

## İçindekiler Tablosu

1. SAYISAL ÇÖZÜMLEME ( ANALİZ ) YÖNTEMLERİ.....	5
<b>1.1.</b> Matematiksel Modelleme .....	5
1.1. Taylor Serisi .....	6
1.2. Hatalar ve Hataların Kaynakları .....	7
1.2.1. Modelleme Hatası .....	7
1.2.2. Ölçme Hatası.....	7
1.2.3. Sayısal Hatalar .....	7
1.2.4. Hata Ölçekleme .....	15
2. MATRİSLER .....	17
2.1. Matrislerde Temel İşlemler .....	17
2.1.1. İki Matrisin Eşitliği.....	17
2.1.2. İki Matrisin Toplamı.....	18
2.1.3. Bir Matrisle Bir Skalerin (Sayı) Çarpımı .....	19
2.1.4. Sıfır Matrisi .....	19
2.1.5. Bir Matrisin Toplamsal Tersine.....	20
2.1.6. İki Matrisin Farkı .....	20
2.1.7. İki Matrisin Çarpımı .....	21
2.2. Matrislerin Temel Özellikleri .....	23
2.2.1. Birleşme Özelliği .....	23
2.2.2. Değişme Özelliği .....	23
2.2.3. Dağılma Özelliği .....	23
2.3. Bazı Özel matrisler .....	24
2.3.1. Kare Matrisler .....	24
2.3.2. Birim Matris .....	24
2.4. Matrisin Devriği (Transpozese).....	25
2.5. Matris Determinantı .....	25
2.6. Kofaktör Matris ve Ek (Adjoint) Matris.....	27
2.6.1. Singüler Matris .....	28
2.7. Matris Tersine.....	29
2.7.1. Denklemi Çözerek Matris Tersini Bulmak.....	29
2.7.2. Kofaktörünü Alarak Matris Tersini Bulma .....	30
2.7.3. Elementer Yöntemlerle Ters Bulma; Satır Dönüşümleri Yöntemi. ....	31

2.7.4.	Ters matrisle ilgili birkaç özellik.....	34
3.	MATLAB.....	35
4.	LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....	36
4.1.	Analitik Çözüm Yöntemleri.....	37
4.1.1.	Yok Etme Ve Yerine Koyma Metodu.....	37
4.1.2.	Katsayı Matrisinin Tersini Alarak Yapılan Çözüm.....	37
4.1.3.	Cramer Yöntemi.....	40
4.1.4.	Gauss Eliminasyon Yöntemi.....	41
4.1.5.	Gauss Jordan Yöntemi.....	43
4.1.6.	Choleski (L U Ayrıştırması) Yöntemi.....	45
4.2.	İteratif Çözüm Yöntemleri.....	46
4.2.1.	Gauss Siedel Yöntemi.....	46
4.2.2.	Jakobi (Basit İterasyon) Yöntemi.....	49
5.	DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	50
5.1.	Taylor Serisi.....	50
5.2.	Aralığı İkiye Bölme Yöntemi (Bisection).....	53
5.3.	Doğrusal İnterpolasyon (False Position) Yöntemi.....	55
5.4.	Basit İterasyon Yöntemi.....	59
5.5.	Newton – Rapson Yöntemi.....	60
5.6.	Kiriş Değiştirme (Secant) Yöntemi.....	62
5.7.	Müller Yöntemi.....	65
5.8.	Genelleştirilmiş Newton-Rapson Yöntemi.....	68
6.	İTERPOLASYON (ARA DEĞER BULMA) YÖNTEMİ VE SONLU FARKLAR.....	71
6.1.	Sonlu Farklar.....	71
6.1.1.	İleri Yönlü Sonlu Farklar.....	71
6.1.2.	Geri Yönlü Sonlu Farklar.....	73
6.1.3.	Merkezi Yön Sonlu Farklar.....	74
6.2.	İnterpolasyon Yöntemleri.....	76
6.2.1.	Gregory Newton İnterpolasyon Yöntemi.....	76
6.2.2.	Merkezi Farklarla İnterpolasyon.....	78
6.2.3.	Langrange İnterpolasyon Yöntemi.....	79
7.	EĞRİ UYDURMA YÖNTEMLERİ.....	82
7.1.	En Küçük Kareler Yöntemi.....	83
7.1.1.	Lineer Denklem Uydurma.....	84

7.1.2.	Polinom Fonksiyonlar .....	85
7.1.3.	Rasyonel Dağılımlı Veriler İçin En Küçük Kareler Yöntemi.....	86
7.1.4.	Exponansiyel ( $e^x$ ) Fonksiyonlar .....	87
7.1.5.	Trigonometrik Fonksiyonlar .....	88
<b>8.</b>	<b>SAYISAL TÜREV .....</b>	<b>90</b>
8.1.	Sonlu Farklarla Sayısal Türev .....	90
8.1.1.	Geri-Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev .....	90
8.1.2.	İleri-Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev.....	91
8.1.3.	Merkezi Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev .....	91
8.2.	Taylor Serisi İle Sayısal Türev.....	93
8.3.	Gregory-Newton İnterpolasyon Formülleriyle Sayısal Türev .....	98
8.4.	Bessel İnterpolasyon Formülü İle Sayısal Türev .....	99
8.5.	Polinomlarla Sayısal Türev.....	102
<b>9.</b>	<b>DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b>	<b>105</b>
9.1.	Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	105
9.2.	Taylor ve Maclourin Serileri ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü .....	106
9.3.	Euler Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	107
9.4.	Runge-Kutta Yöntemleri ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	108
9.4.1.	İki Adımlı Runge-Kutta Yöntemi .....	108
9.4.2.	Dört Adımlı Runge-Kutta Yöntemi.....	110
9.5.	Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü .....	112
9.6.	Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Sayısal Çözümleme .....	116
9.6.1.	Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması .....	116
9.6.2.	Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklarla Çözüm Yöntemleri .....	117
<b>10.</b>	<b>SAYISAL İNTEGRAL .....</b>	<b>127</b>
10.1.	Newton-Cotes İntegrasyon Formülleri İle Sayısal İntegral .....	127
10.1.1.	Polinomlarla Sayısal İntegral, Yamuk (Trapez) Kuralı .....	128
10.1.2.	Simpson Kuralı .....	132
10.2.	Gregory-Newton İnterpolasyon İle Sayısal İntegral .....	139
10.3.	Bessel İnterpolasyon Formülü ile Sayısal İntegral .....	140
<b>11.</b>	<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>143</b>
EK-1.....		144
<b>11. MATLAB VE PROGRAMLAMA MANTIĞI.....</b>		<b>144</b>
EK-2.....		146



# 1. SAYISAL ÇÖZÜMLEME ( ANALİZ ) YÖNTEMLERİ

Sayısal analiz (nümerik analiz veya sayısal çözümleme) matematik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümlenme tekniğidir. Genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkânsız olan matematik problemleri belli hata aralıklarında çözümlemek için kullanılır. İkinci dereceden cebirsel denklemler sayısı fazla olmayan cebirsel denklem sistemleri lineer diferansiyel denklemler ve sistemleri, düzgün geometriye sahip kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler ve sistemlerinin analitik yöntemlerle çözüme gidilmesine karşılık diğer durumlarda pek kolay olmamaktadır. Hatta çoğu kere bu imkansızdır. Bundan dolayı büyük denklem sistemleri, lineer olmama durumu ve karmaşık geometri durumlarında sayısal yöntemler veya deneysel yöntemler uygulanmaktadır.

Elektronik araçlar sayısal analizin ayrılmaz bir parçasıdır. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayısal yöntemlerin yoğunluğunu ve etkinliğini artırmıştır. Sayısal işlemler için süper bilgisayarlar kullanılabileceği gibi bunun yanında küçük hesap makineleri de kullanılabilir. Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için BASIC, Fortran, Pascal, C, C++, C#, .. gibi genel amaçlı programlama dillerinden biri kullanılabilir. Fakat bilgisayar programı yazmak zahmetli bir iş olduğu için matematiksel işlemler yapabilen ticari paket programları, örnek olarak Mathematica, MatLab veya MathCAD, gibi yazılımların kullanımı tercih edilir.

Analitik bir bağıntı yerine deneysel sonuçlar halinde ortaya çıkan değerlerden faydalanarak konuyla alakalı farklı verilere ulaşmak istediğimizde veya doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde sayısal çözümleme yöntemleri tercih edilir. Örneğin hareket halindeki bir aracın zaman aralıklarında hız değeri kaydedilmiş olsa bu değerler analitik çözüm yönteminin değerlerine uygun olmayacaktır.

$\frac{t(sn)}{v(\frac{m}{sn})}$  0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 Bu tablodaki değerlerden;  
0,4 9,9 9,4 9,3 9,4 10,2

- Kaydedilmemiş farklı zaman değerleri için hız değerlerini  $V = \frac{x}{t}$
- Herhangi bir zaman değeri için ivmeyi  $a = \frac{dv}{dt}$
- Alınan ortalama yolu  $x(t) = \int_{t_1}^{t_2} V dt$

Hesaplamak için analitik bağıntıları kullanamayız. Bu durumda elde edilen verilerden faydalanarak istenilen değerleri elde etmek için çeşitli sayısal çözümleme yöntemleri kullanılır.

## 1.1. Matematiksel Modelleme

Doğadaki olaylar ve oluşumlar bilimsel yöntemlerle incelenirken değeri değiştikçe olayların seyrini veya oluşumların sonucunu etkileyen büyüklüklere değişkenler denir. İnceleme

sonucunda değişkenler arasındaki ilişkilerden tablo değerleri çeşitli grafikler veya cebirsel, diferansiyel ve integral denklemler veya sistemleri elde edilir.

**Matematiksel model;** Fiziksel bir sistem ya da işlemin temel bileşenlerinin ve davranışının, matematiksel ifadelerle (terimlerle) formölasyonu, denklem veya denklemleri olarak tanımlanır.

