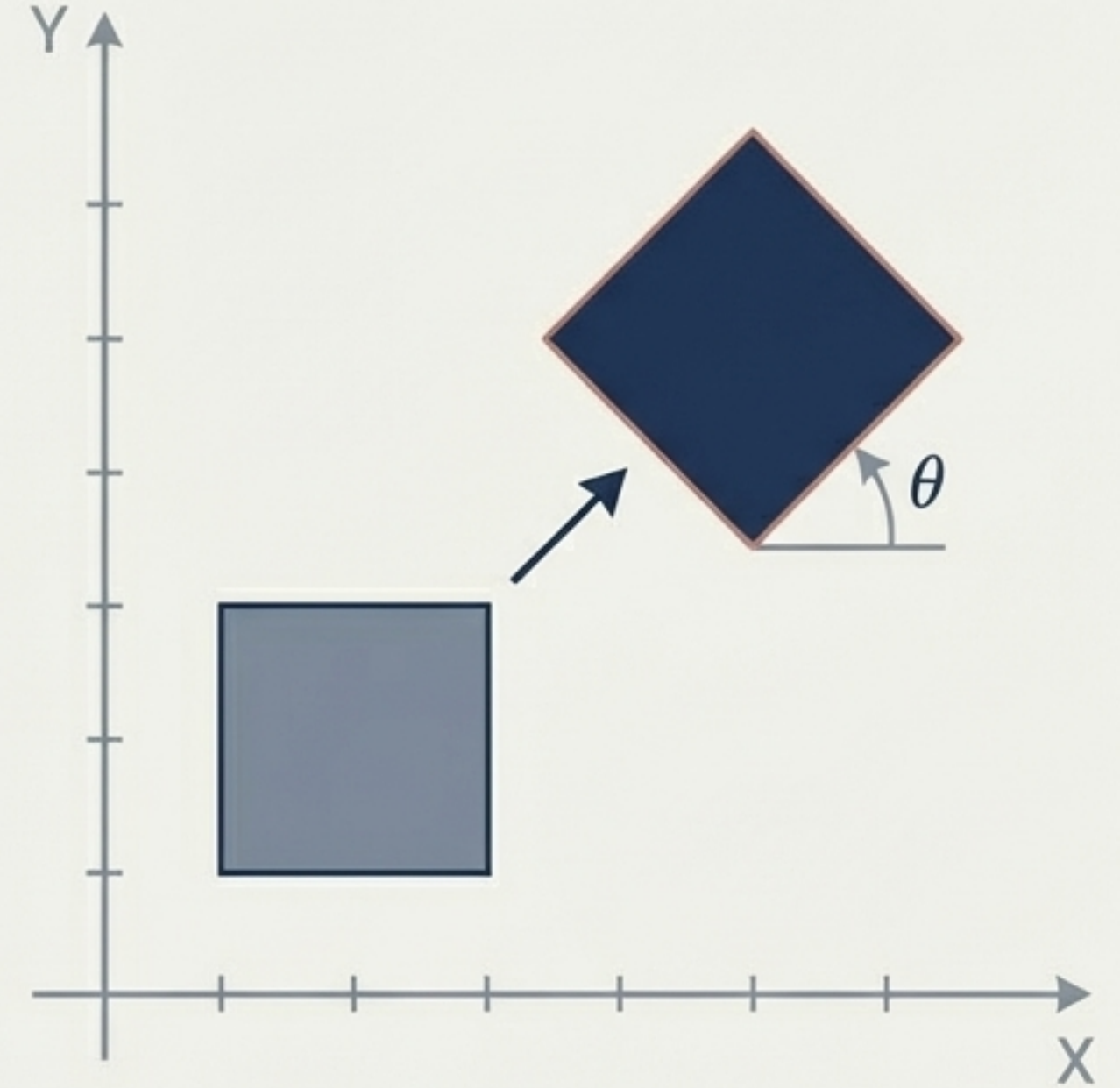
$$A \oplus B = \{c \in \mathbb{E}^N \mid c = a + b, \text{ for some } a \in A \text{ and } b \in [(R(\alpha)S(\alpha)\partial B)^+]\}$$

$S(\alpha)$: Ölçekleme
(Scaling) Matrisi

$R(\alpha)$: Döndürme
(Rotation) Matrisi

∂B : Yapı elemanının
sınırı (Boundary)

$[\dots]^+$: Pozitif doldurma
operatörü
(Sınırın içini kapsar)

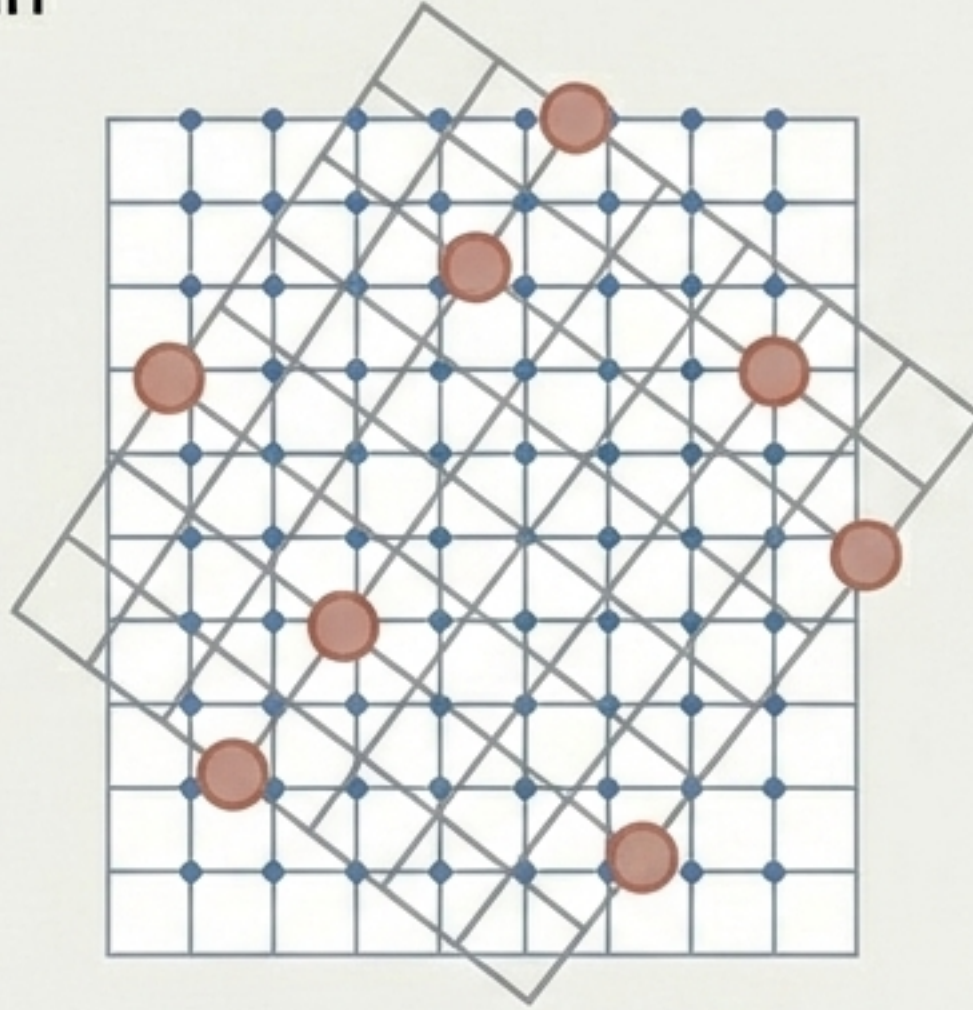


Kilit Çıkarım: Noktasal dönüşümler, ayrık uzayda matris cebiri kullanılarak adaptif yapı elemanlarına dönüştürülür.

