

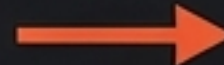
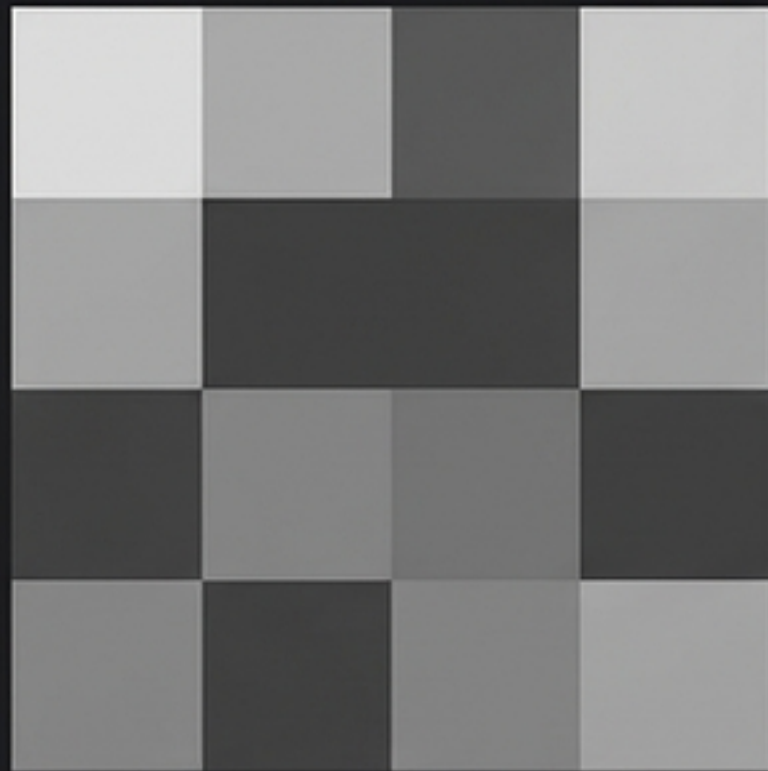
# Görüntü İyileştirmenin Matematiği: Frank Y. Shih Yaklaşımı

Pikseller, Olasılık ve Uzamsal Filtreleme  
Üzerine Derinlemesine Bir Bakış

Based on 'Image Processing and Pattern  
Recognition' by Frank Y. Shih

# Dijital Görüntünün Doğası: Fonksiyon Olarak Görüntü

$$f(x, y)$$



	0	1	2	3
0	2	1	0	2
1	1	0	0	1
2	0	1	1	0
3	1	0	2	1

- Bir görüntü,  $x$  ve  $y$  uzamsal koordinatlar olmak üzere, iki boyutlu bir  $f(x, y)$  fonksiyonu olarak tanımlanır.
- Herhangi bir  $(x, y)$  çiftindeki  $f$  genliği, o noktadaki görüntünün yoğunluğu (gri seviyesi) olarak adlandırılır.
- Görüntü iyileştirme, bu matris üzerinde yapılan bir dönüşümdür:  
 $g(x, y) = T[f(x, y)]$