*Bağımlı Değişken = f (Bağımsız değişkenler, parametreler, Zorlayıcı Fonk.)*

Bu eşitlik (model), basit matematiksel fonksiyonlarla da, karmaşık diferansiyel denklemlerle de ifade edilebilir. Matematiksel modellerdeki tanımlamalar;

**Bağımlı değişkenler:** Sistemin davranışını ya da durumunu yansıtan karakteristik.

**Bağımsız değişkenler:** Sistemin davranışının incelendiği boyutlar(zaman, mesafe, v.b).

**Parametreler:** Sistemin özelliklerini ya da bileşenlerini yansıtan parametreler.

**Zorlayıcı fonksiyonlar:** Sisteme etkiyen dış etkiler şeklindedir.

### 1.1. Taylor Serisi

$f(x) = a$	$a = f(x) = f(0)$	$f(x) = f(0)$
$f(x) = a + bx$ $f'(x) = b$	$a = f(0)$ $b = f'(0)$	$f(x) = f(0) + f'(0)x$
$f(x) = a + bx + cx^2$ $f'(x) = b + 2cx$ $f''(x) = 2c$	$a = f(0)$ $b = f'(0)$ $c = \frac{f''(0)}{2}$	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$
$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ $f'(x) = b + 2cx + 3dx^2$ $f''(x) = 2c + 6dx$ $f'''(x) = 6d$	$a = f(0)$ $b = f'(0)$ $c = \frac{f''(0)}{2}$ $d = \frac{f'''(0)}{6}$	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Maclaurin Serisi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Taylor Serisi

## 1.2. Hatalar ve Hataların Kaynakları

Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözümlerinde yapılan hatalar genellikle üçana başlıkta toplanır. Bunlar modelleme hataları, ölçme hataları ve sayısal hatalardır.

### 1.2.1. Modelleme Hatası

Bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır. Örnek olarak serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.

### 1.2.2. Ölçme Hatası

Deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır. Yukarıdaki örnekte eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken geçen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.

### 1.2.3. Sayısal Hatalar

Diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır. Genel olarak sayısal hataları iki ana gruba ayırabiliriz: *kesme hataları* (truncation error) ve *yuvarlama hataları* (round off). Bu hatalara başlamadan önce sayıların bilgisayarda hafızada saklanma şekli ve bundan kaynaklanan hataların neler olduğu incelenecektir.

#### 1.2.3.1. Yuvarlama Hatası

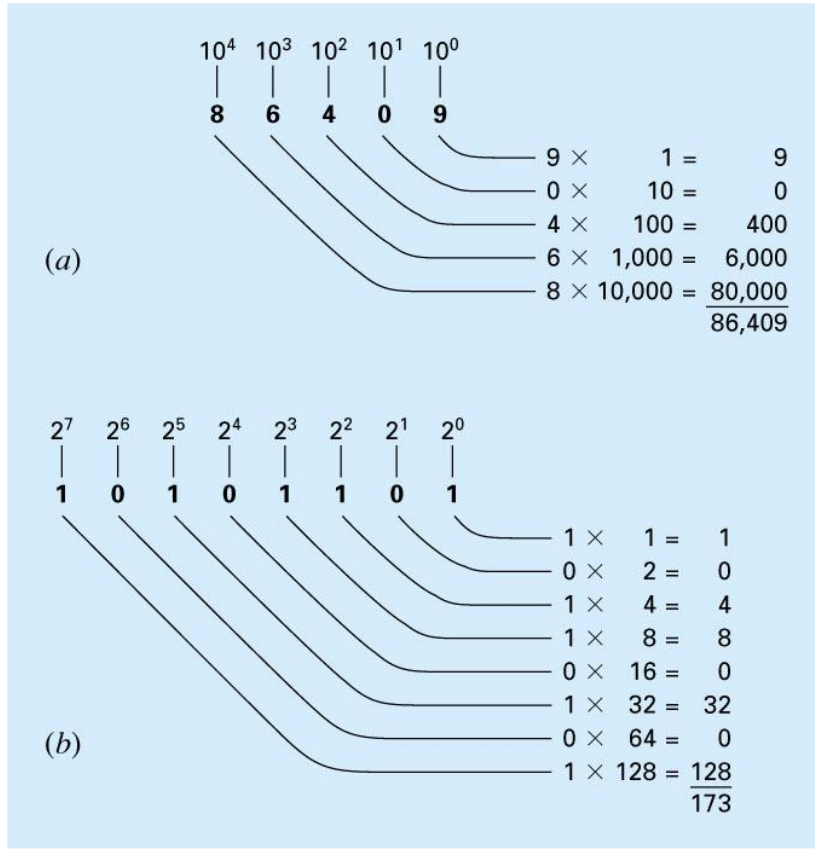
Örnek olarak  $1/3$  kesrini bilgisayar 0.33333... gibi belli adet hane kullanarak yazar. Sayıların tanımlanması için kaç hane kullanılacağı rakamların nasıl tanımlandığı ve bilgisayarın mimarisi ile ilgilidir. Bu tür hatalara **yuvarlama hatası** (round-off error) denir.

##### 1.2.3.1.1. Sayıların bilgisayarda gösterimi

Sayısal yuvarlatma hataları doğrudan sayıların bilgisayarda saklanma şekliyle ilgilidir. Bilginin gösterildiği en temel birim kelime olarak bilinir. Bu büyüklük bir dizi iki tabanına göre yazılmış sayı veya bit'ten meydana gelir. Sayılar tipik olarak bir veya daha fazla kelime şeklinde saklanır. Bunun nasıl yapıldığını anlamak için, önce sayı sistemleriyle ilgili bazı bilgileri gözden geçirmek gerekir.

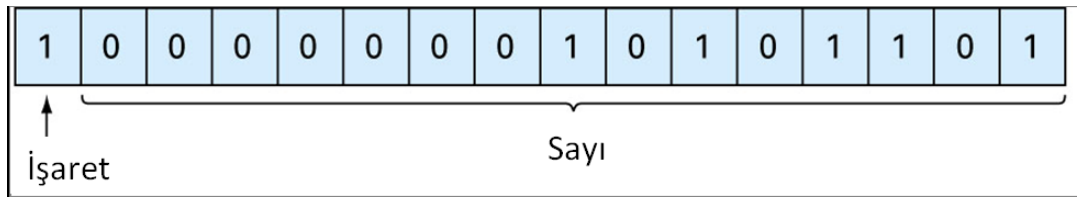
**Sayı sistemleri.** En bilinen sayı sistemi 10-tabanlı sayı sistemidir. On tabanlı sistem sayıları göstermek için on adet rakam kullanır. Bilgisayarlar ise 2-tabanlı sistem kullanır. Bunun

durum, sayısal bilgisayarların mantık birimlerinin açık/kapalı konumlu elektronik elemanlar olmasıyla ilgilidir. Şekil 1.1 sistemlerin 10 ve 2 tabanlarına göre nasıl çalıştığı görülmektedir.



Şekil 1.1 (a) Ondalık (10 tabanlı) (b) İkili (2-tabanlı) sistemler

**Tamsayıların gösterimi.** İşaretili büyüklük yöntemi adı verilen en doğrudan yaklaşımda, kelimenin ilk biti işareti gösterir, 0 pozitif 1 negatif anlamına gelir. Geri kalan bit'ler sayıyı saklamakta kullanılır. Örneğin -173 sayısının tamsayı değeri 16-bitli bir bilgisayarda Şekil 1.2'deki görüldüğü gibi saklanır.



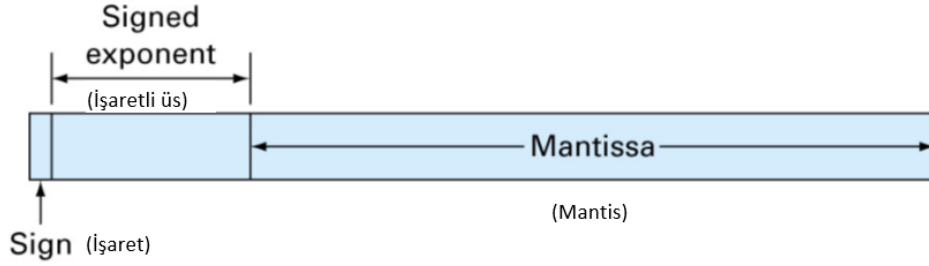
Şekil 1.2 -173 ondalık tamsayısının 16-bitli bir bilgisayarda işaretli büyüklük yöntemiyle gösterimi

**Örnek 1.3** 16-bitli bir bilgisayarda gösterilebilecek 10-tabanlı tamsayıların aralığını bulunuz.

**Çözüm:** 16 bittten ilki işareti gösterir. Geri kalan 15 bit sıfırdan 111111111111111'e kadar ikili sayıları içerir. Üst sınır ondalık bir sayıya aşağıdaki şekilde dönüştürülebilir.

$$(1 \times 2^{14}) + (1 \times 2^{13}) + \dots + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 32767$$

O halde 16-bitli bir bilgisayar kelimesi -32767'den 32767'ye kadar bir aralıktaki sayıları saklayabilir. Dahası sıfır zaten 0000000000000000 olarak tanımlandığından eksi sıfırı tanımlamak için 1000000000000000 sayısını kullanmak gereksizdir. Bu nedenle sayı, ek bir negatif sayıyı, -32768'i göstermek için kullanılabilir. Bu durumda aralık [-32768, 32767] şeklindedir. Bu örnek, sayısal bilgisayarların tamsayıları göstermekteki sınırlı yeteneklerini iyi bir biçimde anlatır.



Şekil 1.3 Kayan noktalı bir sayının bir kelimedeki saklanma yolu

**Kayan noktalı sayı gösterimi.** Kesirli nicelikler, bilgisayarda tipik olarak kayan nokta yapısında gösterilir. Bu yaklaşımda sayı mantis denilen kesirli kısım ile üs denilen bir tamsayı kısım şeklinde gösterilir ( $m.b^e$ ).

Burada  $m$ =mantis,  $b$ =kullanılan sayı sisteminin tabanı ve  $e$ =üs'tür. Örneğin 156.78 sayısı, 10-tabanlı kayan nokta sisteminde,  $0.15678 \times 10^3$  şeklinde gösterilebilir. Şekil 1.9, kayan noktalı bir sayının bir kelime olarak saklanabileceği yollardan birini göstermektedir. İlk bit işaret için, sonrakiler işaretli üs için, geri kalan bitler de mantis için ayrılır.

