Görüntü İşleme ve Örüntü Tanıma: Matematiksel Temeller

Frank Y. Shih'in Yaklaşımıyla Dönüşüm Tekniklerine Derinlemesine Bir Bakış

Laplace • Fourier • Z-Dönüşümü • DCT • Wavelet

İki Dünya Arasındaki Köprü: Uzamsal ve Frekans Alanları

Uzamsal Alan

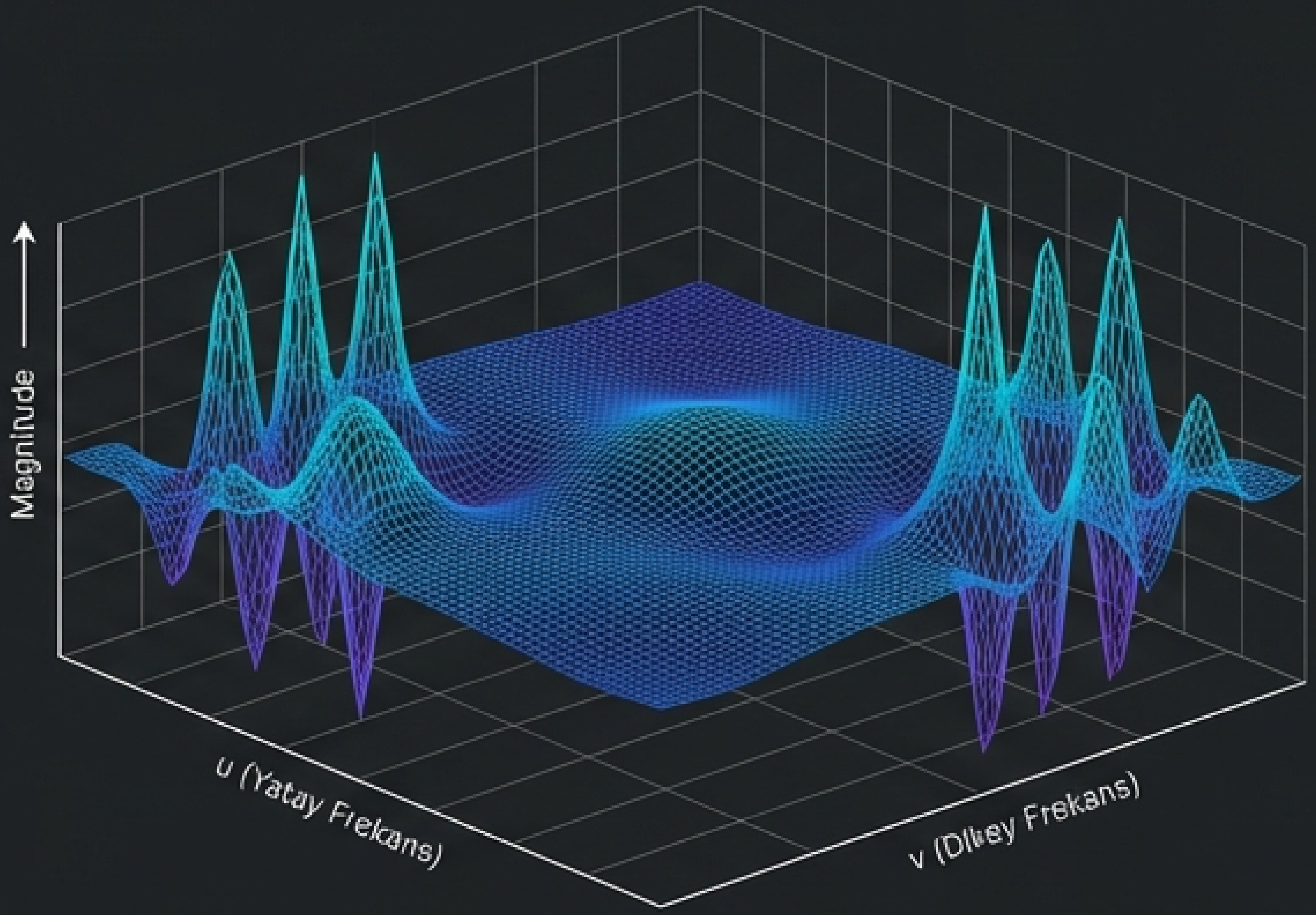
y (piksel indeksi)

120	122	118	118	121	117	123	127	124	126	126	237	240	242	25
121	120	123	119	123	119	120	120	128	130	216	241	241	240	30
119	117	120	120	126	118	119	117	119	241	240	231	239	35	20
116	119	118	118	123	120	128	118	120	238	239	240	241	35	20
116	116	119	126	124	120	124	123	120	240	240	240	239	35	20
120	112	118	118	121	119	129	120	120	240	241	240	239	35	20
121	112	118	118	119	116	123	119	120	239	245	240	239	35	20
121	129	128	123	125	120	176	117	120	234	241	240	239	35	20
120	122	126	129	120	129	117	116	120	230	234	230	239	35	20
120	122	123	120	120	126	118	119	120	123	129	223	239	35	20
120	120	118	118	127	120	123	113	120	134	125	129	236	35	79

x (piksel indeksi)

Göz Piksellerinden Bir Kesit

Frekans Alanı



Değişim Oranlarının 3B Yüzey Grafiği

- Uzamsal Alan (Spatial Domain): Görüntüyü oluşturan pikseller topluluğu.
- Frekans Alanı (Frequency Domain): Değişim oranları.