# Piksel Temelli İşlemler: Logaritmik Dönüşüm

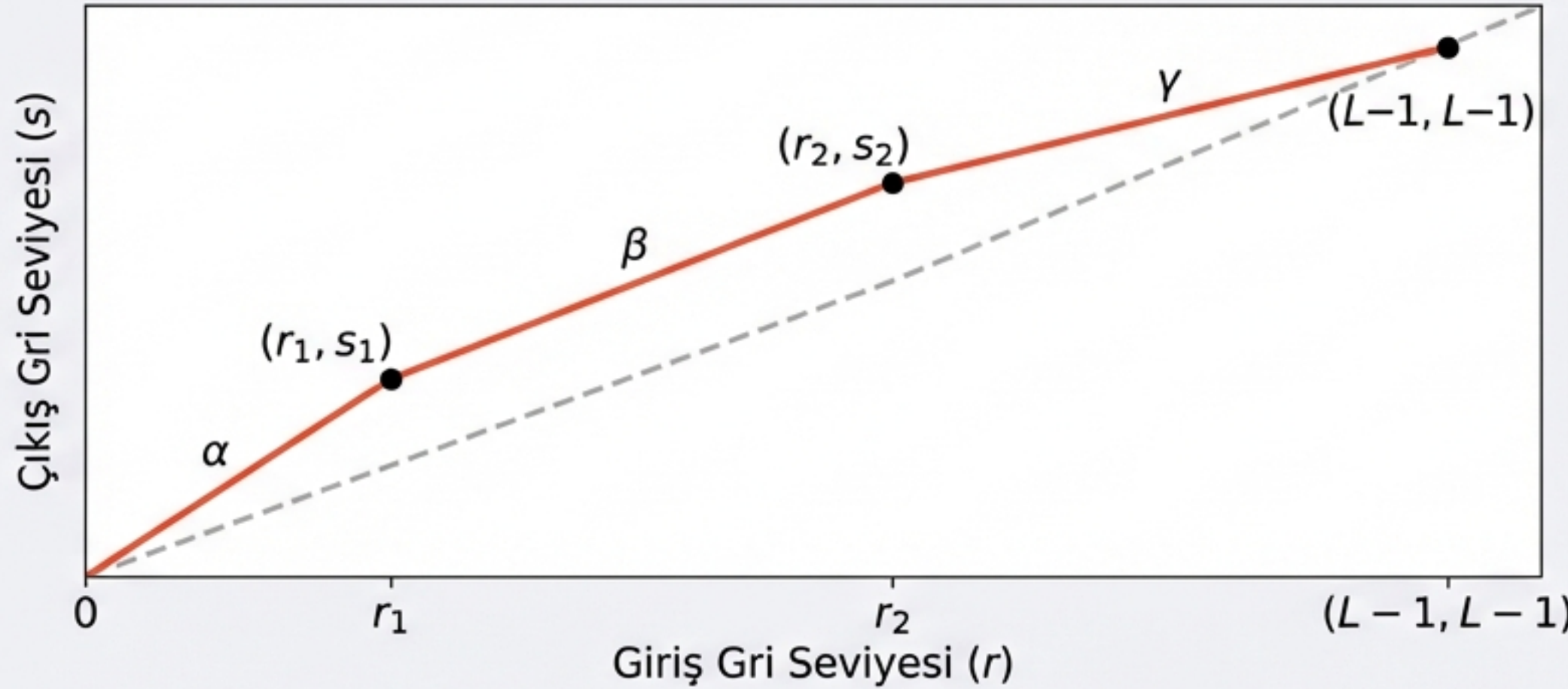
$$s = c \log(1 + r)$$



- **Amaç:** Fourier spektrumu gibi çok geniş dinamik aralığa sahip görüntüleri sıkıştırmak.
- **Mekanizma:** Düşük yoğunluklu (karanlık) piksellerin aralığını genişletirken, yüksek yoğunluklu (parlak) pikselleri sıkıştırır.
- Formüldeki  $c$  sabiti, çıktı değerlerini görüntüleme aygıtının aralığına ölçekler.

# Parçalı Doğrusal Dönüşümler ve Kontrast Germe

$$s = \begin{cases} \alpha r & 0 \leq r < r_1 \\ \beta(r - r_1) + s_1 & r_1 \leq r < r_2 \\ \gamma(r - r_2) + s_2 & r_2 \leq r \leq L - 1 \end{cases}$$

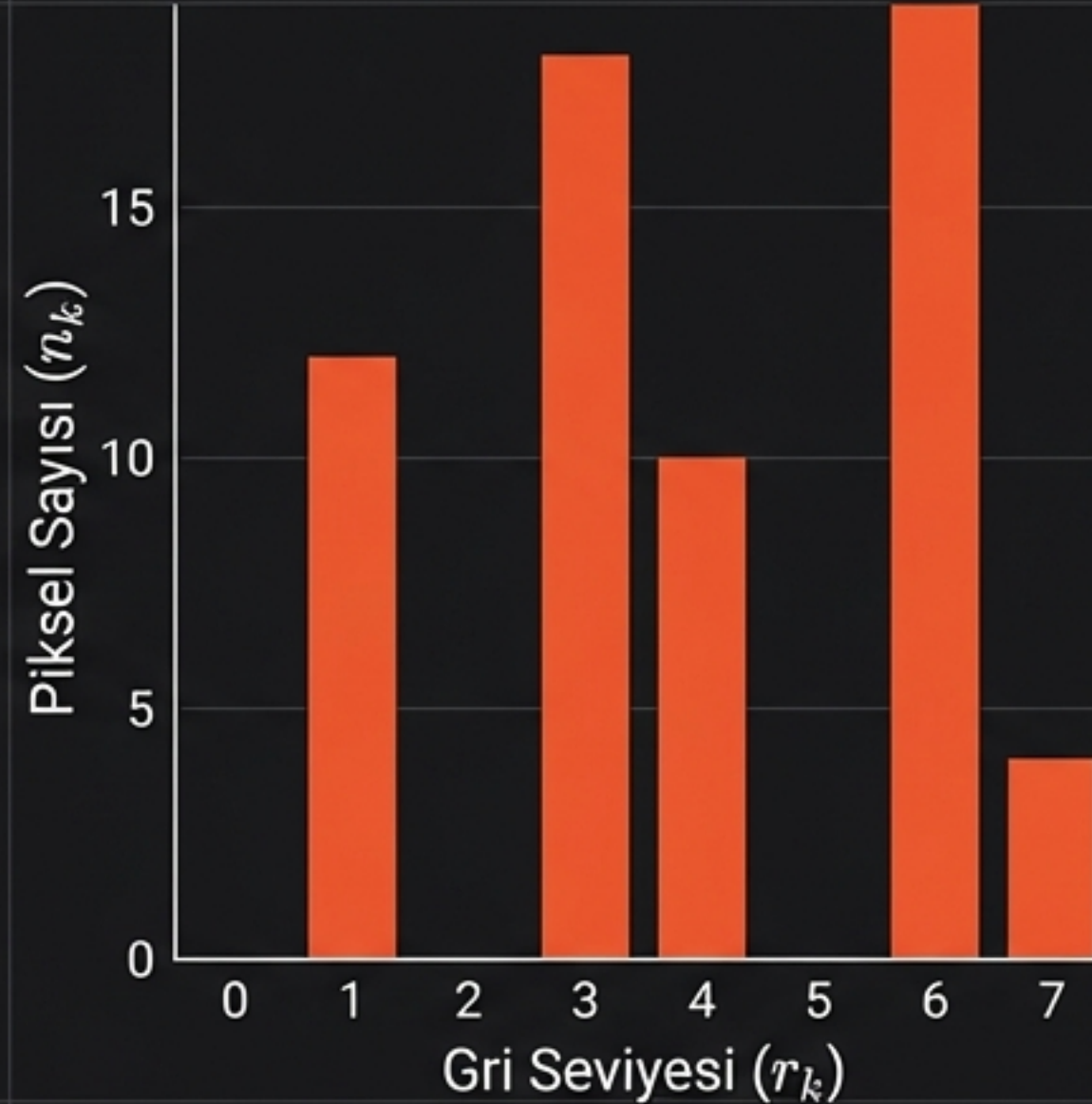


- Belirli bir gri seviye aralığını  $[r_1, r_2]$  hedef aralığa  $[s_1, s_2]$  genişletmek için kullanılır.
- Eğim ( $\beta$ )  $> 1$  ise kontrast artar (germe).
- Eğim  $< 1$  ise kontrast azalır (sıkıştırma).