Sayının başında sıfırlar olması halinde genellikle mantisin normalize edildiğine dikkat edin. Örneğin,  $1/34=0.029411765\dots$  niceliğinin sadece dört ondalık basamağının saklanmasına izin veren 10-tabanlı kayan nokta sisteminde saklandığını varsayalım. Bu durumda sayı  $0.0294 \times 10^0$  şeklinde saklanacaktır. Oysa bu işlemi yaparken, ondalık noktanın sağındaki gereksiz sıfırın yazılması bizi, beşinci ondalık basamaktaki 1 rakamını atmak zorunda bırakır. Sayı baştaki sıfırı kaldıracak şekilde mantisi 10 ile çarparak ve üssü bir azaltarak normalize edilebilir.

$$0.2941 \times 10^1$$

Böylece sayı saklarken ek bir anlamlı basamak daha bırakılabilir. Normalizasyonun bir sonucu  $m$ 'nin mutlak değerinin sınırlı olmasıdır. Yani,

$$\frac{1}{b} \leq m < 1 \quad (1.19)$$

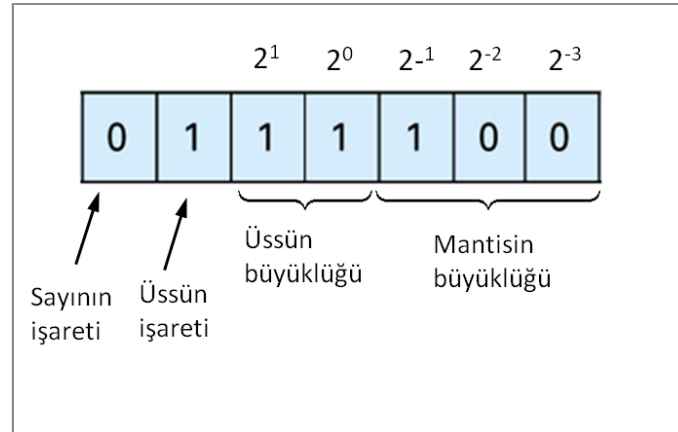
Burada  $b$  tabandır. Örneğin 10-tabanlı sistemde  $m$ , 0.1 ile 1 aralığında; 2-tabanlı sistemde 0.5 ile 1 aralığında değişecektir.

Kayan nokta gösterimi, hem kesirlerin hem de çok büyük sayıların bilgisayarlarda gösterilmesine olanak tanır. Ancak bazı sakıncaları vardır. Örneğin, kayan noktalı sayılar tamsayılara göre daha fazla yer tutar ve işlemler daha uzun sürer. Daha da önemlisi, mantis

sadece sonlu sayıda anlamlı basamak tutabildiğinden, bir hata kaynağı oluşturur. Böylece yuvarlatma hataları ortaya çıkar.

**Örnek 1.4** 7-bitli kelimeler kullanarak bilgi saklayan bir makine için sanal kayan noktalı sayılar grubu oluşturun. İlk biti sayının işareti için ayırın, sonraki üç biti üssün işareti ve büyüklüğü, son üçünü de mantis için kullanın.

**Çözüm:**



**Şekil 1.4** Örnek 1.4 için mümkün olan en küçük pozitif kayan noktalı sayı

Mümkün olan en küçük pozitif sayı Şekil 1.4'da gösterilmiştir. İlk 0, sayının pozitif olduğunu gösterir. İkinci basamaktaki 1, üssün negatif olduğunu belirtir. Üçüncü ve dördüncü basamaktaki 1'ler ise üsse maksimum değerini verir.

$$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$$

Yani üs 3 olacaktır. Son olarak da mantis son üç basamaktaki 100 ile verilmiştir ve,

$$1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} = 0.5$$

sonucunu verir. Daha küçük bir mantis kullanmak mümkünse de (000, 001, 010 gibi), normalizasyonla getirilen sınırlama nedeniyle 100 kullanılmıştır (Eşitlik 1.19). Dolayısıyla bu sistemde mümkün olan en küçük sayı  $+0.5 \times 2^{-3}$ , veya 10-tabanlı sistemde 0.0625'tir. Bir sonraki en büyük sayı ise mantisi artırarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$0111101 = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{-3} = (0.078125)_{10}$$

$$0111110 = (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}) \times 2^{-3} = (0.093750)_{10}$$

$$0111111 = (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{-3} = (0.109375)_{10}$$

10-tabanlı eşdeğerlerin 0.015625 büyüklüğündeki aralıklarla sıralandığına dikkat edin. Bu noktada artırmaya devam edebilmek için üssü 10 değerine azaltmalıyız. Bu da,

$$1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^0$$

değerine eşittir. Mantis yeniden en küçük değeri olan 100'e getirilir. Böylece bir sonraki sayı

$$0110100 = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}) \times 2^{-2} = (0.125000)$$

olur. Bu durumda aralık hala  $0.125000 - 0.109375 = 0.015625$  değerine eşittir. Ancak şimdi mantis artırılarak daha büyük sayılar oluşturuldukça aralık  $0.03125$  değerine erişmiştir.

$$0110101 = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{-2} = (0.156250)_{10}$$

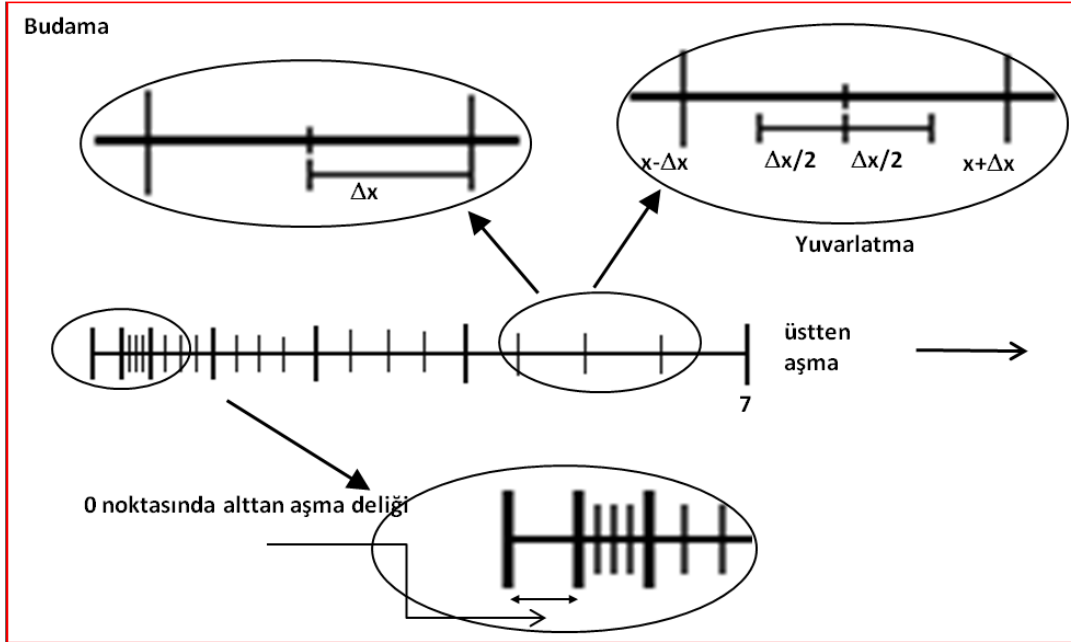
$$0110110 = (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}) \times 2^{-2} = (0.187500)_{10}$$

$$0110111 = (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{-2} = (0.218750)_{10}$$

Bu düzen daha büyük her değere ulaştıkça aşağıdaki maksimum sayı elde edilinceye kadar tekrarlanır.

$$0011111 = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^3 = (7)_{10}$$

Elde edilen son sayı grubu Şekil 1.5’de gösterilmiştir.



**Şekil 1.5** Örnek 1.4’e geliştirilen sanal sayı sistemi. Her bir değer bir çentikle gösterilmiştir. Sadece mümkün olan sayılar gösterilmiştir. Tümüyle eşdeğer bir grup ta negatif yönde uzanacaktır.

Şekil 1.5 kayan nokta gösteriminin bilgisayar yuvarlama hataları açısından önemli olan birçok yönünü ifade eder.

**1. Gösterilebilecek büyüklüklerin aralığı sınırlıdır.** Tamsayı durumunda olduğu gibi, gösterilemeyen büyük pozitif ve negatif sayılar vardır. Kabul edilen aralığın dışındaki sayıların kullanılmasına kalkışıldığında, üstten tanım sınırını aşma denilen hata oluşur. Kayan nokta gösteriminin büyük sayıların yanında küçük sayıları da gösterememe gibi ek bir sınırlaması daha vardır. Bu durum Şekil 1.5’de sıfırla ilk pozitif sayı arasında kalan alttan tanım sınırını aşma deliği ile gösterilmiştir.

**2. Aralık içinde gösterilebilen sadece sonlu sayıda büyüklük vardır.** Dolayısıyla, hassaslığın derecesi sınırlıdır. Elbette ki irrasyonel sayılar tam olarak gösterilemez. Dahası gruptaki değerlerden biriyle tam olarak örtüşmeyen rasyonel sayılar da hassas olarak gösterilemezler. Her iki durumu da yaklaşık olarak göstermemiz sonucu oluşan hatalara niceleme hataları denir. Gerçek yaklaştırma iki şekilde yapılır: budayarak veya yuvarlayarak. Örneğin  $\pi=3.14159265358\dots$  değerinin 10- tabanlı sayı sisteminde yedi anlamlı basamakla saklanacağını varsayalım. Eğer budama yapılacaksa  $\pi=3.141592$ , yuvarlatma yapılacaksa  $\pi=3.141593$  şeklinde saklanır.

**Genişletilmiş hassaslık:** Şekil 1.5'deki sanal sayı sistemi, konuyu açıklayabilmek için kullanılan abartılmış bir durumdur. Ticari bilgisayarlar çok daha büyük kelimeler kullanırlar, dolayısıyla sayıların gerekenden daha fazla hassaslıkla temsil edilmelerini sağlarlar. Örneğin IEEE formatını kullanan bilgisayarlar mantis için 24 bit kullanılmasına izin verirler, bu da  $10^{-38}$  ile  $10^{39}$  aralığında 10-tabanlı yedi anlamlı basamaklı hassaslık anlamına gelir. Bununla birlikte, yuvarlatma hatalarının kritik olabileceği durumlar da vardır. Bu durumlarda kullanılan kelimelerin sayısı iki katına çıkarılarak çift katlı hassaslık sağlanır. 16 ondalık basamak hassaslık  $10^{-308}$  ile  $10^{308}$  arasında bir aralık sağlar.

#### 1.2.3.1.2. Bilgisayar sayılarının aritmetik işlemleri

Bilgisayar sayı sistemlerinin sınırlamaları bir yana, bu sayılarla yapılan gerçek aritmetik işlemler de yuvarlatma hatalarına yol açabilir. Basit toplama, çıkarma, çarpma ve bölmeye yuvarlatma hatalarının etkisini göstermek için normalize edilmiş 10-tabanlı sayıları kullanacağız. Diğer sayı tabanlı sistemler de benzer şekilde davranacaklardır. Tartışmayı basitleştirmek için 4-basamaklı mantis ve 1-basamaklı üs kullanan sanal bir ondalıklı bilgisayar ele alacağız. Ayrıca budama kullanılacaktır.