Ayrık Uzayda Bilgi Kaybı: Yeniden Örnekleme (Resampling)

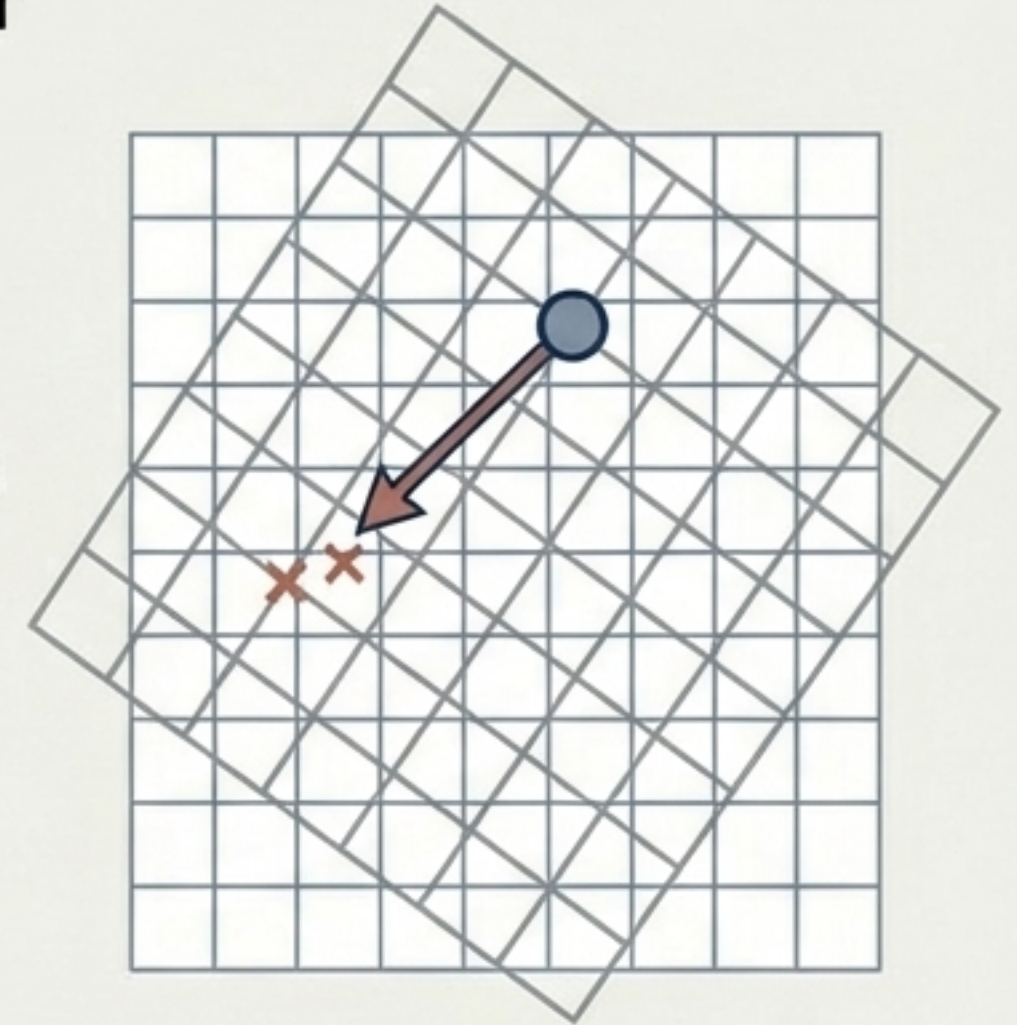
Problem

Sürekli bir dönüşümün ayrık (discrete) bir matrise zorlanması, orijinal pikselleri hedef görüntüde tanımsız veya kesirli koordinatlara taşır. Bu uyumsuzluk yapısal bozulmalara yol açar.



Çözüm: Yeniden Örnekleme

Hedef ızgaradaki her bir tam sayı koordinatının, orijinal görüntüdeki hangi kesirli konuma denk geldiğini geriye dönük matematiksel haritalama ile bulma işlemi.