Latin Modern Cyant —— Kenar Pikselleri ⟶ Yüksek Frekans

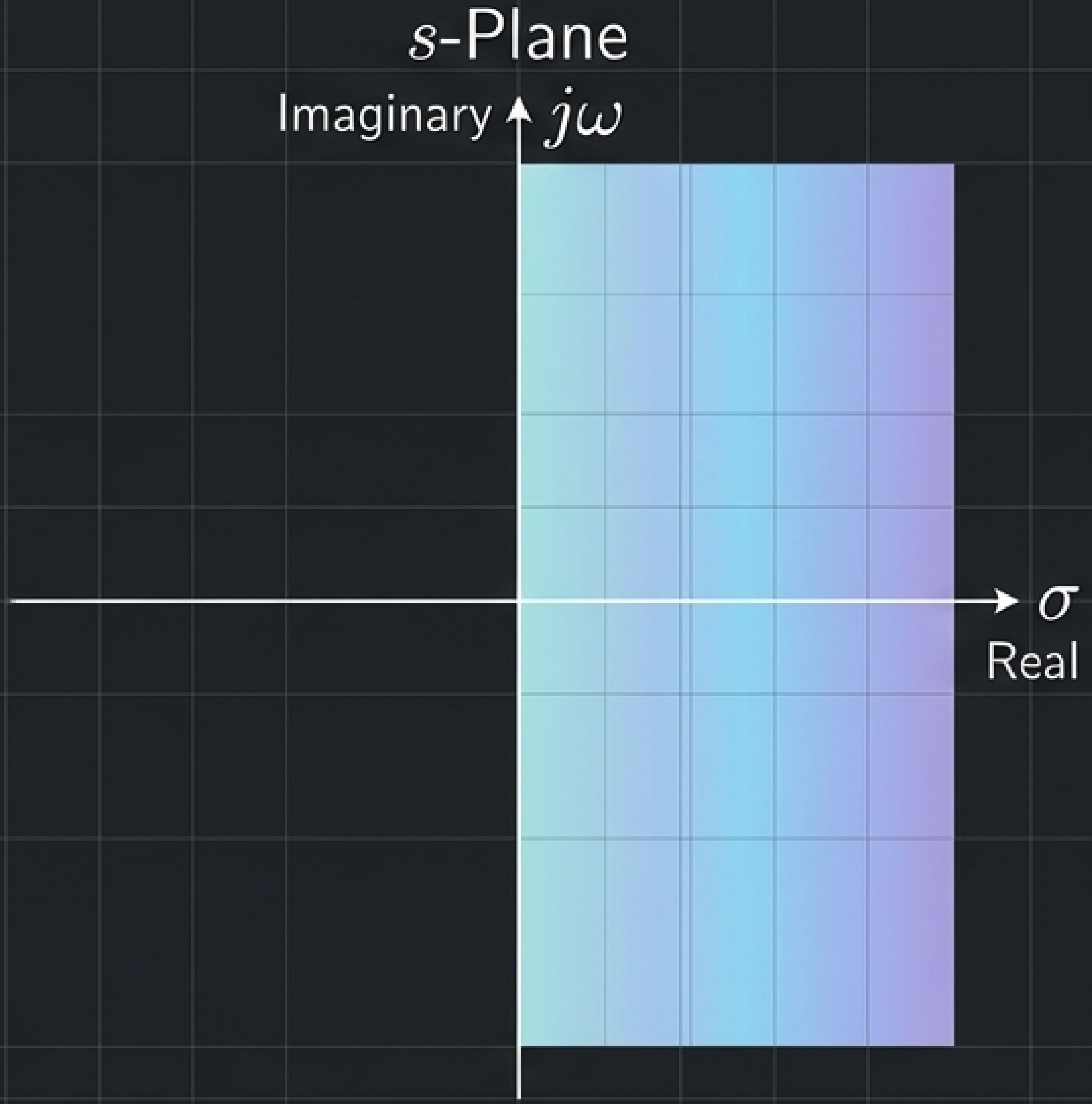
Latin Modern Math —— Nesne İç Bölgeleri ⟶ Düşük Frekans

Sürekli Zaman Sistemlerinin Analizi: Laplace Dönüşümü

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

Karmaşık Değişken:
$s = \sigma + j\omega$

- Lineerlik (Linearity)
- Zaman/Frekans Kaydırma
- Evrişim (Convolution) $\rightarrow$ Çarpım