İki kayan noktalı sayı toplandığında, üssü küçük olan sayının mantisi üsler aynı olacak şekilde değiştirilir. Bu işlem ondalık noktanın aynı hizaya gelmesini sağlar. Örneğin,  $0.1557 \times 10^1$  ile  $0.4381 \times 10^{-1}$  sayılarını toplamak isteyelim. İkinci sayının mantisindeki nokta üslerin farkına eşit sayıda basamak kadar sola kaydırılır. Şimdi sayılar toplanabilir.

$$\begin{array}{r} 0.1557 \quad .10^1 \\ 0.004381.10^1 \\ \hline 0.160081.10^1 \end{array}$$

Sonuç  $0.1600.10^1$  sayısına budandır. İkinci sayının sağa doğru kaydırılan iki basamağı işlem sonunda kaybedilmiş olur.

4-basamak mantis ve 1-basamak üs kullanan sanal bir bilgisayarda, küçük bir sayı, örneğin  $0.0010$  ile büyük bir sayıyı, örneğin  $4000$ 'i toplamak isteyelim. Küçük sayıyı üssü büyük olana uyacak şekilde değiştirelim:

$$\frac{0.4000 \cdot 10^4 - 0.0000001 \cdot 10^4}{0.4000001 \cdot 10^4}$$

Şimdi sayıyı budanırsa  $0.4000 \cdot 10^4$  bulunur. Bu durumda bir yuvarlama hatası ortaya çıkar.

### 1.2.3.2. Kesme Hatası

Örnek olarak bir integral işlemini analitik olarak yapmak yerine nümerik olarak yapmak için sürekli bir  $f(x)$  fonksiyonu yerine, bu fonksiyonun alanını kolay yoldan bulabilecek biçimde küçük parçacıklara bölünerek süreksiz hale getirilir. Bu süreksizlikler hatalara neden olur; bu tür hatalara **kesme hatası** denir.

Bir başka örnek olarak  $\sin(x)$  fonksiyonunun değeri yaklaşık olarak aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanabilir.

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Fakat  $\sin(x)$  fonksiyonunun gerçek değeri bu değildir. Fonksiyonunun gerçek değerini hesaplamak için aşağıdaki denklem de verildiği gibi sonsuz bir seri kullanılmalıdır.

$$\sin(x) = p(x) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Bu serinin farklı adımlar için çözümünden görülür ki  $\sin(x)$  fonksiyonun yaklaşık değerini bulmak için kullanılan az sayıda terim doğru cevabı vermemektedir. Bu hatanın nedeni, sinüs serisinin belli sayıdaki elemanının kullanılmasıdır. Yinelemeli metotlarda, bu hatanın miktarı yineleme sayısına göre azaltılabilir, fakat sonsuz sayıda terim kullanılarak gerçek sonuca ulaşmak mümkün olmadığı için belli terim sayısı kullanılarak gerçek sonuca çok yakın bir değer bulunabilir. Belli sayıda terim kullanılmasından dolayı meydana gelen bu tür hatalara **'kesme hatası'** denir.

Eğer  $f$  fonksiyonu ve ilk  $n+1$  türevi  $x_0$  ve  $x_i$  içeren bir aralıkta sürekli ise  $f$  fonksiyonunun  $x$ 'teki değeri

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n \end{aligned} \quad (1.20)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $R_n$  kalan olup,

$$R_n = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (1.21)$$

ifadesiyle verilir ve  $t$  boş veya yalancı değişkendir (dummy variable). (1.20) eşitliği Taylor serisi olarak bilinir. Eğer kalan ihmal edilirse eşitliğin sağ tarafı  $f$  fonksiyonunun Taylor polinom yaklaşımıdır. Taylor serisi, herhangi bir düzgün fonksiyonun yaklaşık olarak bir polinom olarak ifade edilmesini sağlar. (1.21) eşitliği kalanı ifade etme şekillerinden biridir ve integral formu adı verilir. Alternatif bir ifade ortalama değer teoremi yardımıyla üretilir ve kalanın türev veya Lagrange formu olarak bilinir.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (1.22)$$

Burada  $n$  indisi kalanın  $n$ 'inci derece yaklaşım için yazıldığını gösterir.  $\xi$ ,  $x_0$  ile  $x$  arasında değer alan bir sayıdır. Taylor seri açılımının pratikteki değeri şudur; sadece birkaç terim kullanılsa bile

yaklaştırma birçok durumda, bizi ilgilendiği kadarıyla gerçek değere çok yakın sonuçlar verecektir. “Yeteri kadar doğrunun” kaç terimle sağlanacağı, açılımın kalan terimi esas alınarak bulunur.

Çoğu zaman Taylor serisini  $h=x_{i+1}-x_i$  ile tanımlanan bir adımla basitleştirerek aşağıdaki şekilde yazmak kolaylık sağlar:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \quad (1.23)$$

Kalan terimi ise bu durumda şöyle yazılır.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (1.24)$$

Bu bağıntının iki önemli sorunu vardır. İlki  $\xi$  tam olarak bilinmemekte, sadece  $x_i$  ile  $x_{i+1}$  arasında yer almaktadır. İkincisi, (1.24) eşitliğini hesaplamak için fonksiyonun  $(n+1)$ . türevini bulmalıyız. Bunu yapabilmek için  $f(x)$ 'i bilmeliyiz. Ancak  $f(x)$ 'i bilseydik zaten Taylor seri açılımına ihtiyacımız olmazdı. Bu ikileme rağmen (1.24) eşitliği yine de kesme hatalarını anlamamız açısından yararlıdır. Bunun nedeni eşitlikte yer alan  $h$  terimi üzerinde kontrolümüz olmasıdır. Başka bir deyişle  $f(x)$ 'i  $x$ 'ten ne kadar uzakta hesaplamak istediğimizi seçebiliriz ve açılımda kaç terim olacağını kontrol edebiliriz. Dolayısıyla (1.24) eşitliği genellikle

$$R_n = O(h^{n+1}) \quad (1.25)$$

şeklinde yazılır.  $O(h^{n+1})$  sembolü kesme hatasının  $h^{n+1}$  mertebesinde olduğunu gösterir. Örneğin hata  $O(h)$  ise adımı yarıya indirmek hatayı da yarıya indirecektir. Öte yandan hata  $O(h^2)$  ise adımı yarıya indirmek hatayı dörtte bire indirecektir.

**Örnek 1.5**  $f(x)=\cos(x)$  fonksiyonunun  $x_0=\pi/4$  civarındaki Taylor serisi açılımının  $n=0$ 'dan 6'ya kadar olan terimlerini kullanarak,  $x=\pi/3$  noktasında  $f$  fonksiyonunun ve türevinin değerlerini bulunuz.

**Çözüm:** Gerçek fonksiyon bilindiğinden,  $f(\pi/3)=0.5$  gerçek değer olarak bulunur.

$$f(x_0) = \cos(x_0)$$

$$f'(x_0) = -\sin(x_0)$$

$$f''(x_0) = -\cos(x_0)$$

$$f'''(x_0) = \sin(x_0)$$

...

(1.8) denklemden 1. derece yaklaştırma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \quad (x_0 = \pi/4)$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x - \frac{\pi}{4}) \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.521986659$$

$$\varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.521986659}{0.5} \%100 = -\%4.40$$

(1.8) denkleminde 2. derece yaklaştırma

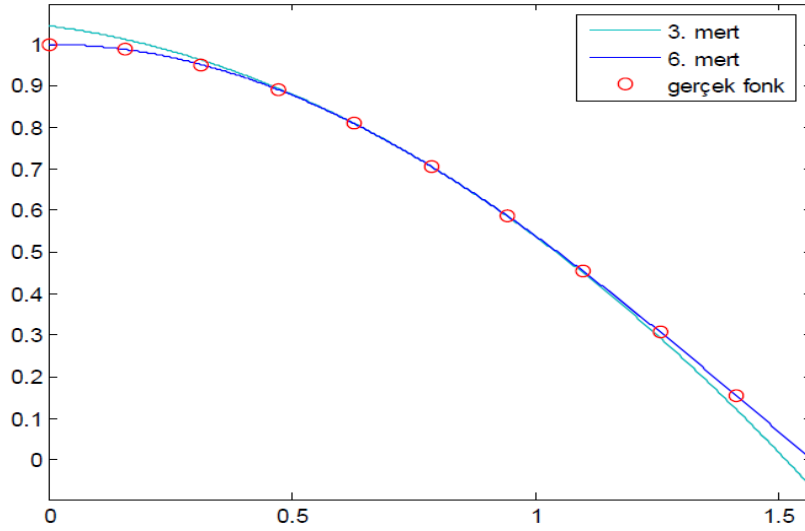
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$f(\pi/3) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.497754491$$

$$\varepsilon_t = \frac{0.5 - 0.497754491}{0.5} \%100 = \%0.449$$

devam edilirse aşağıdaki tablo oluşturulur.

Mertebe, n	f(π/3)	ε <sub>t</sub> (%)
1	0.521986659	-4.4
2	0.497754491	0.449
3	0.499869147	2.62 x 10 <sup>-2</sup>
4	0.500007551	-1.51 x 10 <sup>-3</sup>
5	0.500000304	-6.08 x 10 <sup>-5</sup>
6	0.499999988	2.40 x 10 <sup>-6</sup>



Şekil 1.16 Cos(x) fonksiyonu ve Taylor serisi açılımları

#### 1.2.4. Hata Ölçkleme

Bilgisayar işlemlerinde sonsuz sayıda adım kullanılmayacağı için, belli sayıda terim kullanıldıktan sonra veya belli bir hata aralığına gelince işlemin durdurulması gerekir. Bu hata miktarları genellikle üç tür ölçek kullanılarak tanımlanır. Bunlar;

##### 1.2.4.1. Mutlak hata (absolute error, ε<sub>m</sub>):

Analitik olarak bulunan veya doğru olarak kabul edilendeğer ile nümerik olarak bulunan değerin farkının mutlak değeri mutlak hata olarak tanımlanır. Matematiksel olarak aşağıdaki denklem de gösterilir.

$$\varepsilon_m = |f(x)_{analitik} - f(x)_{sayısal}|$$

$$\varepsilon_m = |Doğru değer - Yaklaşık değer|$$

#### 1.2.4.2. Bağıl hata (relative error, eb) :

Gerçek değere ne kadar yaklaşıldığının oransal bir gösteren bir hata çeşididir. Çoğu problemde bağıl hata mutlak hatadan daha fazla anlam ifade etmektedir. Gerçek değer ile yaklaşık değerlerin farklarının, gerçek değere oranı olarak tanımlanır. Matematiksel olarak aşağıdaki denklemde gösterilebilir. Bağıl hata 100 ile çarpılarak bağıl yüzde hata bulunur. Bağıl hatayı mutlak hatadan daha anlamlıdır. Ama fonksiyonun gerçek değerisifra eşit olduğunda bağıl hata tanımsız olacağından her problem için kullanışlı değildir.