# Histogramın İstatistiği: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$p(r_k) = \frac{n_k}{n}$$

3	3	6	6	1	1	3	1
3	3	4	4	1	3	1	3
3	7	6	6	6	6	1	1
1	7	6	7	6	6	6	6
4	7	6	7	4	6	7	1
3	3	4	3	6	6	6	3
4	4	4	3	3	6	3	3
3	4	4	1	1	1	1	6

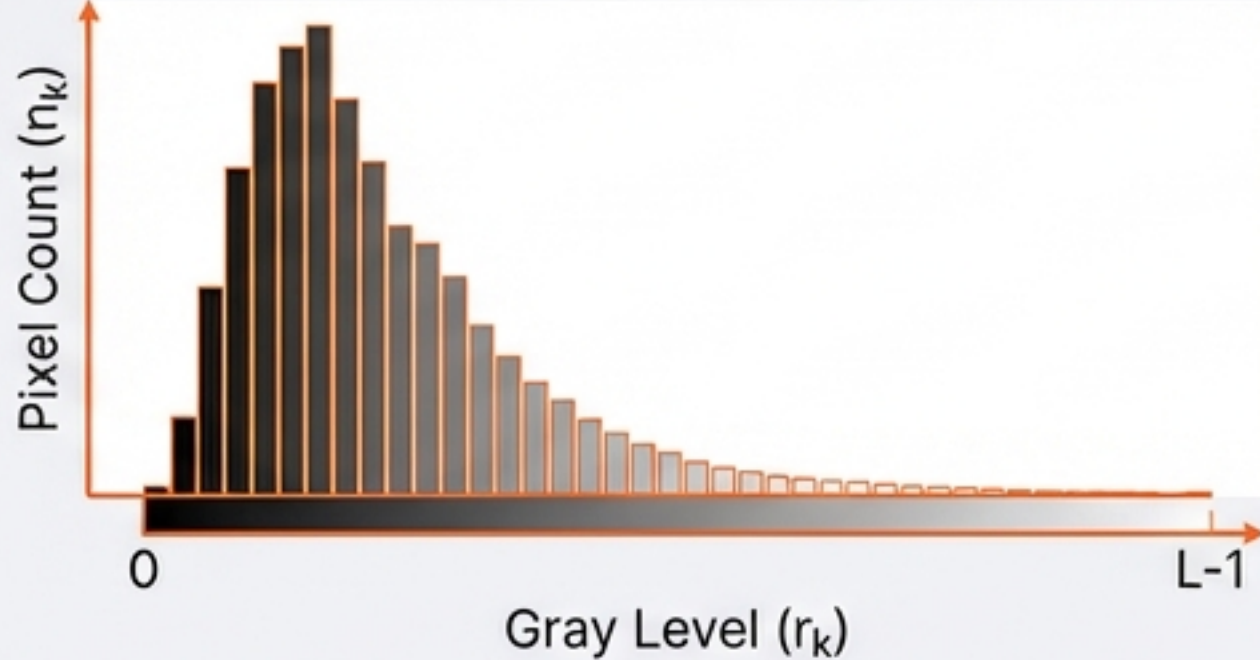


- Histogram, bir görüntünün yoğunluk dağılımını gösteren diyagramdır.
- $r_k$ :  $k$ . gri seviye
- $n_k$ : bu seviyedeki piksel sayısı
- $n$ : toplam piksel sayısı (64)
- Matematiksel olarak, histogram normalize edildiğinde görüntünün Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF) olarak kabul edilir.

# Histogram Eşitleme ve Kümülatif Dağılım

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = (L - 1) \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$

Dark Image Histogram



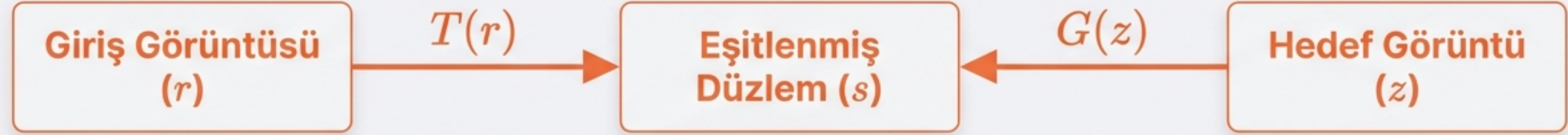
CDF Transformation

Uniform Histogram



- **Temel:** Dönüşüm fonksiyonu olarak Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF) kullanılır.
- **Sonuç:** Bu işlem, yoğunluk seviyelerini tüm aralığa yayarak düzgün (uniform) bir histogram dağılımı elde etmeye çalışır.