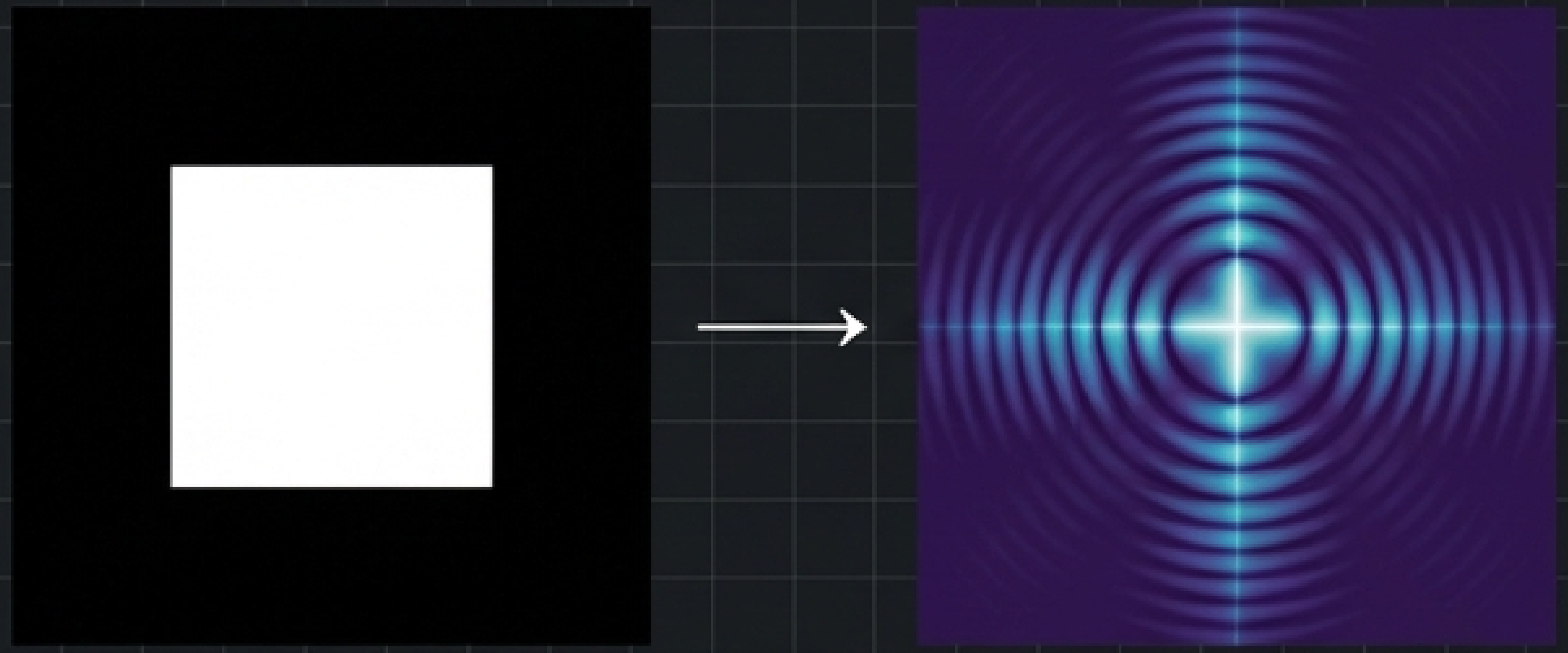
Spektral Analizin Temeli: Sürekli Fourier Dönüşümü

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Temel frekans bileşenlerinin toplamı ile sinyal temsili. Karmaşık üstel fonksiyon (complex exponential) baz fonksiyonudur.

Uzamsal vs. Frekans Alanı



Uzamsal Alan — Frekans Alanı (Magnitude)

Lineer Filtrelemenin Temeli: Evrişim (Convolution)