$$\varepsilon_t = \left| \frac{f(x)_{analitik} - f(x)_{sayısal}}{f(x)_{analitik}} \right|$$

bir başka gösterimi  $\varepsilon_t = \left| \frac{Doğru\ değer - Yaklaşık\ değer}{Doğru\ Değer} \right|$

#### 1.2.4.3. Yaklaşım hatası:

Mutlak ve bağıl hataları hesaplamak için fonksiyonun gerçek değerlerinin bilinmesi gereklidir. Fakat çoğu zaman analizden önce fonksiyonun gerçek değeri bilinmediğinden bu hata tanımları kullanılamaz. Bundan dolayı başka bir hata tanımlama ölçeği kullanılması gereklidir. Bu durumlarda yaklaşım hatası kullanılır. Yaklaşım hatasında adım-adım iteratif bir şekilde elde edilen çözüm değerleri bulunur. Bir önceki iterasyonda elde edilen değer yeni iterasyonda kullanılarak hata miktarı oransal olarak tahmin edilmeye çalışılır. Doğru değerler bilinemediğinden ardışık metotlarda Bağıl yaklaşık hata ;

$$\varepsilon_a = \left| \frac{\text{Şimdiki yaklaşık değer} - \text{Bir önceki Yaklaşık değer}}{\text{Şimdiki yaklaşık değer}} \right| \quad \text{şeklinde kullanılır.}$$

Bu şekilde iteratif olarak yapılan hesaplarda iterasyonlara genellikle yaklaşık hata oranı, bizim tarafımızdan önceden tanımlanan bir hata oranı  $\varepsilon_s$  'den küçük oluncaya kadar devam edilir. Diğer bir deyişle iterasyonlara son vermek için  $\varepsilon_a < \varepsilon_s$  koşulunu sağlaması gerekir. Aynı şekilde Yaklaşık hata formülü; Doğru değer bilinemediğinden ardışık durumlarda yaklaşık hata değeri kullanılır;

$$\varepsilon = |\text{Şimdiki yaklaşık değer} - \text{Bir önceki Yaklaşık değer}|$$

## 2. MATRİSLER

**Matrisler.** Matrislerle ilgili temel tanımlarımızı anımsayalım.

m tane satır ve n tane sütun oluşturacak biçimde dizilmiş  $m \times n$  tane sayının oluşturduğu tabloya  $m \times n$  matris denir. Bir  $m \times n$  matris A genellikle aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad A = [a_{ij}], 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n.$$

A matrisini oluşturan sayılardan her birine A'nın bir girdisi denir. A matrisinin  $m \times n$  tane **girdisi**, m **satır** ve n **sütun** oluşturacak biçimde düzenlenmiştir.

A matrisinin **i** inci **satırında** ve j inci sütununda bulunan  $a_{ij}$  girdisine A'nın **i-j girdisi** denir.  $m \times n$  ifadesine a matrisinin **büyüklüğü**, m ve n sayılarına da A matrisinin **boyutları** denir.

Sadece bir satırdan oluşan bir matrise **satır matrisi**, sadece sütundan oluşan bir matrise ise **sütun matrisi** denir.

Bir matrisin her bir satırı bir satır matrisi, her bir sütunu da sütun matrisi olarak düşünülebilir.

### 2.1. Matrislerde Temel İşlemler

#### 2.1.1. İki Matrisin Eşitliği

Büyüklikleri ve karşılıklı girdileri eşit olan matrisler birbirine eşittir. Başka bir ifade ile

$$A = [a_{ij}], 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n \text{ ve } B = [b_{ij}], 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq s$$

Matrisler için

$$A = B, \text{ ise } m = r, n = s \text{ ve her } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \text{ için } a_{ij} = b_{ij}$$

İki matrisin eşit olabilmesi için bu matrislerin büyükliklerinin aynı olması gerekir. Büyüklikleri farklı olan matrisler eşit olamaz. Büyüklikleri eşit olan iki matrisin karşılıklı girdileri birbirine eşit ise o zaman bu iki matris eşittir.

#### Örnek 1

A ile B matrislerinin eşit olmaları için;

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ x & y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & z \\ 3 & 2 & t \end{bmatrix}$$

soldaki matrisin 1-1 girdisi olan  $a$  ile sağdaki matrisin 1-1 girdisi olan  $-1$  sayıları eşit olmalı, yani  $a = -1$  olmalıdır. Benzer şekilde karşılıklı girdiler karşılaştırılarak görülür ki  $b = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$  ve  $t = 3$

## Örnek 2

$\begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ t & 3 \end{bmatrix}$  ve  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & z \\ 3 & 2 & t \end{bmatrix}$  matrisleri, büyüklükleri farklı olduğundan,  $a, b, x, y, z$  ve  $t$  ne

olursa olsun asla eşit olamazlar.

### 2.1.2. İki Matrisin Toplamı

Büyüklükleri aynı olan iki matrisin karşılıklı girdileri toplanarak elde edilen aynı büyüklükteki matrise bu iki matrisin toplamı denir.

$C=A+B$ ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}$$

Büyüklükleri farklı olan iki matrisin toplamı tanımsızdır.

Matris toplamının birleşme ve değişme özelliği vardır.  $A, B, C$  büyüklükleri eşit aynı olan matrisler ise

$$A + (B + C) = (A + B) + C \text{ ve } A + B = B + A \text{ dir.}$$

## Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2b & 1 \\ -2x & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a-1 & b+1 & c-3 \\ x+3 & y-4 & z+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2b & 1 \\ -2x & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$a-1 = 2, b+1 = 2b, c-3 = 1, \dots$$

Bu takdirde;  $a = 3$   $b = 1$   $c = 4$   $x = -1$   $y = 4$   $z = 5$

### 2.1.3. Bir Matrisle Bir Skalerin (Sayı) Çarpımı

Matrislerle birlikte sayılardan söz ederken, **sayı** sözcüğü yerine **skaler** sözcüğünü kullanılabilir. Bir matris ile bir skalerin çarpımı, Matrisin her girdisinin o skalerle çarpılmasıyla elde edilen matristir.

**Örnek 1.**  $s \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot x & s \cdot y \\ s \cdot z & s \cdot t \end{bmatrix}$ .

**Örnek 2.** Aşağıdaki matris işlemini izleyiniz.  $D=A+4 \cdot B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 4 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 7 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

### 2.1.4. Sıfır Matrisi

Her girdisi sıfır olan matrise **sıfır matrisi denir**. Her büyüklükten sıfır matrisi düşünülebilir.

**Örnek 1.**

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ve  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  matrisleri sırasıyla, 2x2, 2x3 ve 3x2 matris sıfır matrislerdir.

Sıfır matrisi genellikle büyük  $O$  harfi ile gösterilir. Büyüklük vurgulanmak istenirse,  $O_{m \times n}$  gösterimi kullanılır.

**Örnek 2.**

$$O_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M$  bir matris ve  $O$  onunla aynı büyüklükte sıfır matrisi ise  $M + O = O + M = M$  dir.

Her matrisin sıfır skaleri ile çarpımı, o matrisle aynı büyüklükteki sıfır matrisidir.

**Örnek 3.**

$$0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.1.5. Bir Matrisin Toplamsal Tersi

Bir  $M$  matrisinin işareti değiştirilerek elde edilen matrise o matrisin toplamsal tersi denir ve  $M$ 'nin toplamsal tersi  $-M$  ile gösterilir.

#### Örnek 1.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ matrisinin toplamsal tersi, } -M = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ tür.}$$

#### Örnek 2.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisinin toplamsal tersi, } -M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Her  $m \times n$  matris  $M$  için  $M + (-M) = O_{m \times n} = (-M) + M$

olduğu açıktır. Ayrıca,  $(-1) \cdot M = -M$  olur.

### 2.1.6. İki Matrisin Farkı

$A$  ve  $B$  aynı büyüklükte iki matris ise,  $A$  ve  $B$  nin farkı  $A-B=A+(-B)$  olarak tanımlanır.

Başka bir deyimle, Aynı büyüklükte iki matrisin farkı, o iki matrisin karşılıklı girdilerinin farkı hesaplanarak bulunur.

#### Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - (-1) & 0 - 1 & 1 - (-3) \\ 3 - 3 & 1 - 2 & -1 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

#### Örnek 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Büyüklükleri aynı olmayan matrislerin farkı tanımsızdır.

### 2.1.7. İki Matrisin Çarpımı

Önce bir satır matrisi ile bir sütun matrisinin çarpımını tanımlayacağız. Aynı anda girdiye sahip olan **bir satır ile bir sütunun çarpımı** şöyle tanımlanır;

$$c_{11} = a_{1n} \cdot b_{n1}$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Sözle ifade edilirse, aynı sayıda girdiye sahip olan bir satır ile bir sütunun çarpımı, o satır ve sütunun karşılıklı girdileri çarpılarak elde edilen çarpımların toplamı olan sayıdır.

**Örnek 1.**

$$[2 \quad -1 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -1$$

**Örnek 2.**

$$[2 \quad 3 \quad -1 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 3$$

İki matrisin çarpımını tanımlarken, bir satır ile bir sütunun çarpımı tanımdan yararlanacağız. A bir **m x p** matris ve B bir **p x n** matris (A'nın sütun sayısı ile B'nin satır sayısı aynı) ise, A ile B'nin **çarpımı**; i-j girdisi A'nın i-inci satırı ile B'nin j-inci sütununun çarpımı olan **m x n** matristir. Bu çarpım A.B ile gösterilir.

$$A = [a_{ij}] \quad , \quad 1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq p \quad \text{ve} \quad B = [b_{ij}] \quad , \quad 1 \leq i \leq p ; 1 \leq j \leq n \text{ ise,}$$

$$A.B = [c_{ij}] \quad , \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} \quad , \quad 1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq n$$

Başka bir anlatımla

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{matrisleri için}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} \quad , \quad 1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq n$$

A ve B matrislerinin çarpımı AB nin çarpımı tanımlı olması için A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı aynı olması gerekir. Çünkü, AB Çarpımının i-j girdisi, A nın i-inci satırı ile B nini j-inci sütununun çarpımı olarak tanımlanmaktadır. A dın i-inci satırında tam A nın sütun sayısı kadar, B nin j-inci sütununda da tam B'nin satır sayısı kadar girdi bulunduğundan bu sayılar eşit olmalıdır ki çarpım mümkün olsun.