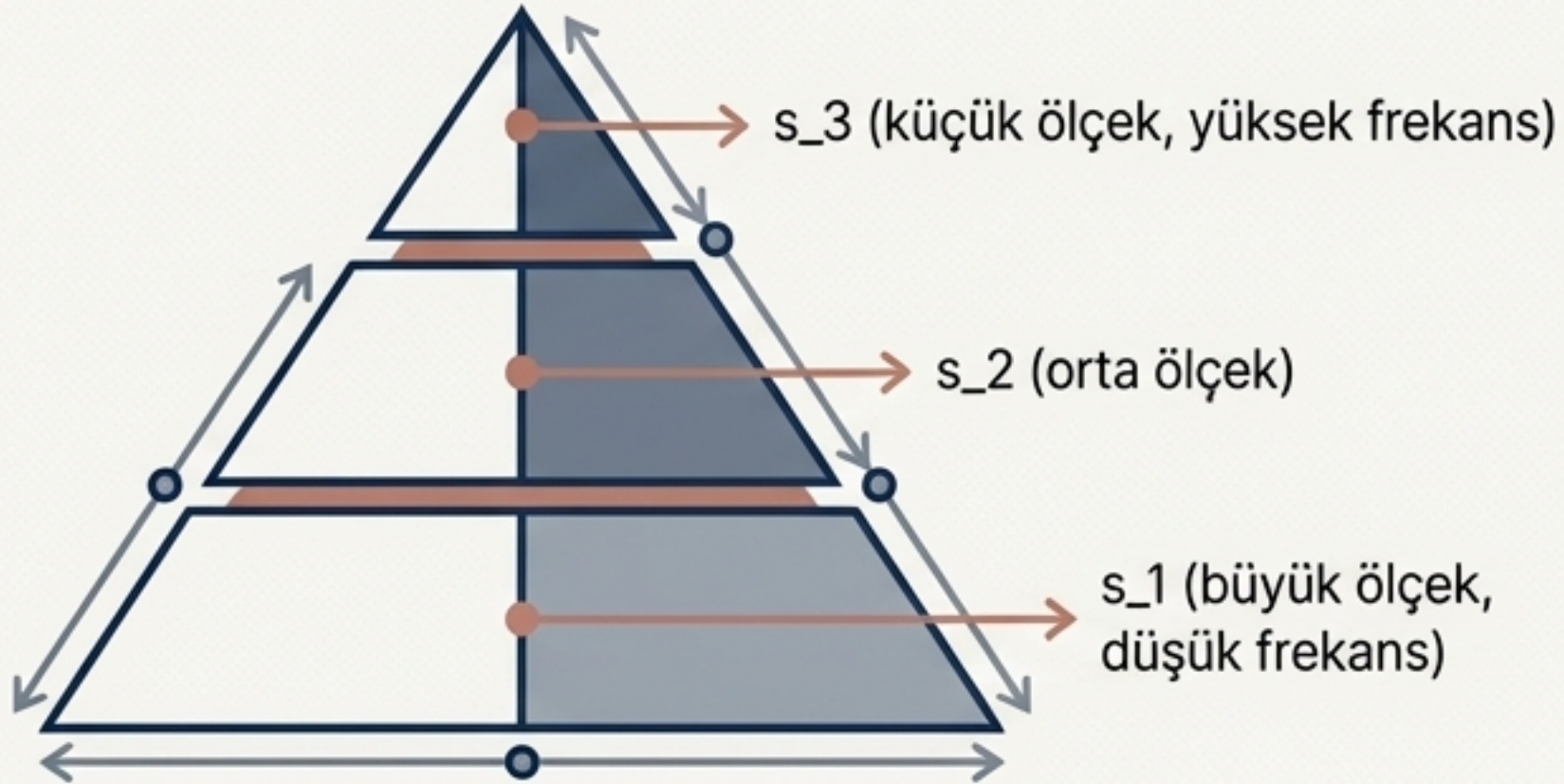


Frekans Sınırları ve Nyquist Örnekleme Kuralı

$$N_2 = (s_1/s_2) N_1$$

N_1, N_2 : Farklı ölçeklerdeki örneklem (sample) sayıları

s_1, s_2 : Ölçek (scale) parametreleri ($s_2 > s_1$)



Kuralın Doğası

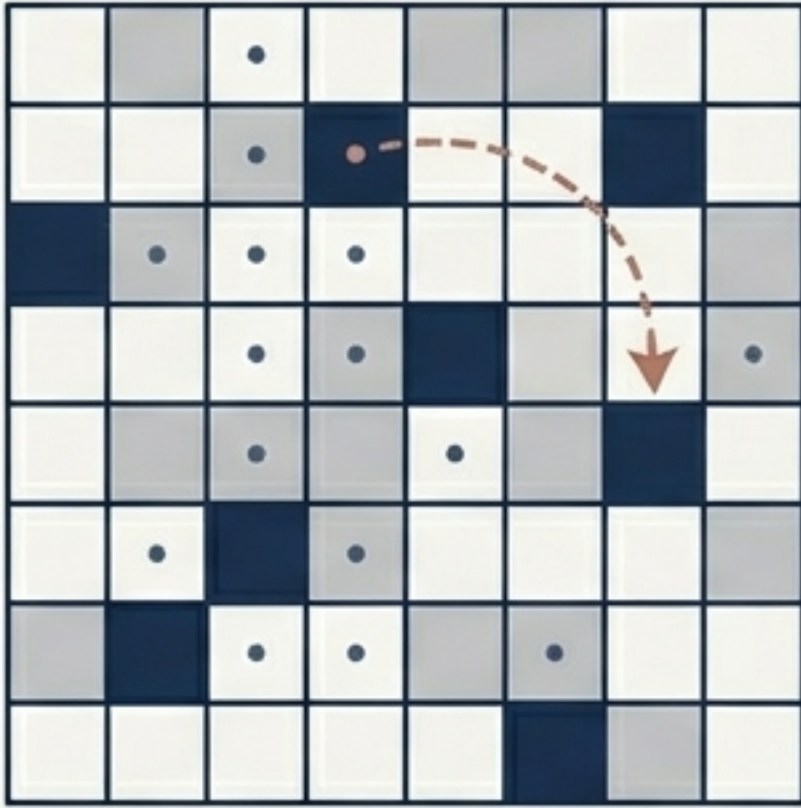
Düşük frekanslarda (yüksek ölçekler), örneklem sayısı matematiksel bir güvenlikle azaltılabilir.

Logaritmik Seri (Base 2)

$s = 2^j$ ve $t = k \cdot 2^i$. Dyadic ölçek, ölçek parametresini logaritmik bir seriye oturarak Nyquist kuralını doğal olarak sağlar ve aliasing (frekans katlanması) etkisini önler.

Tahmin Mimarisi: Enterpolasyon İhtiyacı

Durum



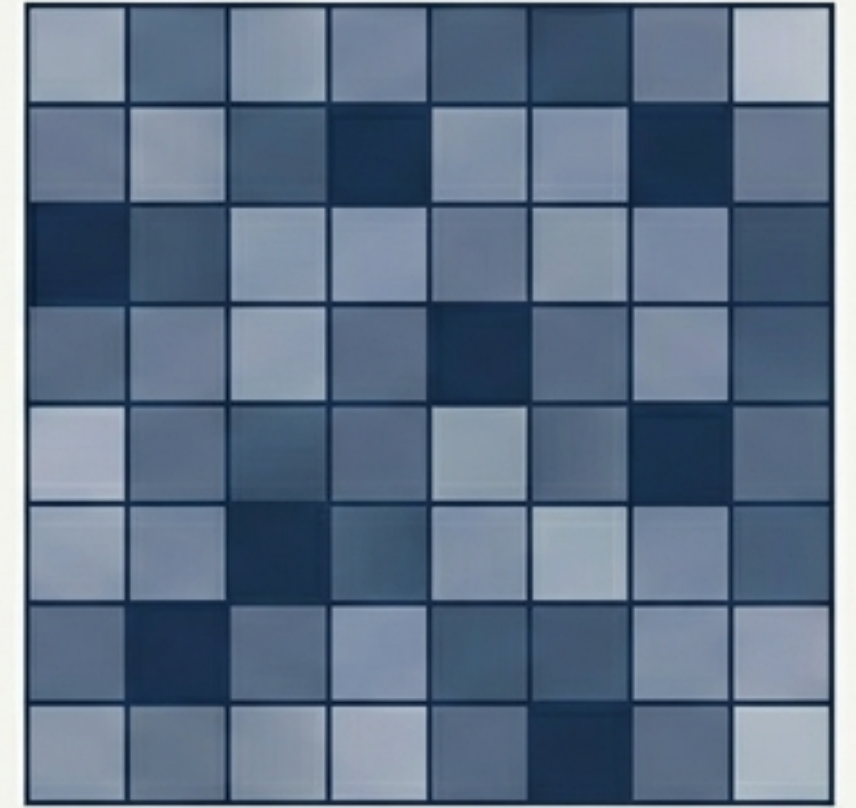
Ters dönüşüm (inverse transform), hedef pikselleri orijinal görüntüde kesirli (non-integer) koordinatlara yönlendirir.