$$f * h \leftrightarrow F(\omega)H(\omega)$$

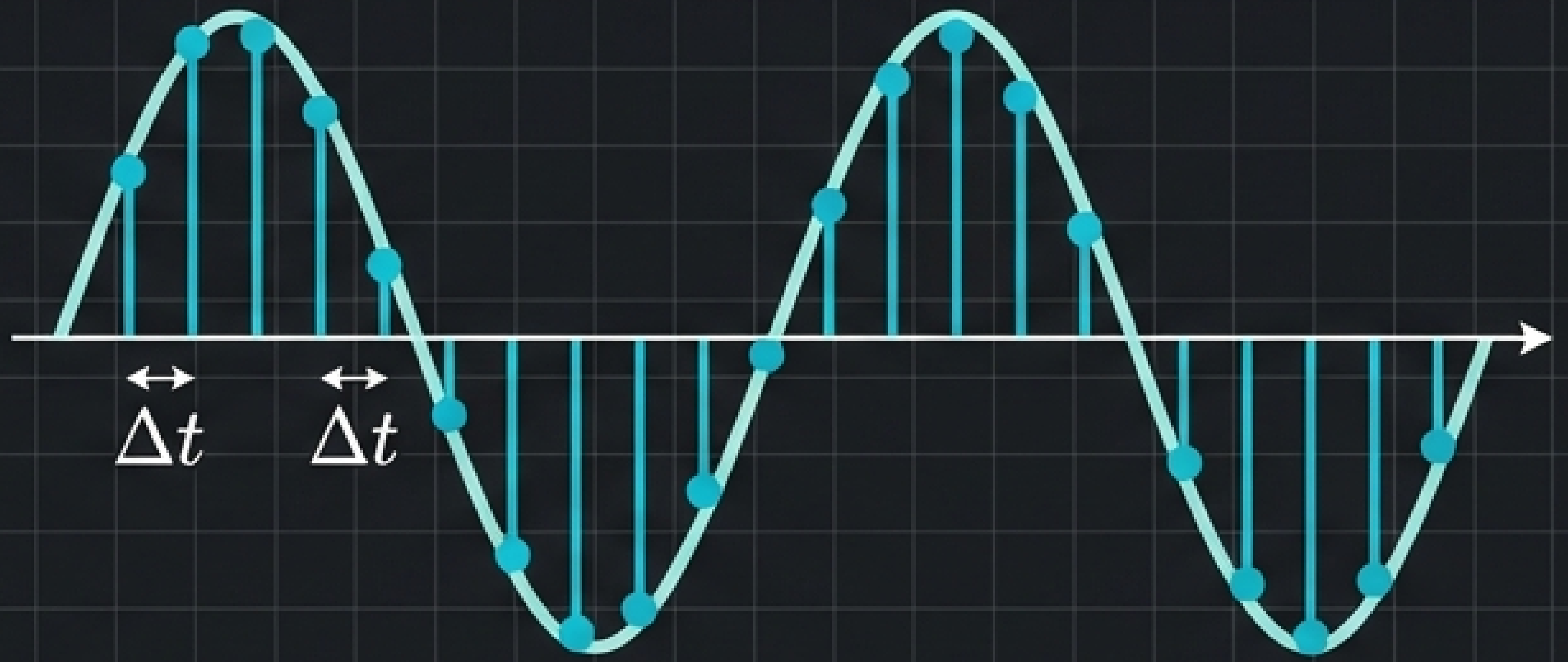
Zaman alanında evrişim, frekans alanında çarpıma karşılık gelir. (Convolution in time domain corresponds to multiplication in frequency domain.)

Dijital Dünyaya Geçiş: Ayrık Fourier Dönüşümü (DFT)

1D Definition

Bilgisayarlar sürekliliği işleyemez.
Örnekleme (Sampling) şarttır.

$$X(u) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-j2\pi ut/N}$$



Görüntüler için 2B Uygulama

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

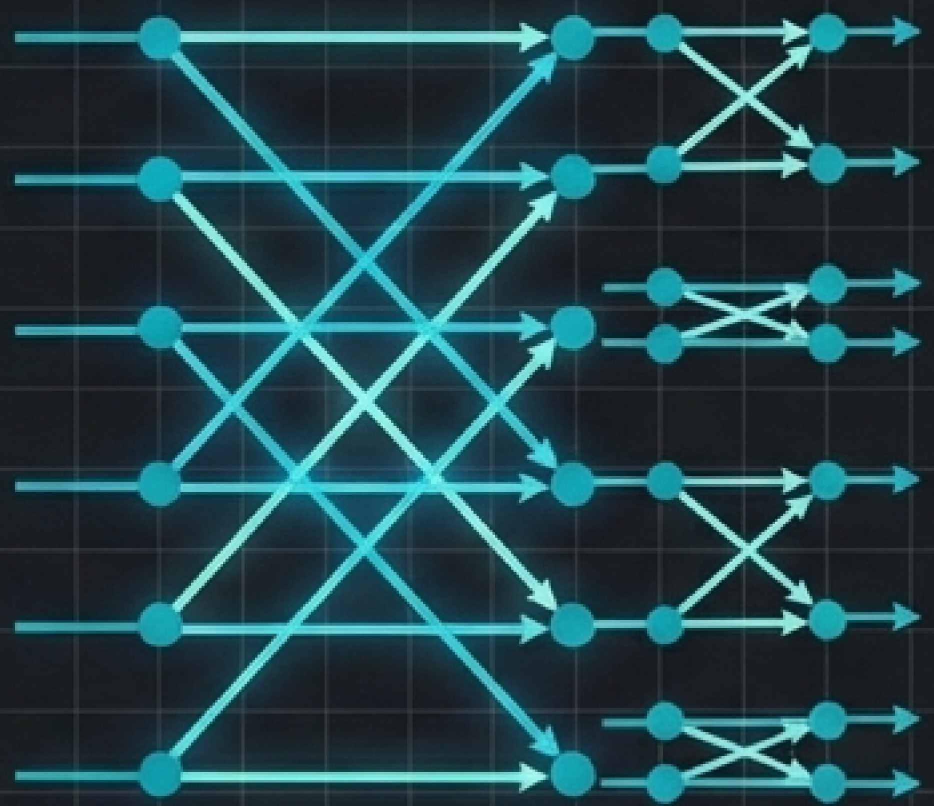
Algoritmik Optimizasyon: Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT)