### Örnek 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

çarpımı bize bir  $3 \times 2$  matris verir. Bu çarpımın 1-1 girdisi, solda ki matrisin birinci satırı ile sağdaki çarpımı bize bir  $3 \times 2$  matris verir. Bu çarpımın 1-1 girdisi, solda ki matrisin birinci satırı ile sağdaki matrisin birinci sütununun çarpımı, yani

$$1.1 + (-2).2 + 0.4 + 3.3 = 6 \text{ dır.}$$

Aynı çarpımın 2-1 girdisi, soldaki matrisin ikinci satırı ile sağdaki matrisin birinci sütununun çarpımı, yani

$$2.1 + (-1).2 + 3.4 + 6.3 = 30 \text{ dur.}$$

Çarpımın tüm girdileri hesaplanırsa;

$$1.(-2) + (-2).(-1) + 0.1 + 3.2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 30 & 12 \\ 30 & 6 \end{bmatrix} \text{ elde edilir. } C_{3 \times 2} = A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$$

**Örnek 4.** Aşağıdaki çarpımın verilen girdilerin doğruluğunu kontrol ediniz ve yerleri boş bırakılan girdileri bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & -9 \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \quad C_{4 \times 3} = A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$$

$$c_{11} = 1x3 + (-2)x1 = 1$$

$$c_{12} = 1x(-2) + (-2)x5 = -12$$

$$c_{13} = 1x(3) + (-2)x6 = -9$$

AB çarpımının tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısı ile B matrisinin satır sayısının eşit olması gerekir.

### Örnek 5.

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$  çarpımı tanımsızdır. Çünkü, soldaki matrisin 2 sütunu, sağdakinin 3 satırı vardır.

## 2.2. Matrislerin Temel Özellikleri

### 2.2.1. Birleşme Özelliği

Matris çarpımı **birleşme özelliği** vardır:  $A$ ,  $B$  ve  $C$  aşağıdaki çarpım gerçekleşecek büyüklükte matrisler ise, gösterilen eşitlik geçerlidir.

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

### 2.2.2. Değişme Özelliği

Matris çarpımının **değişme özelliği yoktur**.  $A.B \neq B.A$  olan matrisler vardır.

### Örnek 1.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ve  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  matrisleri için

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Olup  $A.B \neq B.A$  dır.

### 2.2.3. Dağılma Özelliği

Matris çarpımının toplama üzerinde **dağılma özelliği** vardır.  $A$ ,  $B$  ve  $C$  aşağıdaki işlemler gerçekleşecek büyüklükte matrisler ise, gösterilen eşitlikler geçerlidir.

$$A.(B + C) = (A.B) + (A.C) \text{ , } (A + B).C = (A.C) + (B.C)$$

## 2.3. Bazı Özel matrisler

### 2.3.1. Kare Matrisler

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise **kare matris** adı verilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A  $n \times n$  bir kare matristir. Bu matrisin  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  girdilerine matrisin **köşegen** girdileri denir.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

### 2.3.2. Birim Matris

Köşegen girdilerinin her biri 1 geri kalan tüm girdileri 0 olan bir matrise **birim matris** adı verilir. Büyüklüğü  $n \times n$  olan birim matris  $I_n$  ile, büyüklüğün ne olduğu biliniyorsa veya büyüklüğe gönderme yapılması gerekmiyorsa, birim matris  $I$  ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Köşegen}$$

Her  $m \times n$  matris  $M$  için  $MI_n = M = I_m M$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Önemli bir özellik de şudur. Bir kare matrisin indirgenmiş biçiminin sıfır satır yoksa, o indirgenmiş biçim birim matristir. Aşağıda, bir kare matrisin indirgenmiş biçimlerini buluyoruz.

**Örnek 1.**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.4. Matrisin Devriği (Transpozesi)

Bir  $m \times n$  matris  $A$  verildiğinde,  $A$  nın **devriği** (ya da transpozesi) denilen ve  $A^T$  ile gösterilen  $n \times m$  matris şöyle tanımlanır: her  $i$  ve  $j$  için  $A^T$  nın  $i$ - $j$  girdisi,  $A$  nın  $j$ - $i$  girdisidir.

Bu tanımdan kolayca görülebileceği üzere,  $A^T$  nin  $i$ -inci satırı  $A$  nın  $i$ -inci sütunu ve  $A^T$  nin  $j$ -inci sütunu  $A$  nın  $j$ -inci satırıdır.

### Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

### Örnek 2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

En genel biçimiyle,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Devrik matrisle ilgili olarak aşağıdaki özellikler mevcuttur.

$$1. (A^T)^T = A \quad 2. (s.A)^T = s.(A^T) \quad 3. (A+B)^T = A^T + B^T \quad 4. (AB)^T = B^T.A^T$$

## 2.5. Matris Determinantı

Sadece kare matrisin determinantı alınabilir. Matrisin determinantı bir sayıdır.

### 1. yöntem

#### Örnek 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - ((-2) \cdot 3) = 4 - (-6) = 10$$

## Örnek 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 120 + 120 - (50 + 36 + 48) = 112$$

## Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 0 + 20 + 0 - (0 + 20 + 18) = -18$$

## 2. yöntem

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |kalan\ matrix\ det|$$

$(a_{ij})$ 'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matrix determinanı

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |kalan\ matrix\ det|$$

$(a_{11})$ 'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matrix determinanı

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot a_{23} \cdot |kalan\ matrix\ det|$$

$(a_{23})$ 'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matrix determinanı

## Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = [1 \cdot 2 \cdot (0 - ((-5) \cdot (-2)))] + [(-1) \cdot (-3) \cdot (-6 - 0)] + [1 \cdot (-4) \cdot (-5 - 0)]$$

$$|A| = (2) \cdot (-10) + 3 \cdot (-6) + (-4) \cdot (-5), \quad |A| = -20 - 18 + 20 = -18$$

## Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \dots$$

## 2.6. Kofaktör Matris ve Ek (Adjoint) Matris

Kofaktör matrisin elde edilmesi için önce matrisin minörleri bulunur. Minör aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |kmd| \quad | (a_{ij}) \text{'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matris determinanı}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |kmd| \quad | (a_{12}) \text{'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matris determinanı}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot |kmd| \quad | (a_{33}) \text{'in bulunduğu satır sütun kapatılıp kalan matris determinanı}$$

Bu parametrelerle elde edilen matrise A matrisinin Kofaktör'ü denilir.

$$\text{Kofaktör}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A Matrisinin Ek veya Adjoint matrisi kofaktör matrisin transpozesidir.

$$Ek(A) = Adj(A) = (kof(A))^T$$

### Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Kofaktör}(A) = ?;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |1| = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |1| = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |3| = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |2| = 2$$

Şeklinde önce matrisin Minörleri bulunur.

$$\text{Kofaktör}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Ek(A) = Adj(A) = (kof(A))^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} +2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{Kof}(A) = ?$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6) = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (18 - 20) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-10) = 10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4 - (-4)) = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{Kof}(A) = \begin{bmatrix} -10 & 6 & -5 \\ 2 & -12 & 10 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Ek(A) = Adj(A) = (\text{kof}(A))^T = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 6 \\ 6 & -12 & 0 \\ -5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

### 2.6.1. Singüler Matris

Determinant Değeri Sıfır Olan Matris

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 - 2 \cdot 21 = 42 - 42 = 0$$

Singüler matrisin tersi alınamaz.

## 2.7. Matris Tersisi

**Bir Kare Matrisin Tersisi :**  $A$  bir  $m \times m$  matris ve  $I_n$ ,  $n \times n$  birim matris olmak üzere

$$A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I_n$$

Olacak biçimde bir  $A^{-1}$  matrisi varsa,  $A$  matrisinin **çarpımsal tersi** veya kısaca **tersi** denir. Bir matrisin çarpımsal tersi bulunmayabilir; ancak, varsa tektir.

### 2.7.1. Denklemi Çözerek Matris Tersini Bulmak

#### Örnek 1.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinin tersi var mıdır? Başka bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olacak biçimde bir  $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  var mıdır?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x + z = 1 \quad x + z = 0$$

$$y + t = 0 \quad y + t = 1$$

Görüldüğü gibi böyle bir matrisin tersi yoktur.

#### Örnek 2.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinin tersi var mıdır? Başka bir deyimle;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olacak biçimde bir  $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  var mıdır? Önceki örnekteki gibi ilerleyelim

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x + z = 1$$

$$z = 0, \quad x = 1$$

$$y + t = 0$$

$$t = 1, \quad y = -1$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin çarpımsal tersini bulurken yukarıda olduğu gibi daima bir denklem sistemi çözmemiz gerekmez. İleride bir matrisin tersini bulmak için daha elverişli yöntemler göreceğiz. Yukarıda, **A** matrisinin tersini bulurken sadece  $A(A^{-1}) = I_n$  eşitliğini sağlayan bir  $A^{-1}$  matrisi bulduğumuza dikkat etmişsinizdir. Bunun yeterli olduğu, yani  $A(A^{-1}) = I_n$  eşitliğinde sağlanıyorsa,  $(A^{-1}).A = I_n$  eşitliğinde sağlanacağını görmek zor değildir.

### 2.7.2. Kofaktörünü Alarak Matris Tersini Bulma

A Matrisinin kofaktör'ü ardından adjoint'i bulunur elde edilen matris, A matrisinin determinantına bölünür.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

#### Örnek1.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  Önce Kofaktör Matris, ardından Ek (Adjoint) Matris bulunur;

Kofaktör (A)=?

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$$

$$\text{Kofaktör}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ek}(A) = \text{Adj}(A) = (\text{kof}(A))^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matris determinantı;

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \quad A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{-1} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Doğruluğunu ispatlamak için  $A.A^{-1} = I$  olmalıdır.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 3 & 6 - 6 \\ -1 + 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ birim matris sonucunu vermektedir}$$

### Örnek 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = ? \quad \text{Yukarıda çözülmüş olan örnekten;}$$

$$\text{Kof}(A) = \begin{bmatrix} -10 & 6 & -5 \\ 2 & -12 & 10 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ burada;}$$

$$\text{Ek}(A) = \text{Adj}(A) = \text{Kof}(A)^T = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 6 \\ 6 & -12 & 0 \\ -5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Yine daha önceki örneklerden bu matrisin determinantı;

$|A| = -18$  olarak bulunmuştur.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -10 & 2 & 6 \\ 6 & -12 & 0 \\ -5 & 10 & 3 \end{bmatrix}}{-18} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{-18} & \frac{2}{-18} & \frac{6}{-18} \\ \frac{6}{-18} & \frac{-12}{-18} & \frac{0}{-18} \\ \frac{-5}{-18} & \frac{10}{-18} & \frac{3}{-18} \end{bmatrix} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

$$\text{Denendiğinde görülecektir ki; } A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

### 2.7.3. Elementer Yöntemlerle Ters Bulma; Satır Dönüşümleri Yöntemi.

A'nın tersini bulmak için A ve onunla aynı büyüklükteki birim matris I yan yana yazılarak elde edilen  $[A \mid I]$  matrisinin A tarafı birim matrise dönüşecek şekilde indirgenmiş biçimi bulunur.  $[A \mid I]$ 'nin indirgenmiş biçimi oluştuğunda sağ taraftaki birim matris  $A^{-1}$  matris tersine dönüşmüş olur.  $[I \mid A^{-1}] [A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$

#### Matris indirgeme esnasında;

- 1) Satır yer değiştirme,
- 2) Satırı sabitle çarpma,
- 3) Satırı sabitle bölme,
- 4) Satırı başka satıra ekleme, çıkartma,
- 5) Satırı bir başka sayıyla bölme/çarpma başka satıra ekleme/çıkartma işlemleri yapılabilir.