Kriz



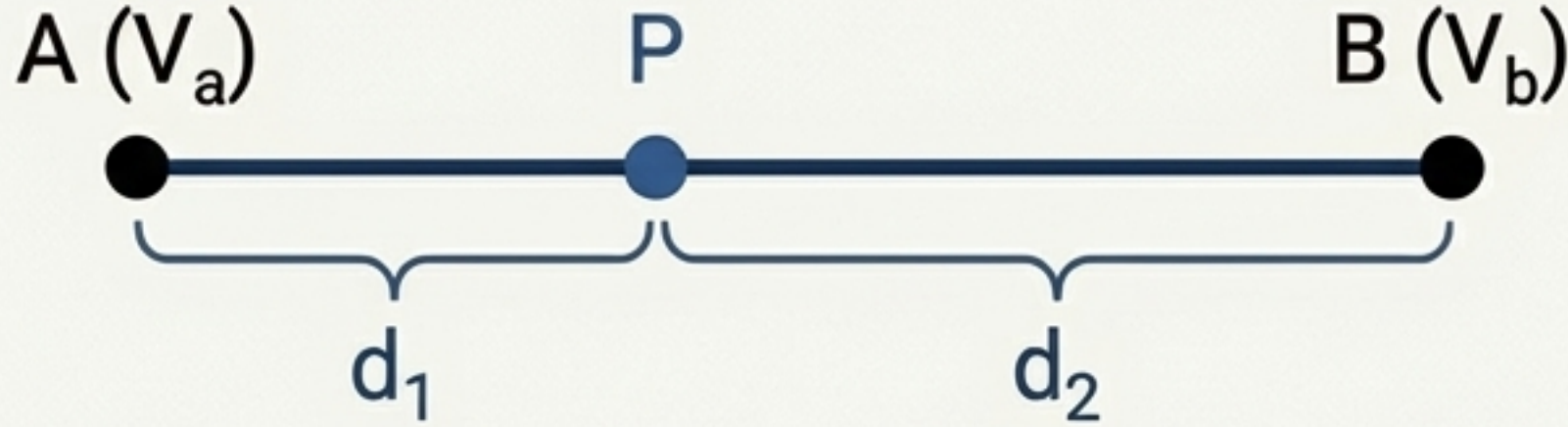
Dijital görüntüler sadece tam sayı (integer) koordinatlarında tanımlı yoğunluk (intensity) değerlerine sahiptir.

Matematiksel Gerekçe



Tanımsız kalan bu değerleri, en yakın komşuların yoğunluk profillerini ve uzamsal uzaklıklarını ağırlıklandırarak (weighting) tahmin etmek zorunludur.

Doğrusal (Linear) Enterpolasyonun Formel Türetimi



Geometrik Temel

Tahmin edilecek değer, komşu piksellerin değerlerinin, mesafeleriyle ters orantılı ağırlıklı toplamıdır.

Mesafe Oranları

Düğüm A ve Düğüm B arasında yer alan P noktasının tahmini.

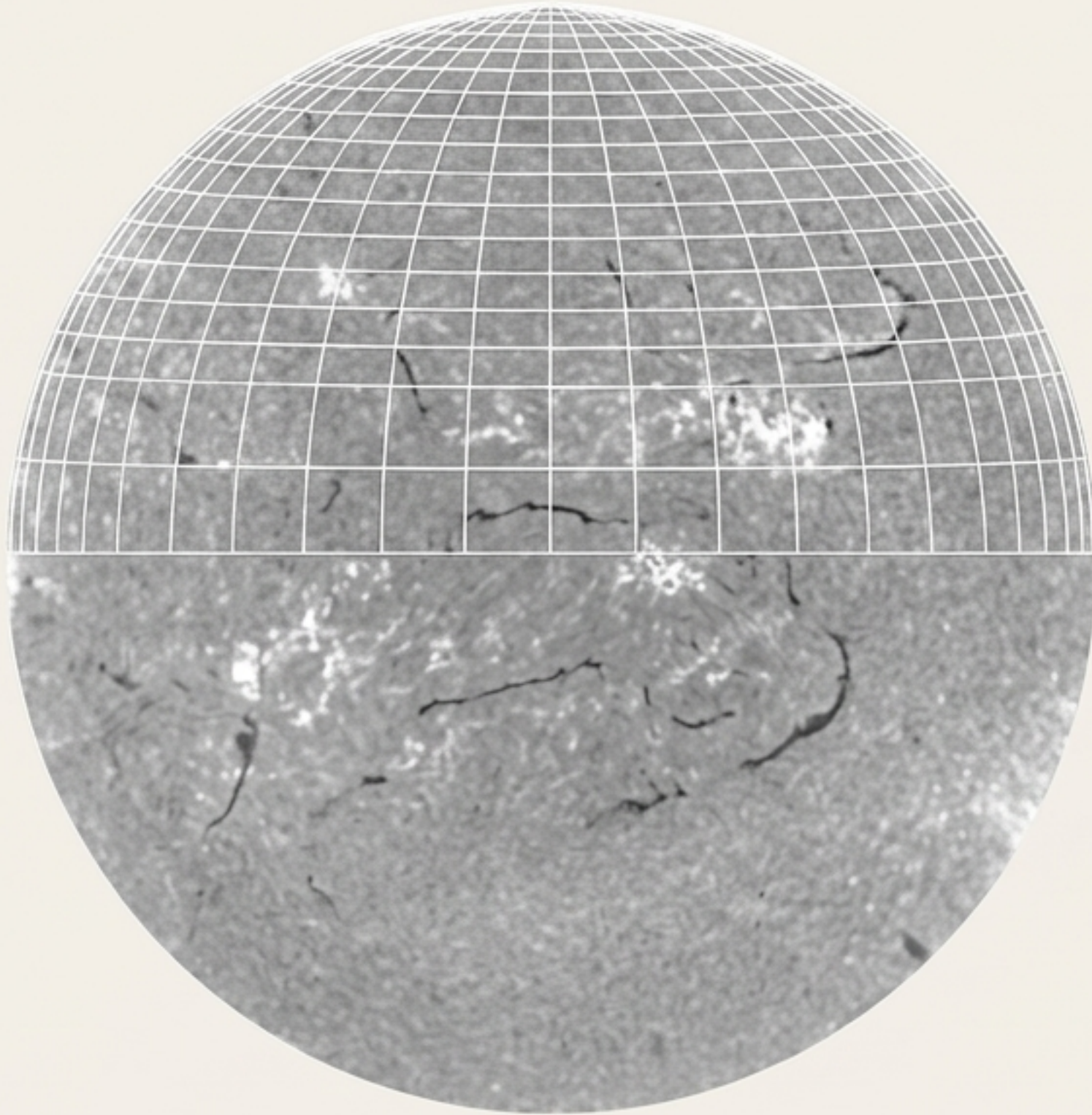
Matematiksel Denklem

$$V_p = \left[\frac{d_2}{d_1 + d_2} \right] V_a + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] V_b$$

Genişletilmiş Kural

Bu 1D doğrusal model, X ve Y eksenlerinde ardışık olarak uygulandığında 2D Bilinear Enterpolasyon haritasını oluşturur.