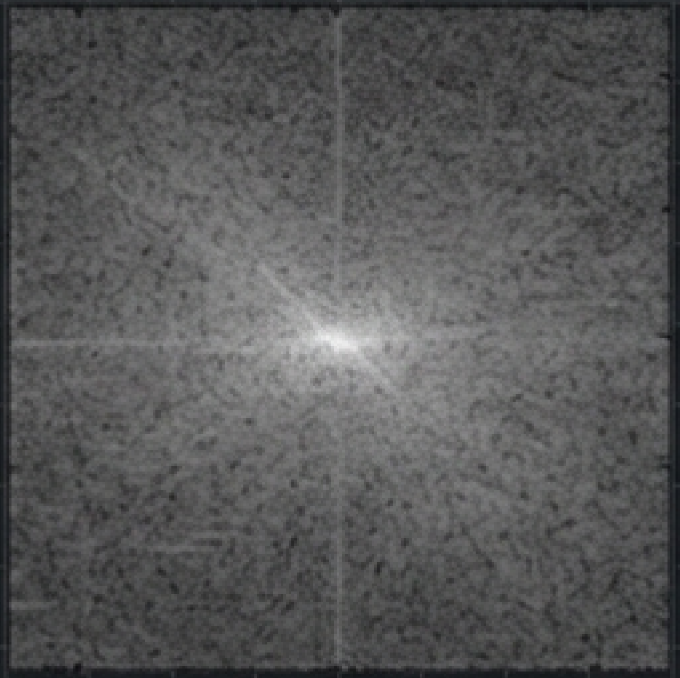
DFT: $O(N^2)$

Yüksek hesaplama maliyeti.

FFT: $O(N \log_2 N)$

Böl ve Yönet (Divide and Conquer).