# Histogram Belirleme (Spesifikasyon)



$$z = G^{-1}(s) \rightarrow z = G^{-1}[T(r)]$$

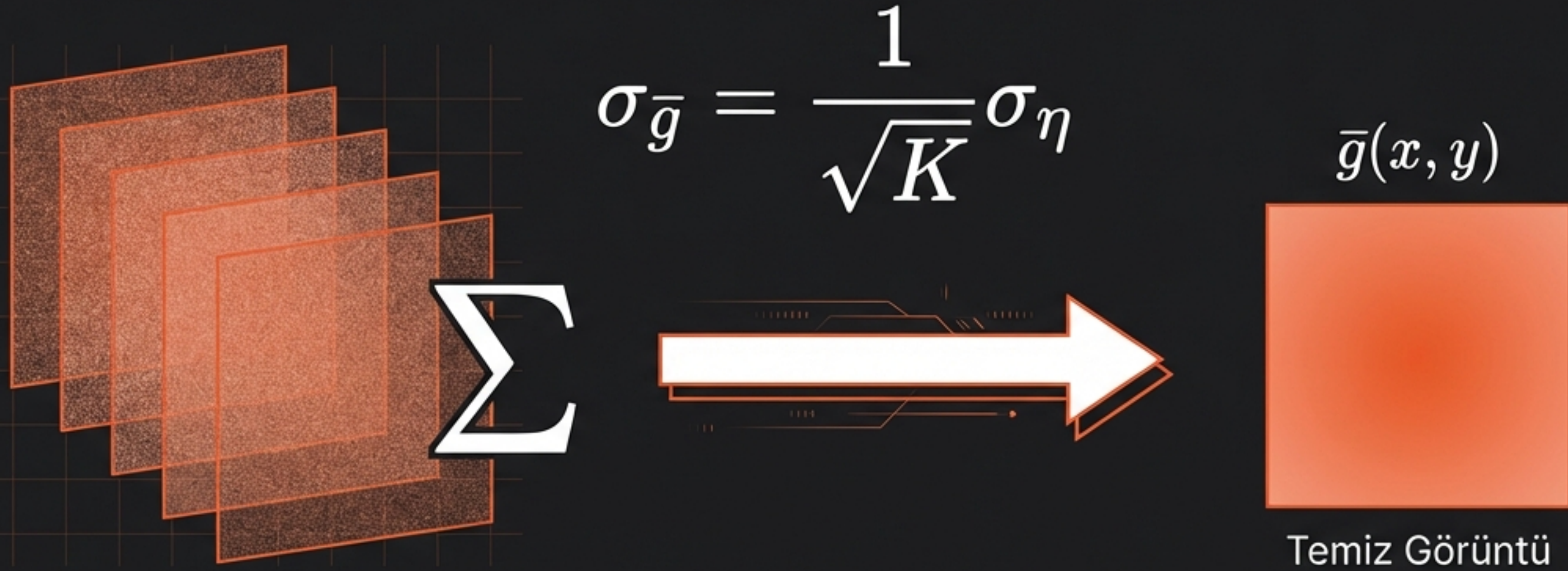
Otomatik eşitleme yerine, çıkış görüntüsünün belirli bir histogram formuna sahip olması istendiğinde kullanılır.

## Süreç:

1. Giriş görüntüsü eşitlenir ( $s$ ).
2. Hedeflenen histogramın ters dönüşümü ( $G^{-1}$ ) hesaplanır.
3. Eşitlenmiş değerler, hedef histogramın ters fonksiyonu ile eşleştirilir.

$r_k$	$p_r(r_k)$	$s_k$	$p_z(z_k)$	$z_k$
0	0.2656 →	0.2656 ≈ 0.30		3
1	0.5469 →	0.5469 ≈ 0.55		4
2	0.5625 →	0.5625 ≈ 0.55		4
3	0.6094 →	0.6094 ≈ 0.60		5
4	0.7656 →	0.7656 ≈ 0.85	→	6
4	0.7656 →	0.7656 ≈ 0.85		6
5	0.9375 →	0.9375 ≈ 1.00		7
6	0.9844 →	0.9844 ≈ 1.00		7
7	1.0000 →	1.0000 ≈ 1.00		7