Karmaşık Non-Linear Dönüşümler: Eş-Alan Projeksiyonu



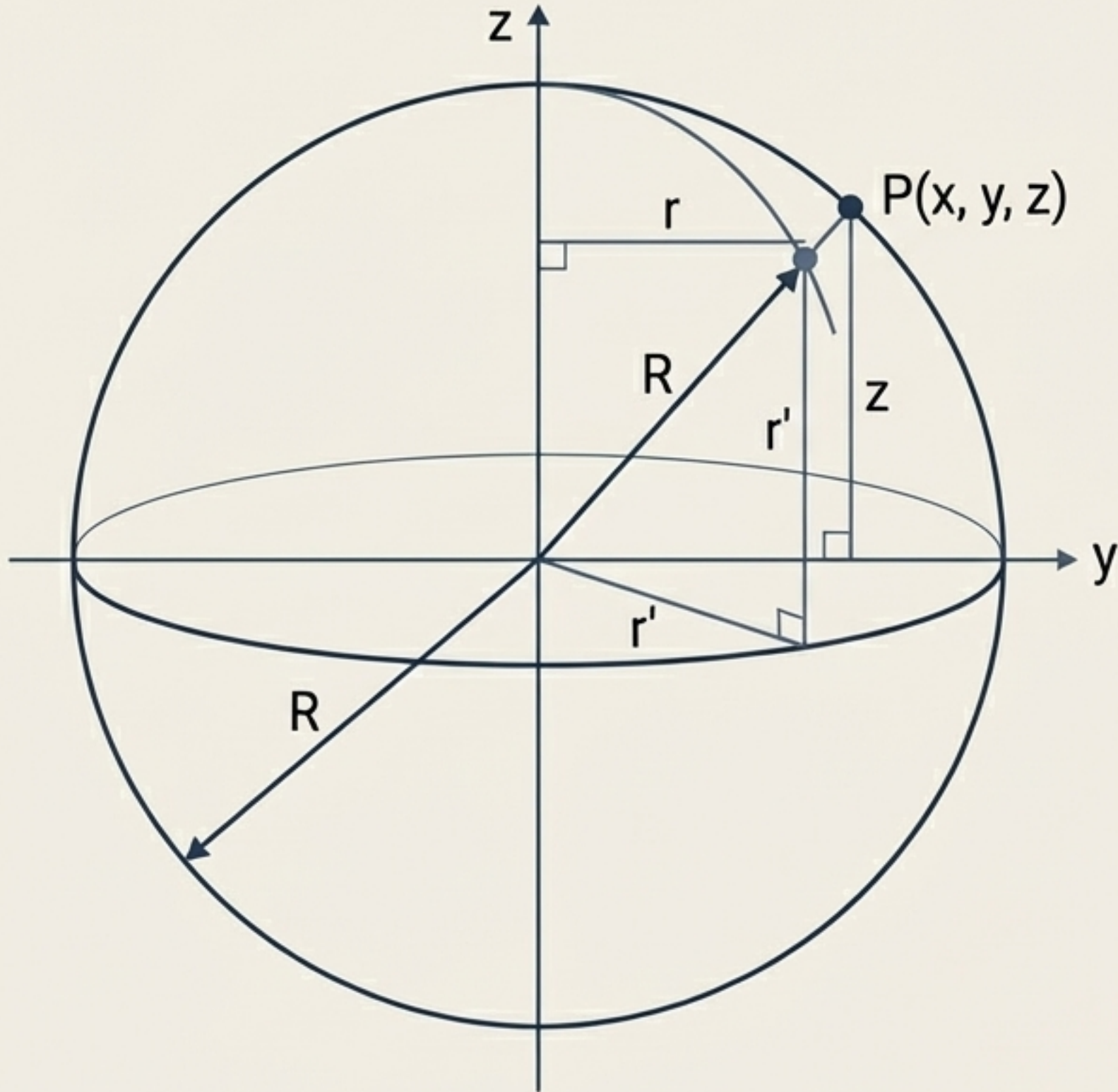
Problem: Ortografik İzdüşüm Kusurları

Standart ortografik izdüşümde, kürenin kenarlarına doğru gidildikçe fiziksel alanlar görsel olarak daralır (**distorsiyon**). Özelliklerin şekli bozular. Güneş diski gibi küresel 3D verilerin 2D düzleme projeksiyonu sorunludur.

Çözüm: Eş-Alan (Equal-Area) Gereğesi

Yüzeydeki her özelliğın (feature) alan eşitliğini (**uniform area**) 2D düzlemde matematiksel olarak koruyan non-linear bir geometrik dönüşüm uygulanması.

Eş-Alan Projeksiyonunun Matematiksel İnşası



1. Küre Modeli

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightarrow z = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

2. Projeksiyon Merkezinden Uzaklık Türetimi

$$r' = \sqrt{r^2 + (R - z)^2}$$

3. Nihai Yarıçap Projeksiyon Denklemi

Yukarıdaki z değeri yerine konduğunda:

$$r' = R \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)}$$

4. Sonuç

r' , orijinal noktanın projeksiyon merkezinden olan yeni, alan-korunumlu radyal mesafesidir.

Pikselleri Doğrulama: Ters Dönüşüm (Inverse Transform)

Ölçekleme Optimizasyonu

Eş-alan projeksiyonu, orijinal diski $\sqrt{2}$ faktörü kadar büyütür. İzlenebilir görünür yarımkürenin %90'lık kısmı, orijinal disk boyutuna geri ölçeklenir (r''').