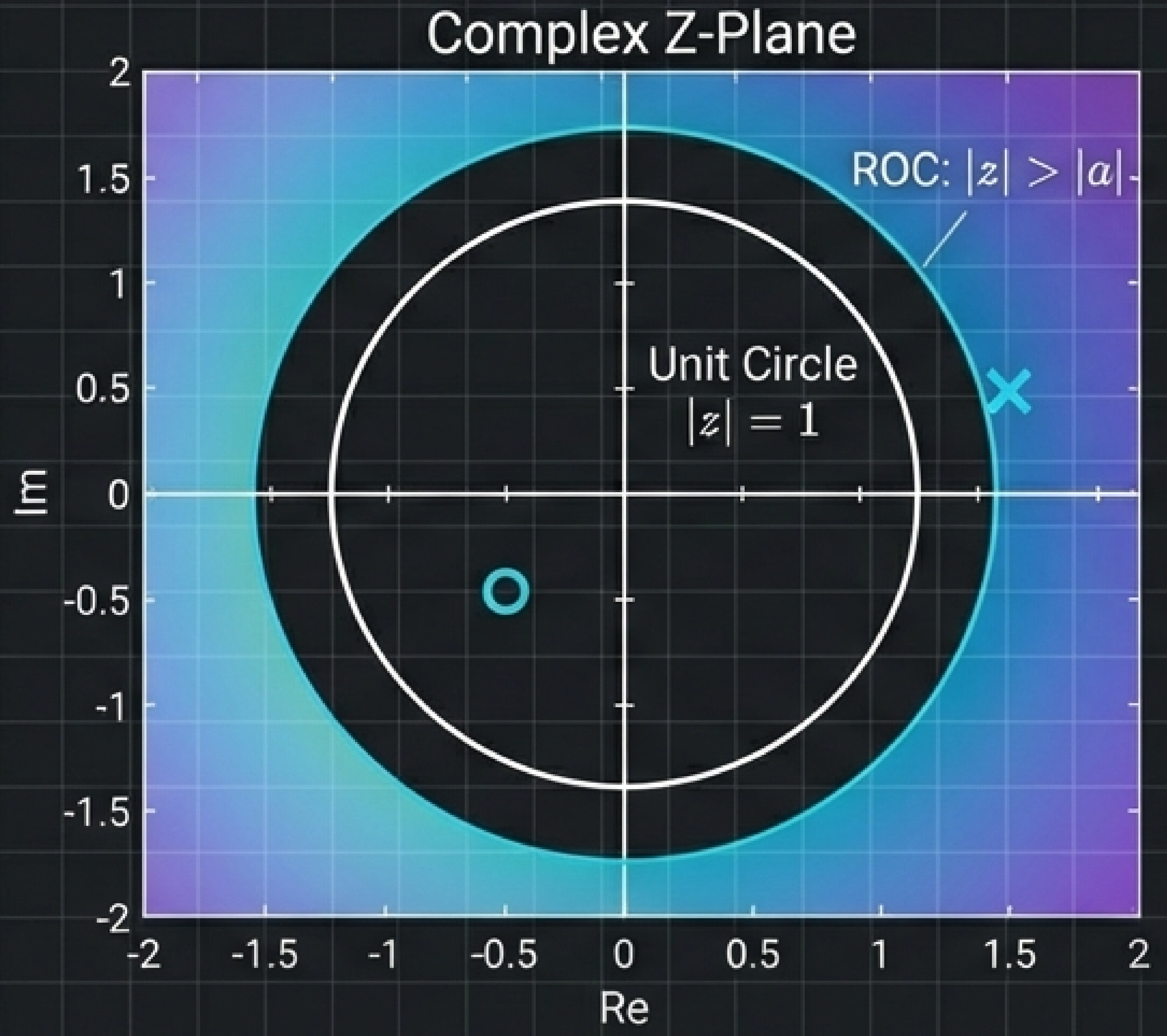




Gerçek zamanlı görüntü işlemenin motoru.

Ayrık Sistemlerin Kararlılığı: Z-Dönüşümü

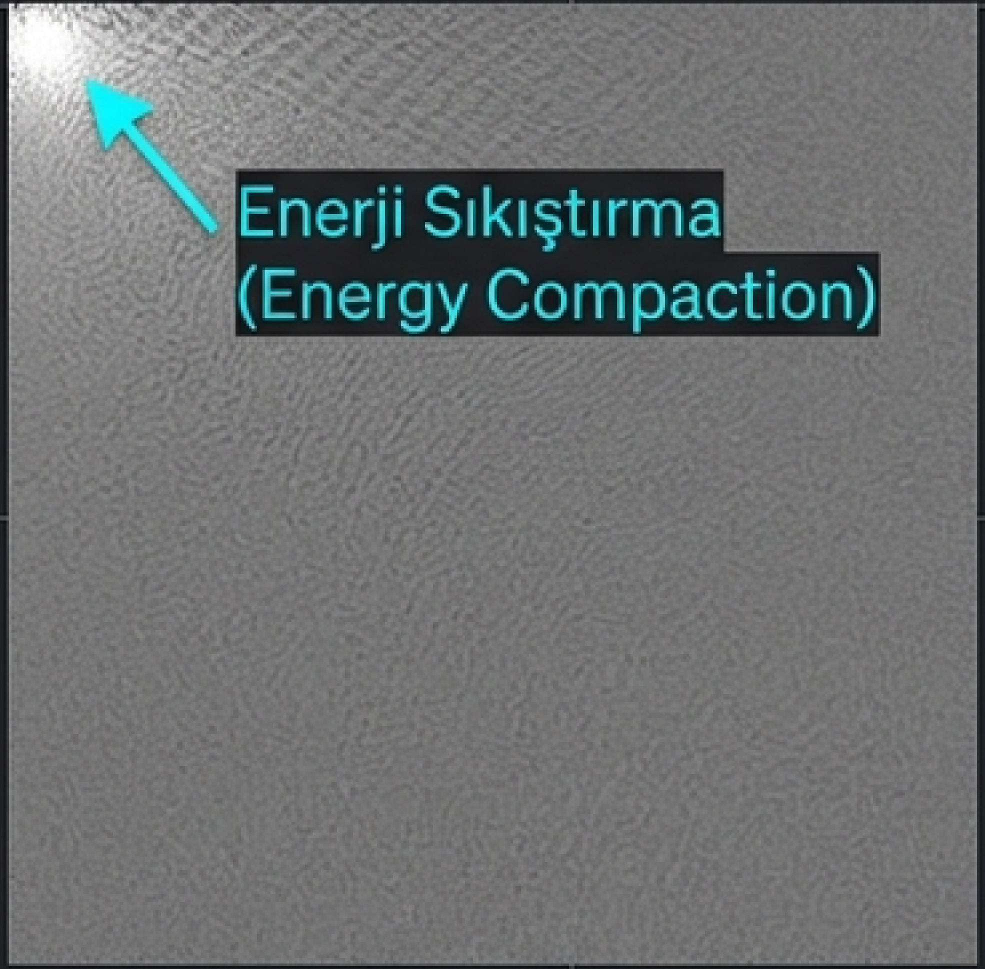
$$X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} x(t) z^{-t}$$



- Dijital filtrelerin kararlılık analizi.
- $z = e^{j2\pi\omega/N}$ olduğunda Z-Dönüşümü → Fourier Dönüşümü.