### Örnek 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [A|I_2] = [I_2|A^{-1}] = \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 1 & -1 \\ 0 & 1 & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_A \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_I = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_I \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

$$(-1) \cdot R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \quad -1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad -1 \cdot 1 + 1 = 0, \quad -1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad -1 \cdot 1 + 0 = -1$$

### Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad [A : I_3] = [I_3 : A^{-1}]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-1) \cdot xR_1 + R_2 = R_2 \quad -1x1 + 1 = 0 \quad -1x3 + 4 = 1 \quad -1x3 + 3 = 0 \quad -1x1 + 0 = -1 \quad -1x0 + 1 = 1 \quad -1x0 + 0 = 0$$

$$(-1) \cdot xR_1 + R_3 = R_3 \quad -1x1 + 1 = 0 \quad -1x3 + 3 = 0 \quad -1x3 + 4 = 1 \quad -1x1 + 0 = -1 \quad -1x0 + 0 = 0 \quad -1x0 + 1 = 1$$

$$(-3) \cdot xR_2 + R_1 = R_1 \quad -3x0 + 1 = 1 \quad -3x1 + 3 = 0 \quad -3x0 + 3 = 3 \quad -3x-1 + 1 = 4 \quad -3x1 + 0 = -3 \quad -3x0 + 0 = 0$$

$$(-3) \cdot xR_3 + R_1 = R_1 \quad -3x0 + 1 = 1 \quad -3x0 + 0 = 0 \quad -3x1 + 3 = 0 \quad -3x-1 + 4 = 7 \quad -3x0 + -3 = -3 \quad -3x1 + 0 = -3$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Örnek 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = ?$$

$$[A : I_3] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 5 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & : & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & : & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 + R_1 = R_1$$

I

$A^{-1}$

$$2.R_1 + R_2 = R_2, \quad 4.R_1 + R_3 = R_3$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$  (yer değiştirme)

$$R_2 + R_1 = R_1, \quad (-1).R_2 = R_2$$

$$2.R_3 + R_2 = R_2, \quad -2.R_3 + R_1 = R_1$$

#### Örnek 4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini bulalım}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

#### 2.7.4. Ters matrisle ilgili birkaç özellik

- a)  $I_n$  tersinir matristir ve  $I_n^{-1} = I_n$  dir.  
b) Bir kare matrisin satırlarından birinin tüm girdileri sıfır ise, o matrisin tersi yoktur.  
c) Bir kare matrisin satırlarından ikisi aynı ise, o matrisin tersi yoktur.  
d) A ve B tersinir  $n \times n$  matrisler ise,  $AxB$  de tersinir ve  $(AxB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  dir.  
e) A tersinir kare matris ise,  $A^T$  de tersinir ve  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  dir.

#### Örnek 5.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre A yı bulalım.}$$

$A^{-1}$  in tersi A olduğundan verilen matrisin tersini bulmamız yeterlidir .

$$[A^{-1} | A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 7 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 59 & -21 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Böylece görüyoruz ki

$$A = \begin{bmatrix} 59 & -21 & 8 \\ -22 & 8 & -3 \\ 14 & -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

### 3. MATLAB

## 4. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bir denklemin *kökünü* bulmak ya da o denklemin *çözmek* demek,  $f(x)=0$  şeklindeki denklemi *sıfır* yapan  $x$  değerlerinin belirlenmesi demektir. Bu nedenle denklemlerin köklerine bazen bu denklemlerin *sıfırları* da denir.

### Matrisler ve Doğrusal Denklem Sistemleri;

Şu ana kadar matrislerle ilgili tüm işlemleri tanımlamış bulunuyoruz. Doğrusal denklem sistemleri ile matrisler arasında daha yakın bir ilişki olduğunu göreceğiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Denklem sisteminin katsayıları bir  $m \times n$  matris, değişkenleri bir  $n \times 1$  sütun matrisi ve sağ taraf sabitleri de bir  $m \times 1$  sütun matrisi oluştururlar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Kolayca görülebileceği üzere,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  değerlerinin yukarıdaki sistemin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, bu sayıların oluşturduğu  $X$  matrisinin  $A.X=B$  matris denklemini sağlamasıdır.  $A$  katsayılar matrisi,  $B$  çıkış matrisi  $X$  denklemin çözüm kümesi matrisidir.

Bu sisteme denk olan matris denkleminin  $A.X = B$  dir. Eğer  $A$  matrisinin tersi  $A^{-1}$  varsa sistemin çözümü şöyle bulunur:

$$A.X = B, A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B, (A^{-1}.A).X = A^{-1}.B, I_n.X = A^{-1}.B, X = A^{-1}.B$$

Denklem sayısı değişken sayısına eşit olan bir doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi bir kare matristir. Böyle bir sistemin bir ve yalnız bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul Sistemin ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimindeki sütun sayısının sıfırdan farklı satır sayısından bir fazla olması, yani hiç sıfır satırı bulunmamasıdır ki, bu, sistemin katsayılar matrisinin indirgenmiş biçiminin birim matris olmasına denktir. Bu durum katsayılar matrisinin tersinin var olmasına da denktir ve çözümün bulunmasında ters matristen yararlanılabilir.

## 4.1. Analitik Çözüm Yöntemleri

### 4.1.1. Yok Etme Ve Yerine Koyma Metodu

#### Örnek 1.

- 1)  $3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$
- 2)  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
- 3)  $-4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1$

1 ve 2 denklemlerini toplarsak;

$$x_1 + x_2 = 2 \text{ olur. Buradan } x_2 = 2 - x_1$$

1 denklemini 2, 2 denklemini 3 ile çarpıp toplarsak;

$$2.(3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1)$$

$$6x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2$$

$$-6x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_3 = 5$$

Bu sonuçlar 3. denkleme yerleştirilirse;

$$-4x_1 - 5(2 - x_1) + 2.5 = 1$$

$$-4x_1 - 10 + 5x_1 + 10 = 1$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 - 1 = 1 \text{ elde edilir.}$$

### 4.1.2. Katsayı Matrisinin Tersini Alarak Yapılan Çözüm

$A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$  şeklinde elde edilen yöntemde; A katsayılar matrisi, B çıkış matrisi X denklemin çözüm kümesi matrisidir. Katsayılar matrisinin tersini alıp çıkış matrisiyle çarparsak çözüm kümesi elde edilir.

#### Örnek 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \text{ denklem sistemini ters matris yöntemi ile çözelim.}$$

Denklem takımını matris içerisine alırsak;

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ a\u015fıdaki \u015fekilde b\u00fcl\u00fcmleyebiliriz;}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ bu yazılım } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ \u015feklinde ifade edilir. Buradan;}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  yakla\u015fımından A katsayılar matrisinin tersini bulmak gerekir. Katsayılar matrisi daha \u00f6nceki \u00f6rneklerde \u00e7alı\u015fılan bir matris oldu\u011fundan tersi oradan a\u015fğıya alınmı\u015ftır.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = \{(X_1, X_2, X_3) (1, 1, 5)\}$$

## Örnek 2.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned} \text{ denklem sistemini ters matris yöntemi ile \u00e7\u00f6zelim .}$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin tersini \u00f6nceki \u00f6rnekte bulmu\u015ftuk.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{A matrisinin tersi yukarıdaki}$$

\u00f6rneklerde \u00e7\u00f6z\u00fclm\u00fc\u015ft\u00fcr, buradan;

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ \u015feklinde elde edilir.}$$

$$A.X = B, \quad X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & -3/4 & 1/2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \\ -3/4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Çözüm kümesi;

$$\zeta = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) (1/4, 0, 1/2, -3/4) \} .$$

### Örnek 3.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin katsayılar matrisi  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Çözüm için  $A^{-1}$ 'i bulalım;

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Böylece,  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  elde edilir.  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  olduğundan ,

$X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$  ve sonuç olarak çözüm kümesi olan  $\zeta = \{ (2, 5, 0) \}$  elde edilir .

### 4.1.3. Cramer Yöntemi

$$A.X = B, \quad D = |A|, \quad X_1 = \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D}, \quad X_3 = \frac{D_3}{D}$$

$D_1$ , A matrisinde 1. Sütünü çıkartarak B matrisinin yerleşmesiyle elde edilen matrisin determinantıdır.

$D_2$ , A matrisinde 2. Sütünü çıkartarak B matrisinin yerleşmesiyle elde edilen matrisin determinantıdır.

$D_3$ , A matrisinde 3. Sütünü çıkartarak B matrisinin yerleşmesiyle elde edilen matrisin determinantıdır.