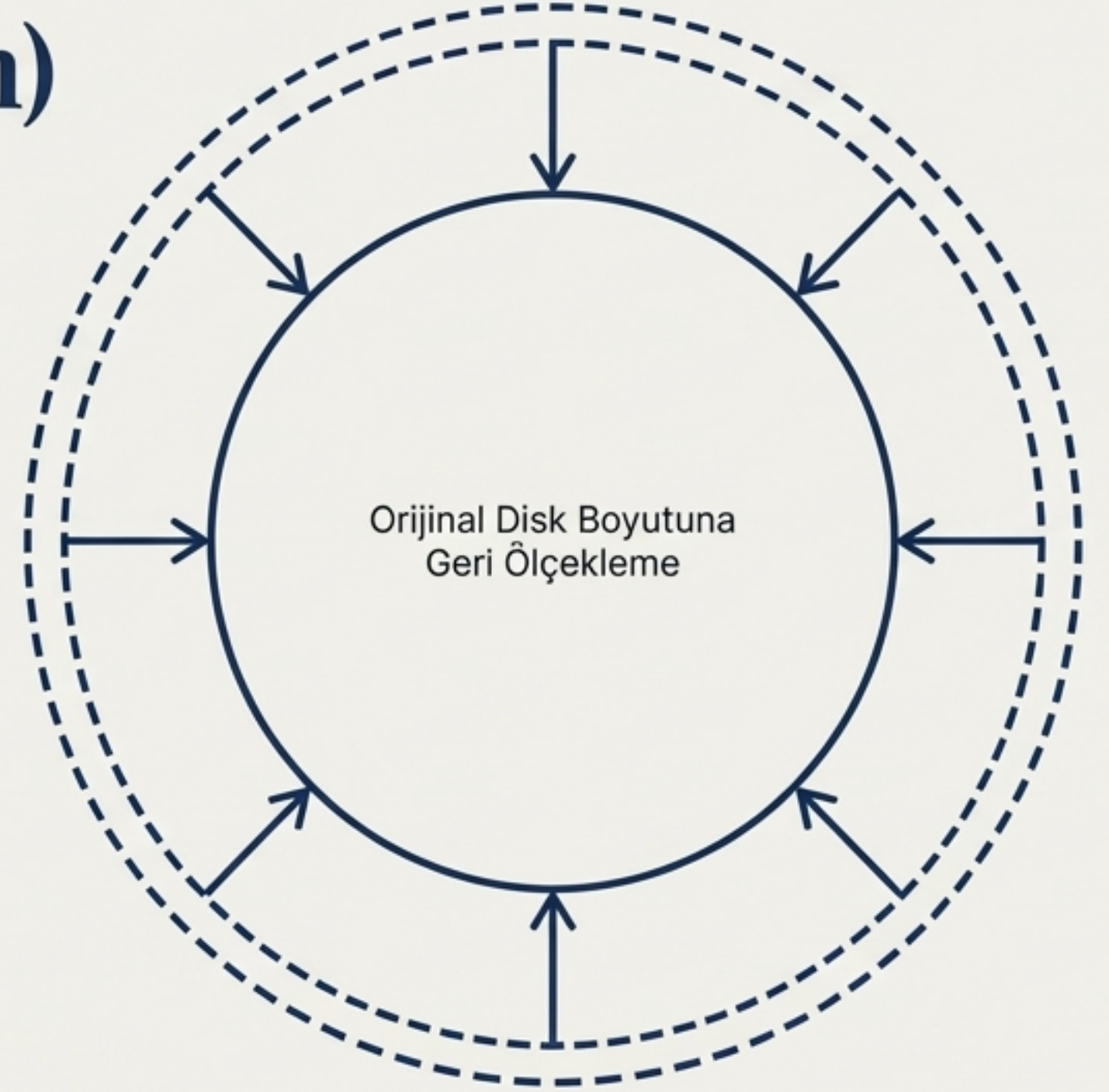
Güvenilirlik Sınırı

Disk dış %10'luk kenar kısmı, yüksek distorsiyon nedeniyle veri güvenilirliğini artırmak için analizden (filament tespiti vb.) çıkarılır.

Ters Dönüşüm (Inverse) Denklemi

Hedefteki her pikselin orijinal karşılığını kesin olarak bulmak için:

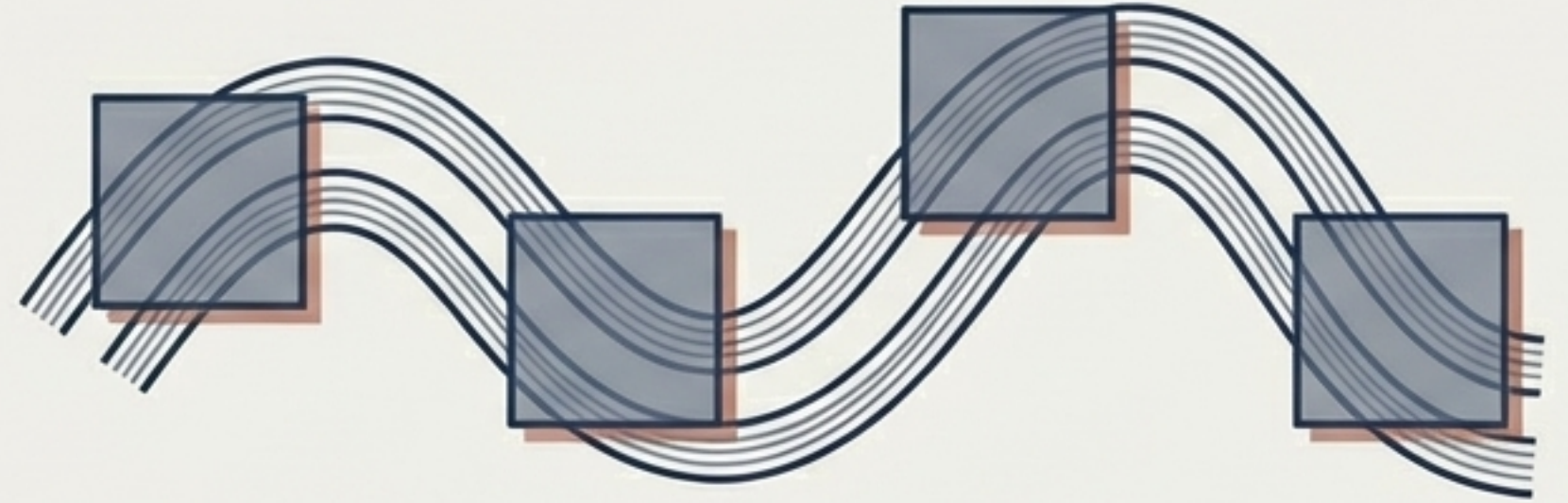
$$r = r''' \sqrt{[2 - (r'''^2 / R^2)]}$$