# Aritmetik İşlemler: Ortalama ile Gürültü Azaltma

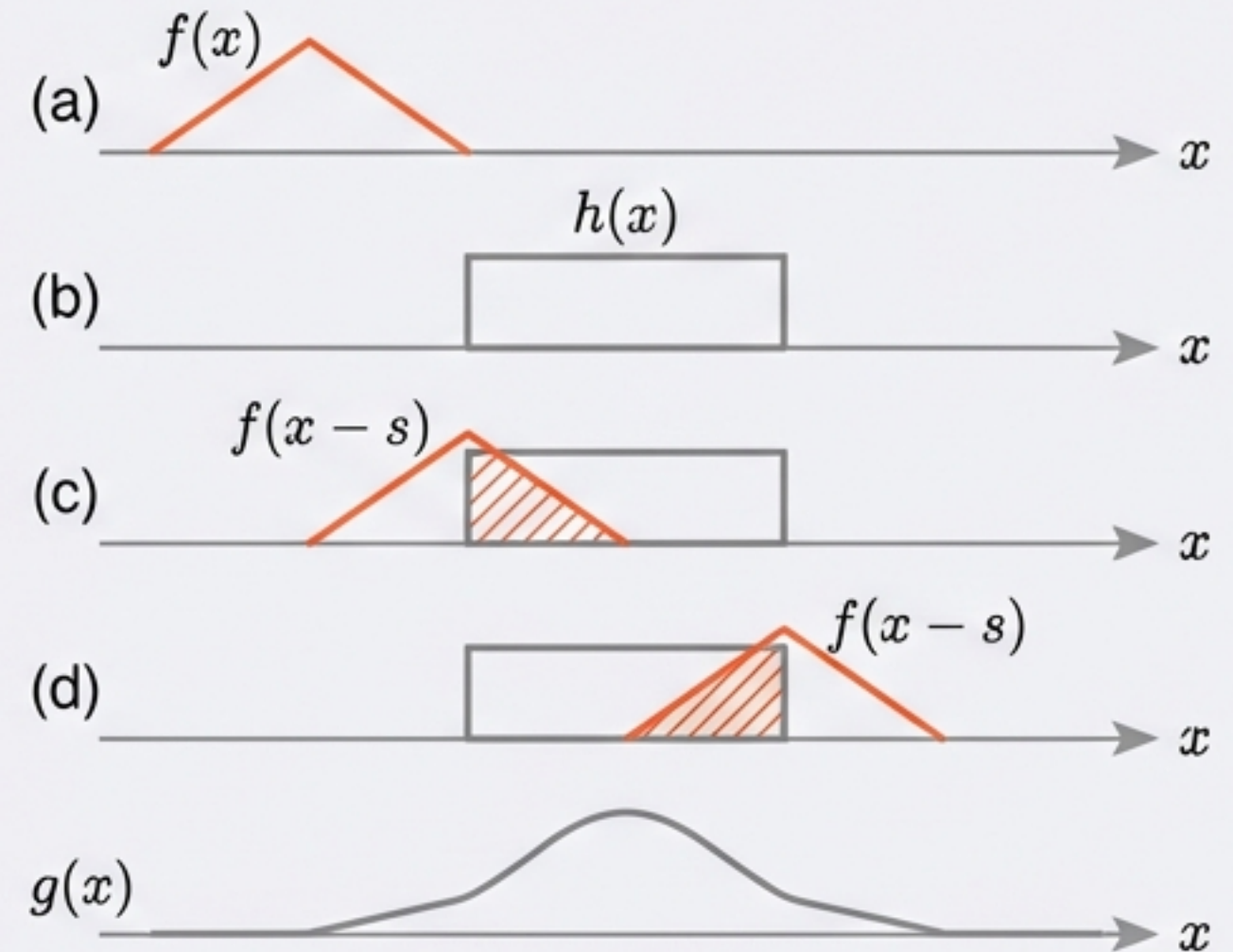


- Görüntü modeli:  $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$  (Sinyal + Gürültü).
- Eğer gürültü ( $\eta$ ) ilişkisiz ve ortalaması sıfır ise,  $K$  adet görüntünün ortalaması alındığında gürültünün standart sapması azalır.
- $K$  arttıkça, ortalama görüntü  $\bar{g}(x, y)$ , gerçek görüntü  $f(x, y)$ 'ye yakınsar.

# Uzamsal Filtrelemenin Kalbi: Evrişim (Convolution)

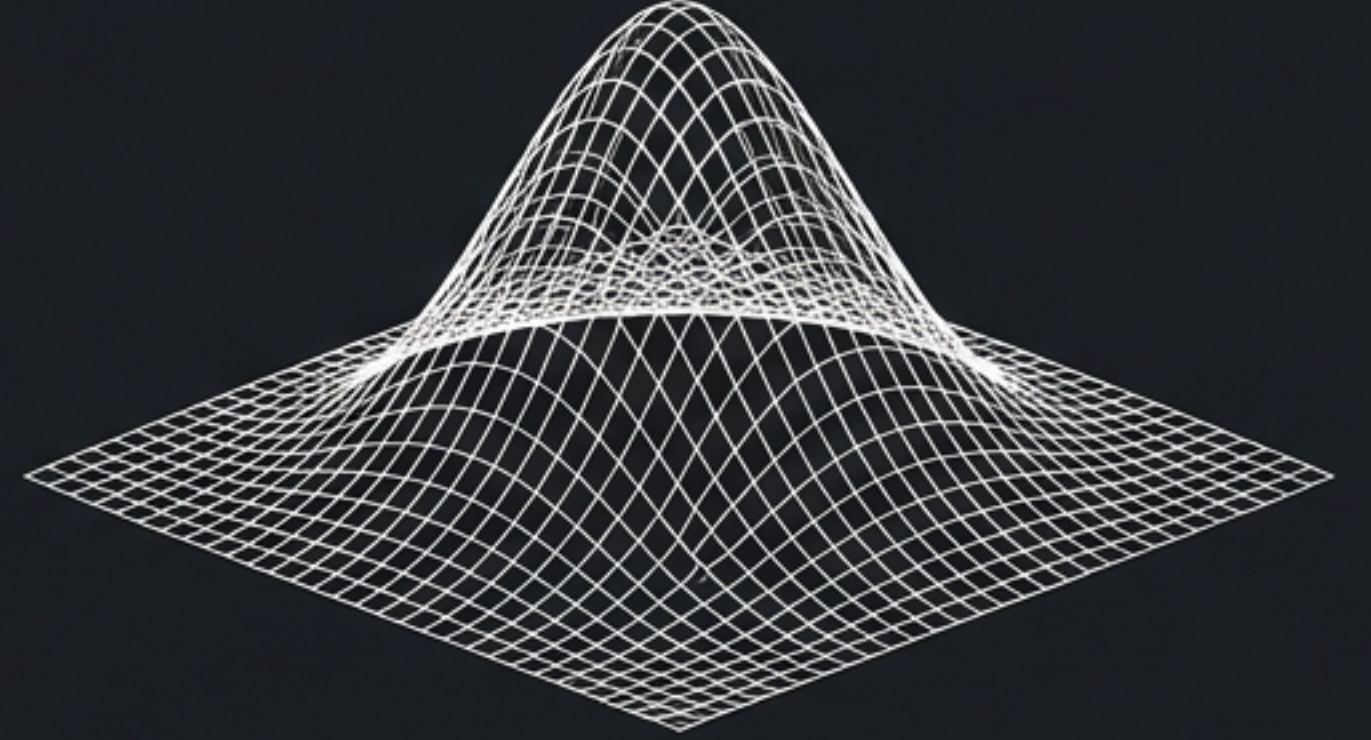
$$g(x, y) = w * f = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x - s, y - t)$$

- Uzamsal filtreleme, bir 'çekirdek' (kernel/maske) ile görüntünün konvolüsyon işlemidir.
- Çekirdek ( $w$ ), görüntü üzerinde kaydırılır.
- Her noktada, çakışan piksellerin ağırlıklı toplamı hesaplanarak merkez pikselin yeni değeri belirlenir.