Görüntü Sıkıştırma Standardı: Ayrık Kosinüs Dönüşümü (DCT)

Original Image



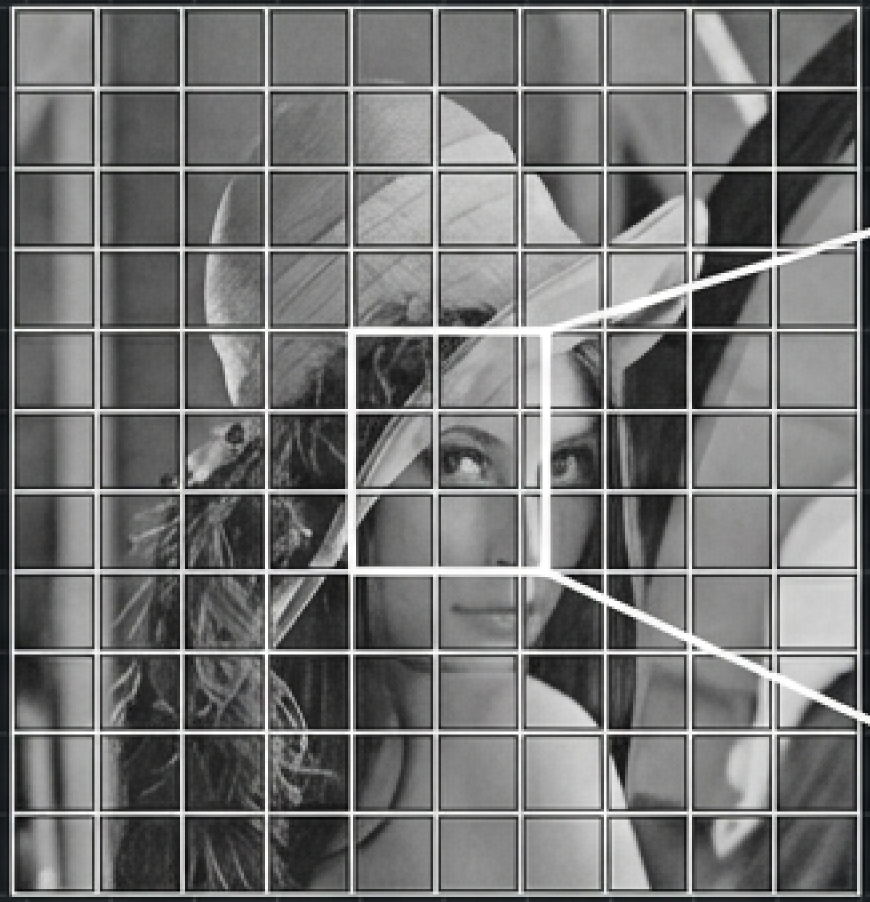
DCT spectrum

- JPEG sıkıştırmanın temeli.
- Sadece REEL (Gerçel) sayılar kullanılır.
- Yüksek frekans detayları (sağ alt köşe) atılarak sıkıştırma sağlanır.

DCT'nin Matris Gösterimi ve Blok İşleme

$$F = MfM^T$$

- f: 8×8 piksel bloğu
- M: Dönüşüm Matrisi



24	22	93	59	76	77
23	101	83	97	65	91
56	99	85	59	93	71
37	53	96	65	62	41
41	83	67	58	53	33
43	55	69	41	41	53
39	57	65	77	68	81
83	81	73	85	75	96

$F = MfM^T \longrightarrow$

		-0.3	-0.7	-0.3	-0.6	-0.7	-0.8	-0.7
		-0.4	-0.3	-0.2	-0.7	-0.8	-0.9	-0.4
-0.3	-0.7	0.2	-0.5	-0.2	-0.5	-0.6	-0.5	-0.7
-0.4	-0.3	-0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	-0.4	-0.4
-0.5	-0.5	-0.3	-0.1	0.2	-0.1	-0.2	-0.3	-0.7
-0.6	-0.6	-0.3	-0.5	-0.7	-0.3	-0.1	-0.2	-0.2
-0.8	-0.7	-0.7	-0.8	-0.5	-0.3	-0.3	-0.7	
-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.7	-0.6	-0.5	-0.9	

Uygulama: JPEG, MPEG, JVT Standartları.