İleri Uygulamalar: Geometrik Dönüşümlerin Morfolojik Entegrasyonu

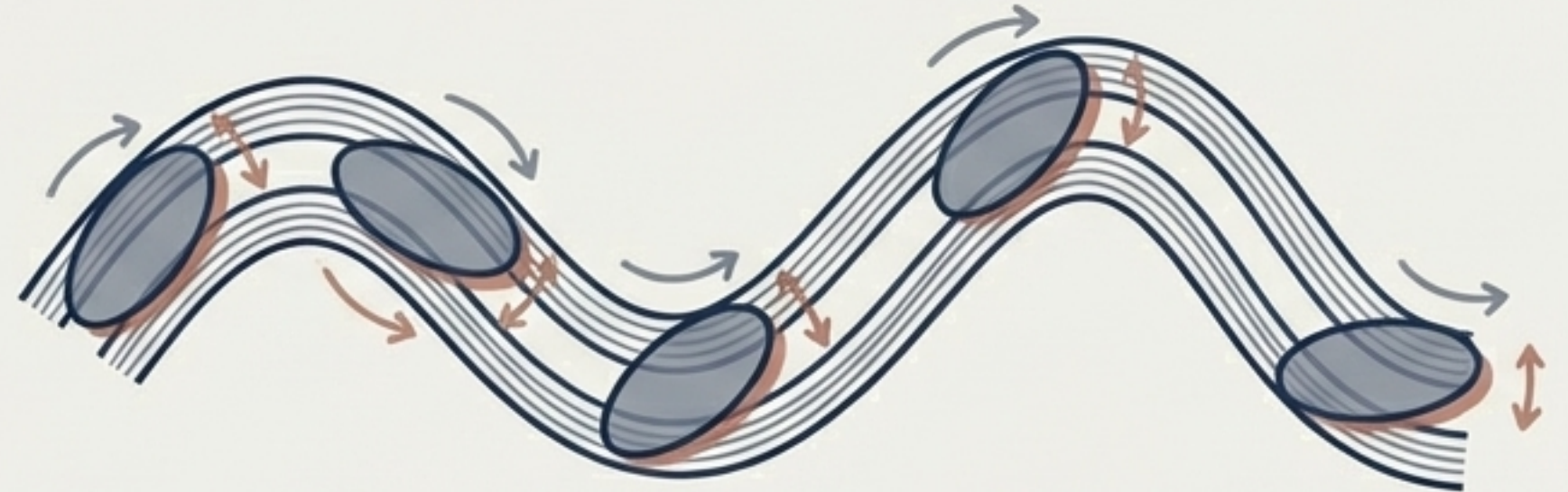
Geleneksel Morfoloji Sınırı

Aşınma (Erosion) ve Genişleme (Dilation) işlemleri genellikle sabit şekil ve boyuttaki (sadece öteleme yapan) yapı elemanlarına dayanır.



Yeni Paradigma (Shih & Gaddipati)

Görüntünün lokal özelliklerine (eğriler, kalınlıklar) göre yön (Rotation) ve ölçek (Scaling) değiştirebilen akıllı morfolojik operatörler.

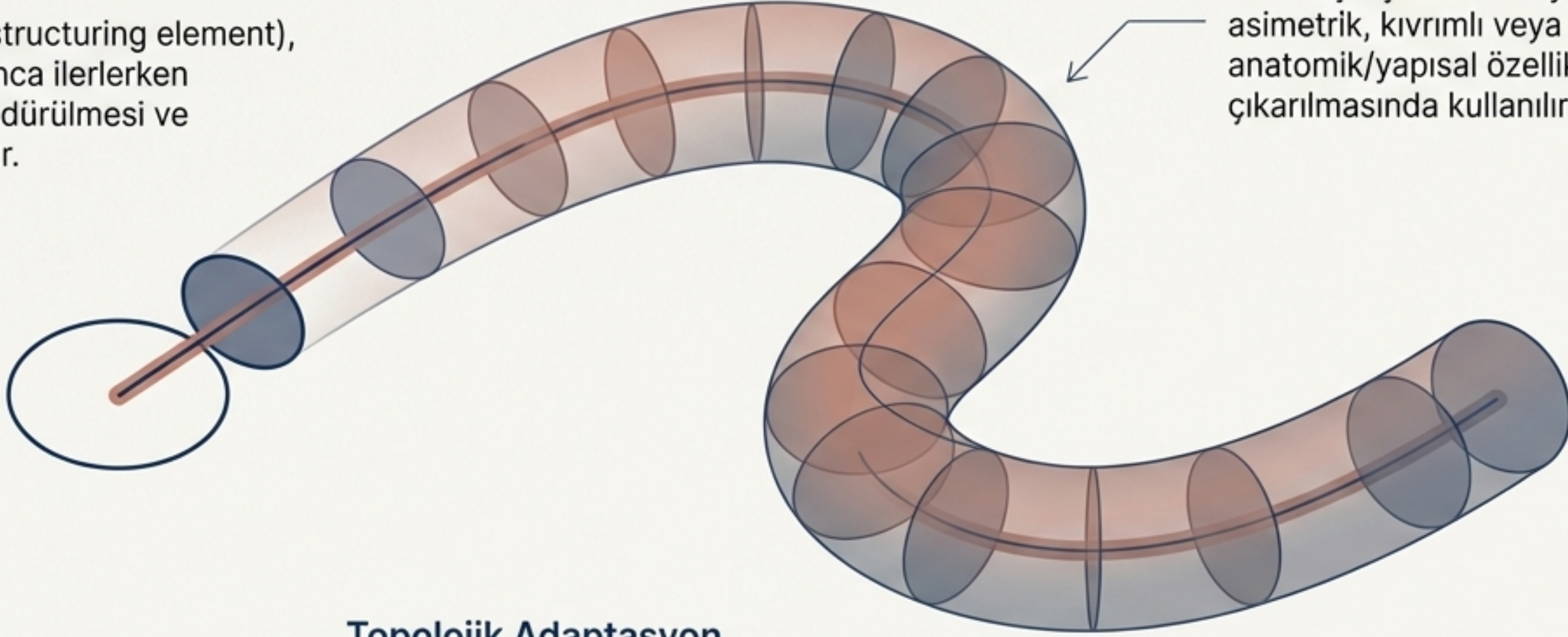


“Geometrik dönüşümler, pikselleri taşımaktan çıkıp ‘şekil tanıyan dinamik proplara’ dönüşür.”

Dinamik Ortamlar İçin Süpürme (Sweep) Morfolojisi

Süpürme Teorisi

Bir yapı elemanının (structuring element), uzamsal bir yol boyunca ilerlerken eşzamanlı olarak döndürülmesi ve ölçeklenmesi işlemidir.