# Gauss Filtresi ile Yumuşatma

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

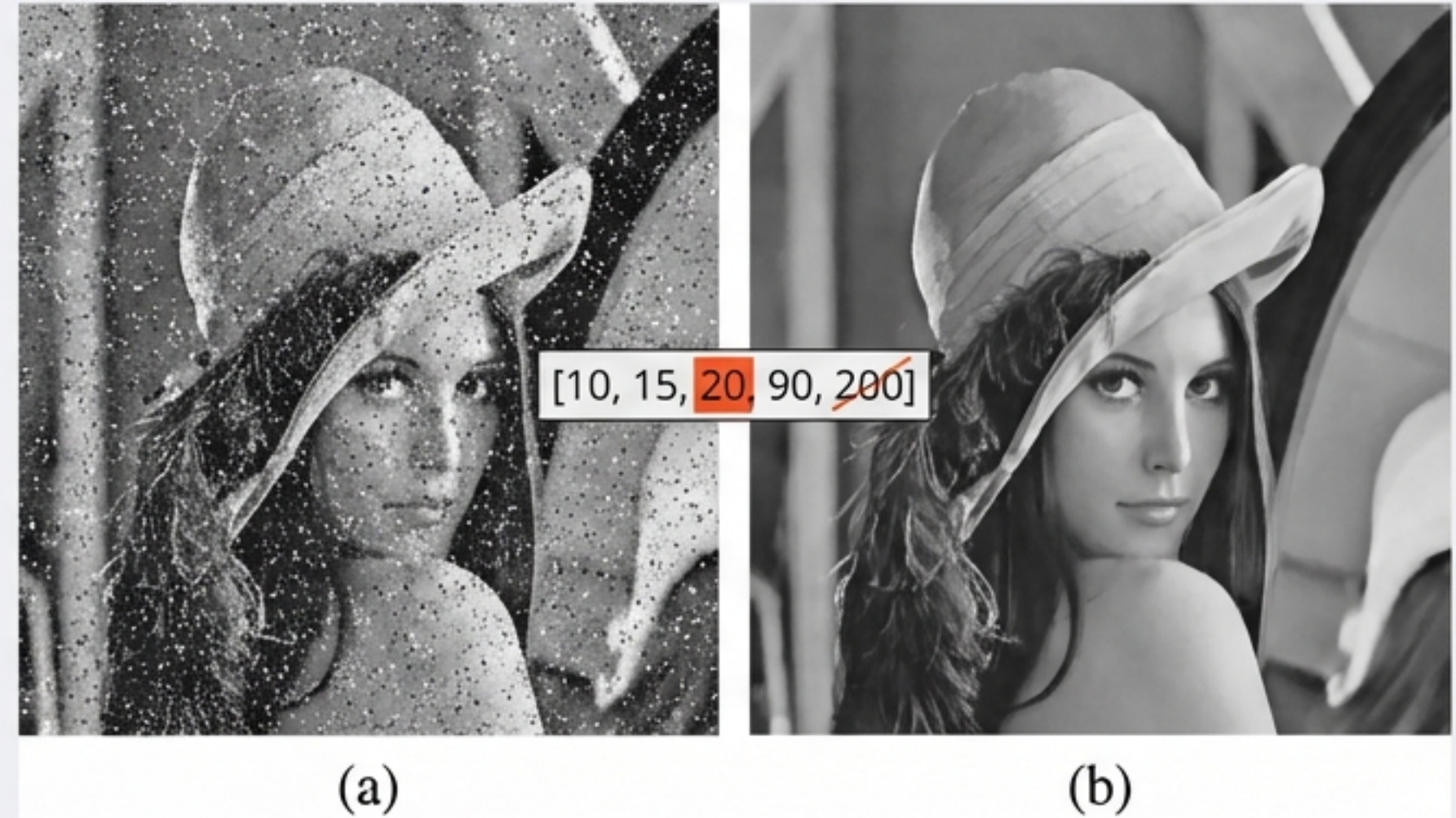


- Basit ortalamadan farklı olarak, merkezdeki piksellere daha yüksek ağırlık verir.
- "Çan eğrisi" şeklindeki bu fonksiyon, yüksek uzamsal frekansları (gürültüyü) bastırırken kenar bilgisini kutu filtreye göre daha iyi korur.
- $\sigma$  (standart sapma) arttıkça bulanıklaştırma etkisi artar.

# İstatistiksel Filtreler: Medyan Filtresi

## Sıralama İstatistikleri (Order Statistics)

- **Sorun:** Dürtü gürültüsü (Tuz ve Biber), ortalama alma işleminde görüntüyü bozar.
- **Çözüm:** Bir komşuluktaki pikseller sıralanır ve *ortanca* (medyan) değer seçilir.
- Matematiksel olarak medyan, uç değerlerden (outliers) etkilenmez, bu nedenle kenarları korurken dürtü gürültüsünü mükemmel şekilde temizler.