Fourier’in Sınırlarını Aşmak: Dalgacık (Wavelet) Dönüşümü

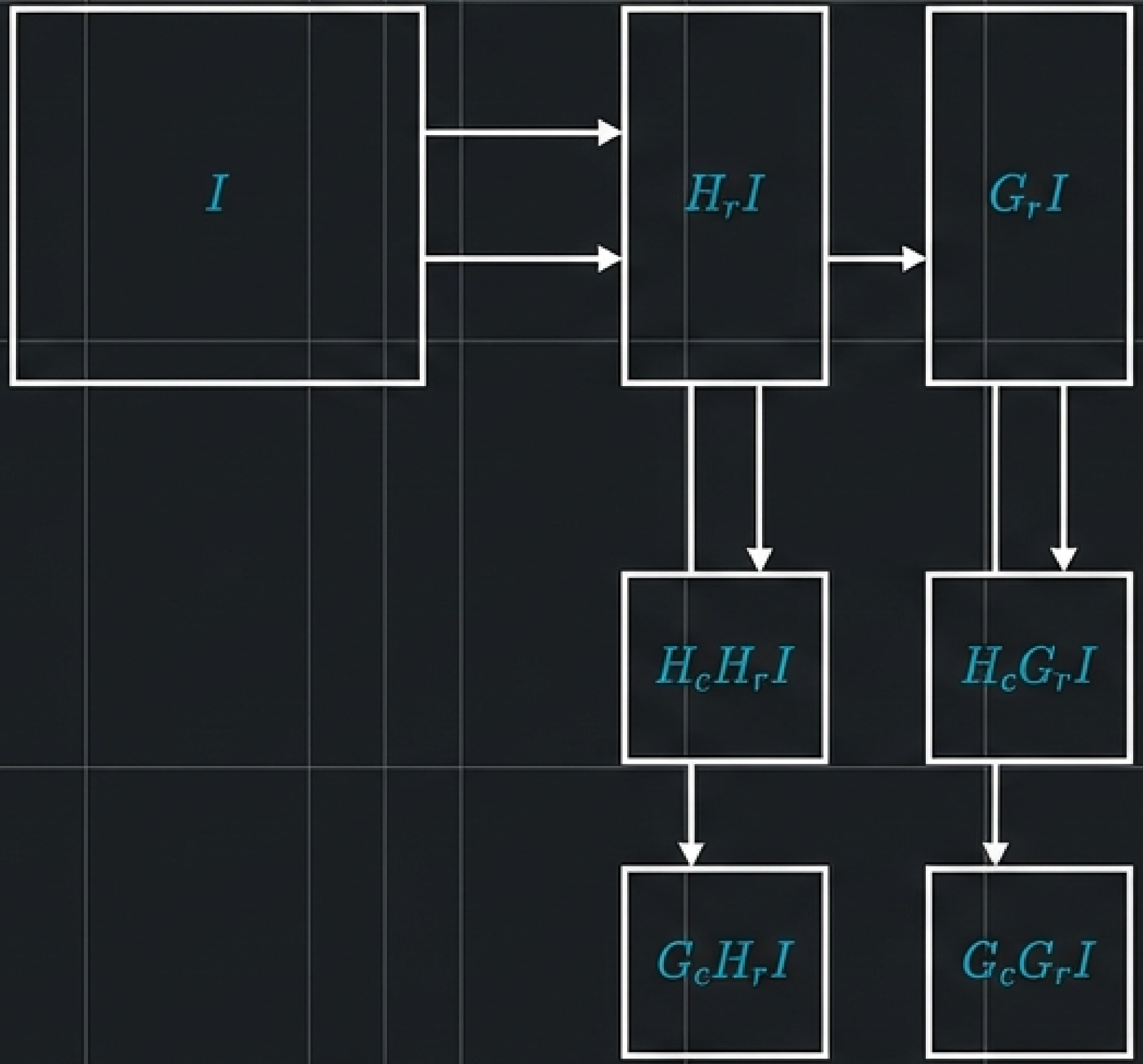
Fourier: Sonsuz Süre (Zaman bilgisi yok)

Wavelet: Yerelleştirilmiş (Zaman ve Frekans)

$$\Psi_{t,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

- Sorun: Fourier ‘ne’ olduğunu söyler, ‘nerede’ olduğunu söylemez.
- Çözüm: Uzay-Frekans Ayrıştırması.
- s (Dilation): Ölçekleme. t (Translation): Öteleme.

En Basit Dalgacık: Haar Ayrık Dalgacık Dönüşümü (DWT)



- **Alçak Geçiren (Low-Pass):** Ortalama (Yaklaşım)
- **Yüksek Geçiren (High-Pass):** Fark (Detay/Kenar)

Ortogonal, simetrik ve kenar algılamada etkili.

Uygulama Örneği: 4x4 Haar DWT Hesaplaması

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$
$a5$	$a6$	$a7$	$a8$
$a9$	$a10$	$a11$	$a12$
$a13$	$a14$	$a15$	$a16$

Original image

$b1$	$b2$	$b3$	$b4$
$b5$	$b6$	$b7$	$b8$
$b9$	$b10$	$b11$	$b12$
$b13$	$b14$	$b15$	$b16$

Calculation on rows

$$b1 = (a1 + a2)\,/\,2$$
$$b2 = (a3 + a4)\,/\,2$$
$$b3 = (a1 - a2)\,/\,2$$
$$b4 = (a3 - a4)\,/\,2$$

$c1$	$c2$	$c3$	$c4$
$c5$	$c6$	$c7$	$c8$
$c9$	$c10$	$c11$	$c12$
$c13$	$c14$	$c15$	$c16$

Calculation on columns

$$c1 = (b1 + b5)\,/\,2$$
$$c5 = (b9 + b13)\,/\,2$$
$$c9 = (b1 - b5)\,/\,2$$
$$c13 = (b9 - b13)\,/\,2$$

Karşılaştırmalı Özet: Hangi Dönüşüm Nerede Kullanılır?

Laplace / Z-Dönüşümü	Sistem Kararlılığı & Filtre Tasarımı	Analog/Dijital Devreler
Fourier (DFT)	Spektral Analiz	Global Filtreleme (Zaman bilgisi yok)
DCT	Enerji Sıkıştırma	JPEG, MPEG (Reel Sayılar)
Wavelet (DWT)	Çoklu Çözünürlük (Multi-resolution)	JPEG2000, Kenar Algılama