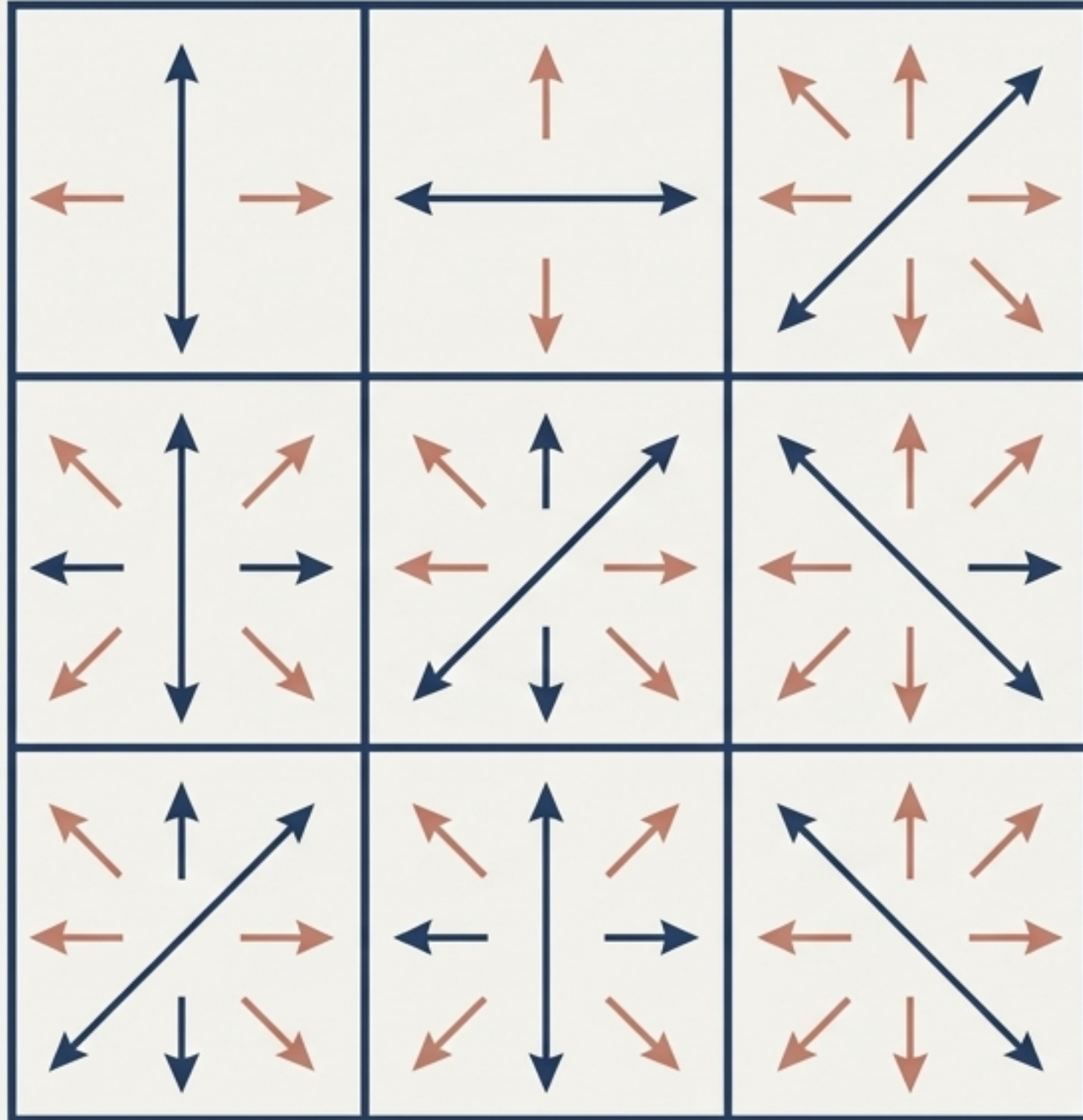
Karmaşık Şekil Tanıma

Sabit açılı şablonların yakalayamadığı asimetric, kıvrımlı veya değişken ölçekli anatomik/yapısal özelliklerin çıkarılmasında kullanılır.

Topolojik Adaptasyon

Operatör, işlem sırasında durağan bir maske olmaktan çıkıp, analiz edilen objenin topolojisine geometrik olarak adapte olan sürekli bir fonksiyona evrilir.

Dynamically Rotational Mathematical Morphology (DRMM)



Vektörel Formülasyon

$A \oplus B$ (Genişleme) ve $A \ominus B$ (Aşınma) işlemleri, artık sabit skaler değerler değil, yönsel (directional) vektör dizileri olarak kodlanır:

$A \oplus \sim B = [P_7, P_6, \dots, P_1, P_0] = P$
(8-bit codeword P_7, \dots, P_1, P_0)

(8-bit codeword bazında yönelim dereceleri).



Uzamsal Yol Planlama (Shortest Path Planning)

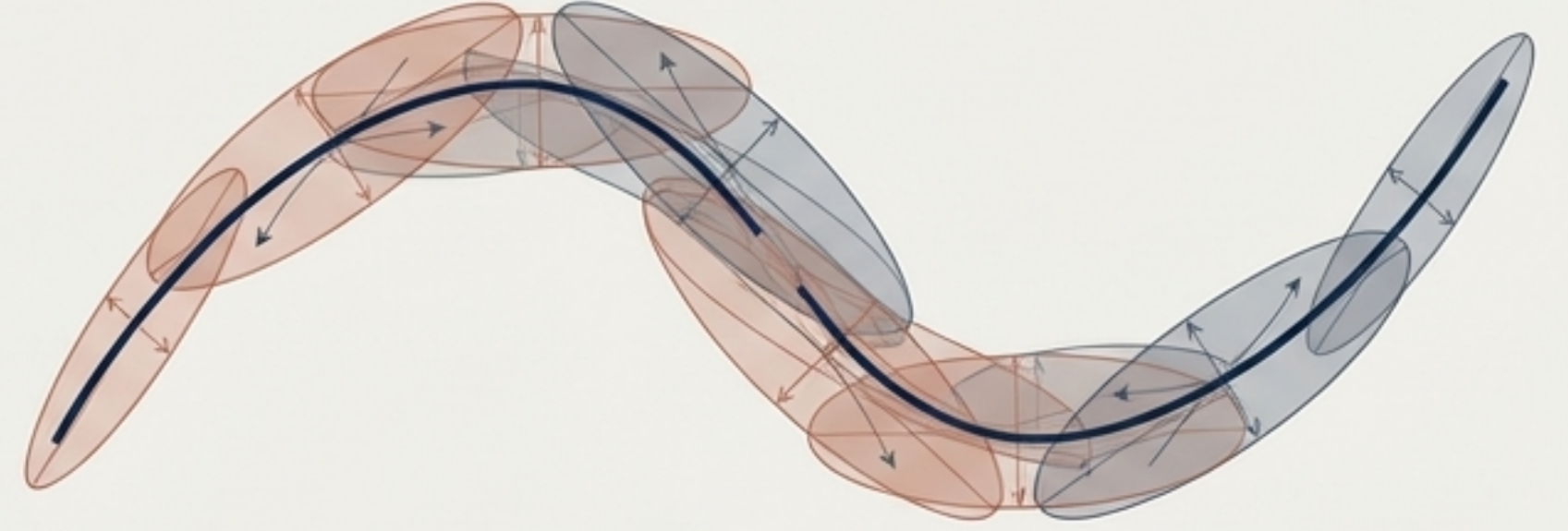
Her piksel için önceden statik hesaplama yapmak yerine, algoritmada ilgili piksel seçildikçe DRMM formülü dinamik olarak maliyet matrislerini geometrik rotasyona göre günceller.

Sonuç: Zaman ve işlem hacmi tasarrufu sağlayan adaptif yön bulma stratejisi.

Adaptif Sınır (Boundary) Operasyonları ve Kenar Onarımı



Öncesi



Sonrası

∂B Sınır Manipülasyonu



Bütün bir yapı elemanı yerine, yalnızca elemanın sınırları (∂B) üzerinden işlem yapmanın sağladığı analitik verimlilik.

Pozitif Doldurma



[...]⁺ operatörü, dönüştürülmüş sınırın ($R(\alpha)S(\alpha)\partial B$) içini matematiksel olarak yeniden doldurur.

Kırık Kenar Onarımı



Uç noktaların (end points) yerel eğimlerine göre rotasyon açısını belirleyen eliptik bir yapı elemanı, çizgiyi doğru yörüngede uzatarak kopuklukları geometrik bir hassasiyetle onarır.

Teorik Sentez: Dönüşümlerin Matematiksel Bütünlüğü