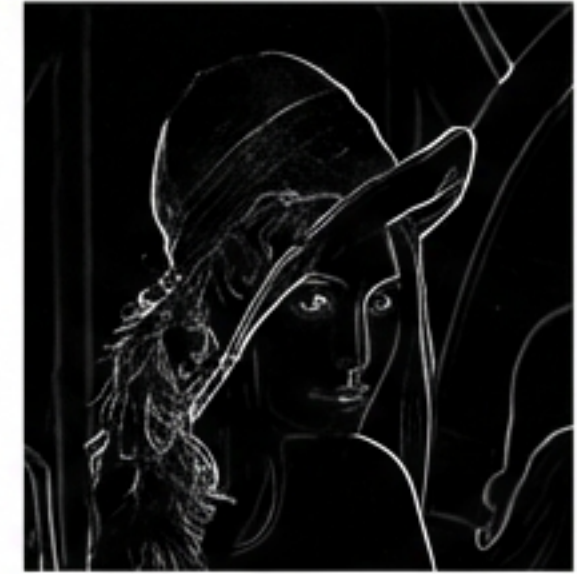
# Keskinleştirme Mantığı ve Gradyan

$$|\nabla f| \approx |G_x| + |G_y|$$

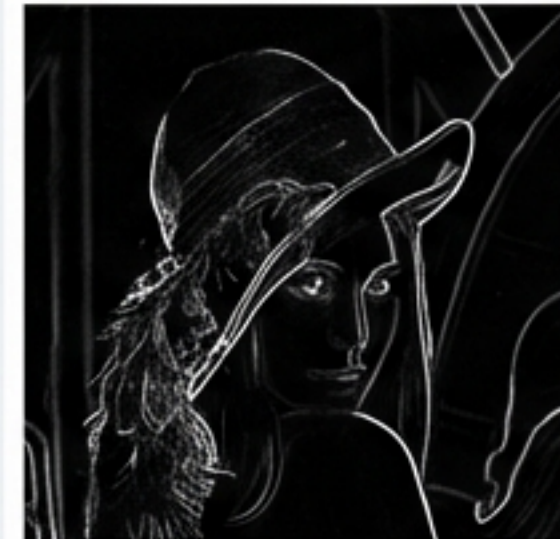
- Kenarlar, yoğunluktaki hızlı değişimlerdir. Matematikte değişim, türev ile ölçülür.
- Gradyan vektörü  $\nabla f$ , değişimin en büyük olduğu yönü gösterir.
- **Sobel Operatörü:** Hem türev alır hem de gürültüyü azaltmak için dik yönde yumuşatma yapar.



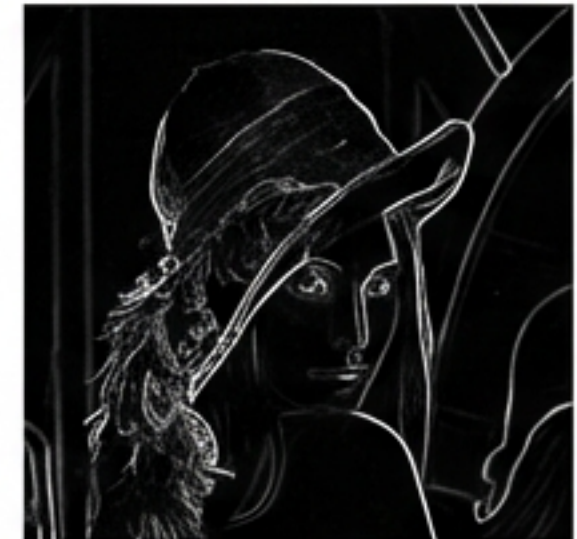
(a) Original



(b) Roberts



(c) Prewitt



(d) Sobel

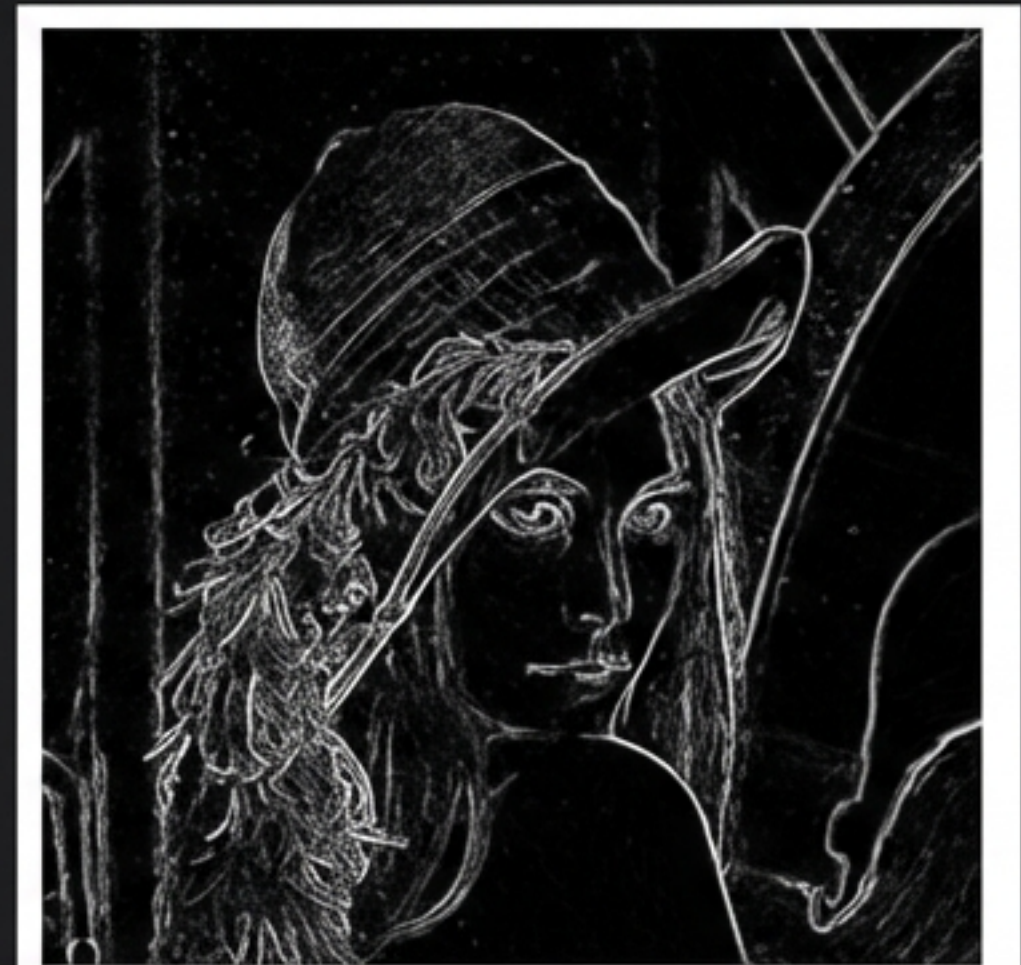
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# İkinci Türev: Laplasyen Filtresi

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Yönden bağımsız (izotropik) kenar tespiti sağlar.
- İkinci türevin 'sıfır geçişi' (zero-crossing) yaptığı noktalar, kenarın tam merkezini verir.
- Gürültüye karşı çok hassastır, bu yüzden genellikle öncesinde Gauss yumuşatması ile birlikte kullanılır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

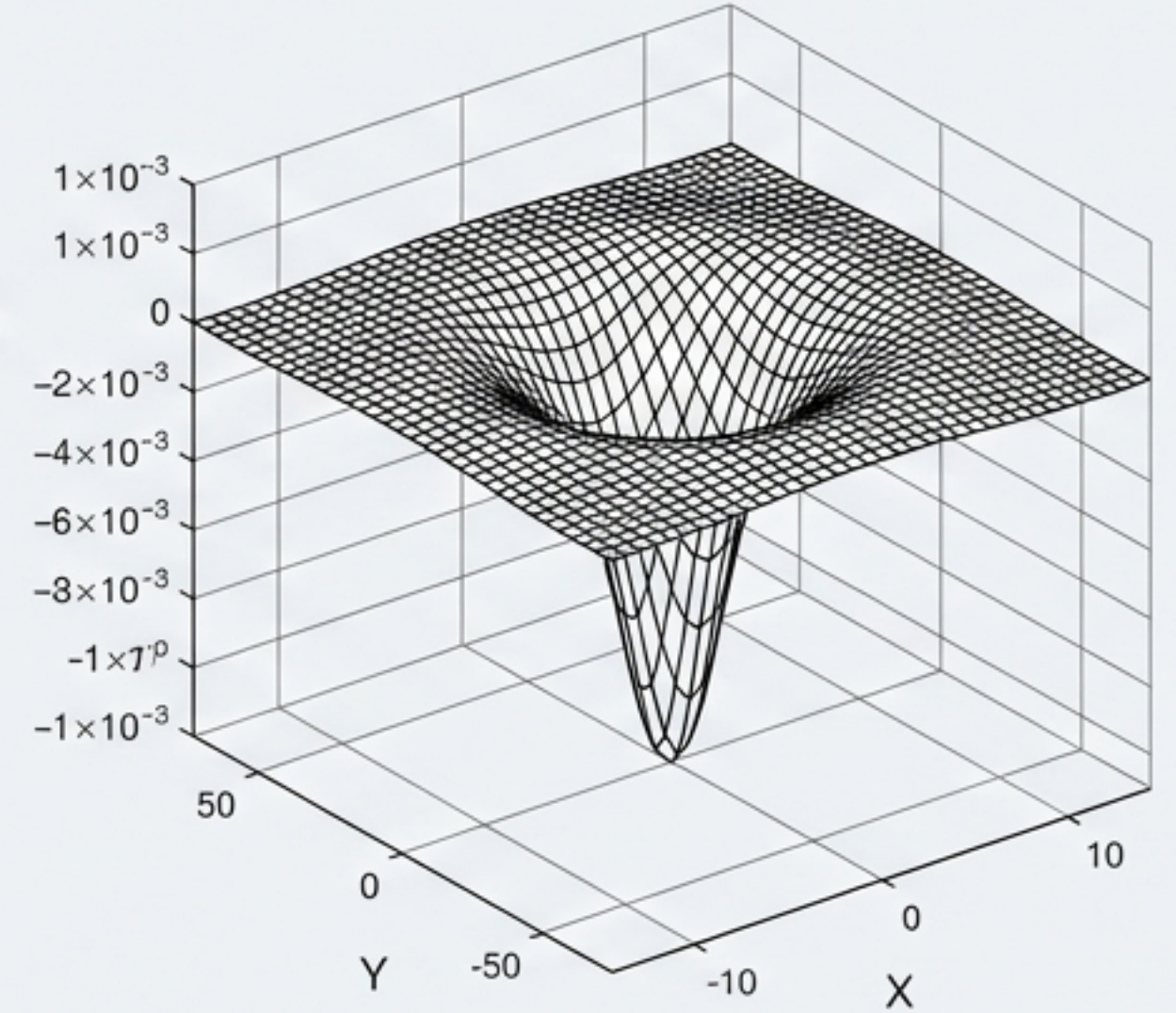


(a) Laplacian Edge Result

# Gelişmiş Keskinleştirme: LoG ve High-Boost

1. **LoG:**  $LoG(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left[ 1 - \frac{x^2+y^2}{2\sigma^2} \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$
2. **High Boost:**  $g(x, y) = A \cdot f(x, y) - \text{Lowpass}(f(x, y))$

- **LoG (Laplacian of Gaussian):** Önce Gauss ile yumuşatır, sonra Laplasyen ile kenar bulur (Meksika Şapkası operatörü).
- **High-Boost:** Orijinal görüntüden bulanık versiyon çıkarılarak “maske” elde edilir. Bu maske, orijinal görüntüye eklenerek kenarlar belirginleştirilir (Unsharp Masking).



# Kalite Ölçütleri: MSE ve PSNR

Comparison: Original vs. Noisy/Enhanced	
Orijinal vs. Gürültülü	→ High MSE / Low PSNR
Orijinal vs. İyileştirilmiş	→ Low MSE / High PSNR

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum \sum [F(j, k) - \hat{F}(j, k)]^2$$

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{(L - 1)^2}{\text{MSE}}$$

- Görüntü iyileştirmenin başarısı sadece göze hitap etmesiyle değil, sinyal-gürültü oranıyla da ölçülür.
- **MSE (Ortalama Karesel Hata):** Hatanın karesinin ortalamasıdır. Düşük olması istenir.
- **PSNR (Tepe Sinyal Gürültü Oranı):** Sıkıştırma ve iyileştirme kalitesini ölçmek için standarttır. Yüksek olması istenir.