#### Örnek 1.

$$2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -11$$

$$X_1 + X_2 - 2X_3 = 8$$

$$3X_1 - 2X_2 - X_3 = -1 \text{ denklemler matris formuna dönüştürülür.}$$

$$A.X = B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = |A| = -5$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \\ \underbrace{-1}_{B} & -2 & -1 \end{bmatrix} = |D_1| = -5$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & \underbrace{-1}_{B} & -1 \end{bmatrix} = |D_2| = -15$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & \underbrace{-1}_{B} \end{bmatrix} = |D_3| = 10$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$$

$$X_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{-5} = -2$$

## Örnek2

$$\begin{aligned}3X_1 + 3X_2 - X_3 &= 1 \\ -2X_1 - 2X_2 + X_3 &= 1 \\ -4X_1 - 5X_2 + 2X_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A|, |D| = (-1)^2 \cdot 3 \cdot (-4 + 5) + (-1)^3 \cdot 3 \cdot (-4 + 4) + (-1)^4 \cdot (-1) \cdot (10 - 8)$$

$$|D| = 3 - 2 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 + 5) + (-1) \cdot (3) \cdot (2 - 1) + (-1) \cdot (-5 + 2) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3) \cdot (2 - 1) - (1) \cdot (3) \cdot (-4 + 4) + (-1) \cdot (-2 + 4) = 3 - 2 = 1$$

$$D_2 = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (3) \cdot (-2 + 5) + (-3) \cdot (-2 + 4) + (10 - 8) = 9 - 6 + 2 = 5$$

$$D_3 = 5$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{1} = 1 \quad X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = 1 \quad X_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{5}{1} = 5$$

### 4.1.4. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Çözüm yönteminde  $A \cdot X = B$  formatında katsayı matrisi ve çıkış matrisi yan yana yazılarak,  $[A | B]$  katsayı matrisinin üst üçgen matris olması için metodik bir şekilde eliminasyon yöntemleri uygulanır. Ardından tekrar  $A \cdot X = B$  şekli oluşturularak işlem yapılır ve bilinmeyenler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 1 & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 &= P_1 \\x_2 + k_{23}x_3 &= P_2 \\x_3 &= P_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= P_1 - k_{12}x_2 - k_{13}x_3 \\x_2 &= P_2 - k_{23}x_3 \\x_3 &= P_3\end{aligned}$$

İlk aşamada üst üçgen matris oluşturulur.

$$\begin{aligned}R_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & d_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\frac{R_1}{a_{11}} = R_1$$

$$-a_{21} \cdot R_1 + R_2 = R_2$$

$$-a_{31} \cdot R_1 + R_3 = R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c_{22}}{c_{22}} & \frac{c_{23}}{c_{22}} & \frac{d_2}{c_{22}} \\ c_{22} & c_{22} & c_{22} \\ c_{32} & c_{33} & d_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & e_{23} & f_2 \\ c_{32} & c_{33} & d_3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\frac{R_2}{c_{22}} = R_2 R_1 \cdot c_{32} - R_2 = R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & e_{23} & f_2 \\ c_{32} - 1 \cdot c_{32} & c_{33} - e_{23} \cdot c_{32} & d_3 - f_2 \cdot c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e_{23} & f_2 \\ 0 & e_{33} & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e_{33}}{e_{33}} & \frac{f_3}{e_{33}} \\ e_{33} & e_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & g_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & e_{23} & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & g_{31} \end{bmatrix} \text{ bu şamadan sonra matrisler ayrılır}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & e_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ f_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

### Örnek 1.

$$\begin{aligned}2X_1 - 3X_2 + 2X_3 &= -11 \\X_1 + X_2 - 2X_3 &= 8 \\3X_1 - 2X_2 - X_3 &= -1\end{aligned}$$

$$A.X = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[A | B]$  Bir üçgen matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & | & -11 \\ 1 & 1 & -2 & | & 8 \\ 3 & -2 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 1 & 1 & -2 & | & 8 \\ 3 & -2 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 0 & +2,5 & -3 & | & 13,5 \\ 3 & -2 & -1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R1}{2}=R1 \quad -1.R1+R2=R2 \quad -3.R1+R3=R3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 0 & 2,5 & -3 & | & 13,5 \\ 0 & 2,5 & -4 & | & 15,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 0 & 1 & -1,2 & | & 5,4 \\ 0 & 2,5 & -4 & | & 15,5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 0 & 1 & -1,2 & | & 5,4 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 & | & -5,5 \\ 0 & 1 & -1,2 & | & 5,4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R2}{2,5}=R2 \quad -2,5.R2+R3=R3 \quad \frac{R3}{-1}=R3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = -2$$

$$X_2 = 5,4 + 1,2 \cdot X_3 = 5,4 + 1,2 \cdot (-2) = 5,4 - 2,4 = 3$$

$$X_1 = -5,5 + 1,5 \cdot X_2 - X_3 = -5,5 + 1,5 \cdot 3 - (-2) = 1$$

#### 4.1.5. Gauss Jordan Yöntemi

Gauss eliminasyon yöntemiyle elde edilen üst üçgen matris birim matris haline dönüştürülür.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

2.satır  $a_{12}$  ile çarpılıp 1. Satırdan çıkartılır.

3.satır  $a_{13}$  ün yeni değeri ile çarpıp 1. Satıra eklenir.

3.satır  $a_{23}$  ün yeni değeriyle çarpıp 2. Satıra eklenir. Bu işlemler tüm matrislerde yapılır.

$$A.X = B, [A | B], [I | By], I.X = By$$

şeklinde dönüşümden sonra  $X = By$  şeklinde sonuçlar doğrudan bulunur.

### Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemiyle çözüünüz.

2.Satırı -1,5 ile çarpıp 1. Satırdan çıkartırız;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5,5 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,8 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3.satırı -0,8 ile çarpıp 1. Satırdan çıkartırız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5,4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3.satırı -1,2 ile çarpıp 2. Satırdan çıkartırız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matrisler eski konumlarına yerleştirilir;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -2$$

### Gauss-jordan yöntemiyle ters matrisin elde edilmesi

Katsayı matrisi boyutu kadar birim matrisle  $A \cdot I$  şeklinde yan yana yazılır. Gauss eliminasyon yöntem ve kuralları uygulanarak üst üçgen matris ardından Gauss Jordan yöntemiyle  $A$  matrisi birim matrise dönüştürülür. Bu işlemler sonunda yanda işlemlerden etkilenen  $I$  birim matrisi  $A^{-1}$  ters matrisine dönüşür.

$A \cdot I$  eliminasyon sonucu  $I \cdot A^{-1}$  doğruluğu için  $A \cdot A^{-1} = I$  olmalıdır.

#### 4.1.6. Choleski (L U Ayrıştırması) Yöntemi

A katsayı matrisinin L; alt üçgen matris ve U; köşegen elemanları 1 olan üst üçgen matrisin çarpımından oluştuğu düşünülür.

$$A \cdot X = B$$

$L \cdot U \cdot X = B$ , dönüşümünde  $L \cdot U = A$  bu çarpma işleminden  $L$  ve  $U$  matris elemanları elde edilir.

$L \cdot U \cdot X = B$  eşitliğinden  $U \cdot X = Y$  denilirse  $L \cdot Y = B$  den  $Y$  bulunur.

Ardından  $U \cdot X = Y$  eşitliğinden  $X$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} & \mathbf{0} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

#### Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} & \mathbf{0} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Bu işlem yapıлып iki matris çarpılırsa L ve U değerleri bulunur.

$$L_{11} = 1$$

$$L_{11} \cdot U_{12} = 2 \Rightarrow U_{12} = 2$$

$$L_{11} \cdot U_{13} = 3 \Rightarrow U_{13} = 3$$

$$L_{21} = 2$$

$$L_{21} \cdot U_{12} + L_{22} = 5 \Rightarrow L_{22} = 1$$

$$L_{21} \cdot U_{13} + L_{22} \cdot U_{23} = 2 \Rightarrow U_{23} = -4$$

$$L_{31} = 3$$

$$L_{31} \cdot U_{12} + L_{32} = 1 \Rightarrow L_{32} = -5$$

$$L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + L_{33} = 5 \Rightarrow L_{33} = -24$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L \cdot Y = B, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ hesaplanır.}$$

$$U \cdot X = Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**Örnek;**

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemlerini choleski (L, U) yöntemiyle çözüünüz.

## 4.2. İteratif Çözüm Yöntemleri

### 4.2.1. Gauss Siedel Yöntemi

**Denklem takımlarının çözümlerinde hata değerlerinin kullanımı**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad h_1 = |x_1 - x_1^0| < \Delta x$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad h_2 = |x_2 - x_2^0| < \Delta x$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad h_3 = |x_3 - x_3^0| < \Delta x$$

Her üç denklemde de  $h < \Delta x$  şartı sağlanana kadar iterasyon yapılır. Denklemlerin sırası Pivotlama denilen bir yöntemle değiştirilir. Köşegenlerin büyüklüğüne göre sıralanır.  $|a_{11}|$  1.denklem,  $|a_{22}|$  2. denklem,  $|a_{33}|$  3.denklem yapılır. Bu yöntemle çözüm olabilmesi için asal köşegende 0 olmamalıdır.

$$x_1^{(n)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(n-1)} - a_{13}x_3^{(n-1)}}{a_{11}} \quad h_1 = |x_1 - x_1^0| < \Delta x$$

$$x_2^{(n)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n-1)}}{a_{22}} \quad h_2 = |x_2 - x_2^0| < \Delta x$$

$$x_3^{(n)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(n)} - a_{32}x_2^{(n)}}{a_{33}} \quad h_3 = |x_3 - x_3^0| < \Delta x$$

Yakınsak çözüm olabilmesi için;

$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  ve  $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$   $j \neq i$  sağlayan bir denklem sistemi oluşturulmalıdır.

Bazan bu şartlar olmadan da yakınsak çözümler olabilir.

### Örnek 1.

$$x_1 + 4x_2 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 = 1$$

Denklem takımını  $x_1^0 = x_2^0 = 0$ ,  $\Delta x = 0,05$  mutlak hatasıyla çözelim. Pivottlama yapılarak denklemler yeniden sıralandı ve denklemlerde köşegeni oluşturacak değişken yalnız bırakıldı.

$$x_1 - 2x_2 = 1, \quad |a_{11}| \text{ en büyük} \quad x_1 = 1 + 2x_2$$

$$x_1 + 4x_2 = 4, \quad |a_{22}| \text{ en büyük} \quad x_2 = \frac{4-x_1}{4}$$

#### **n = 1, 1. Adım**

$$x_1 = 1 + 0 = 1$$

$$x_2 = \frac{4-1}{4} = 0,75$$

#### **n = 2, 2. adım**

$$x_1 = 1 + 2 \cdot 0,75 = 2,5$$

$$x_2 = \frac{4-2,5}{4} = 0,375$$

#### **n = 3, 3. adım**

$$x_1 = 1 + 2 \cdot 0,375 = 1,75$$

$$x_2 = \frac{4-1,75}{4} = 0,5625$$

n	$x_1$	$x_2$	$h_1$	$h_2$
	0	0	-	-
1	1	0.75	1	0.75
2	2.5	0.375	1.5	0.375
3	1.75	0.5625	0.75	0.1875
4	2.125	0.4688	0.375	0.0938
5	1.9375	0.5156	0.1875	0.0469
6	2.0313	0.4922	0.0938	0.0234
7	1.9844	0.5039	0.0469	0.0117

### Örnek2.

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

Denklem sistemini  $x_1^0 = 0,5$ ,  $x_2^0 = 2$ ,  $x_3^0 = -1,5$  başlangıç değerleri  $\Delta x = 0,065$  mutlak hatasıyla çözümler.

Pivotlama yapılarak denklemler yeniden sıralandı

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \Rightarrow 2 \geq 5 \text{ sağlamaz}$$

$$|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \Rightarrow 1 \geq 3 \text{ sağlamaz}$$

$$|a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \Rightarrow 1 \geq 4 \text{ sağlamaz}$$

Bu nedenle  $a_{11}$  katsayısı en büyük denklemleri 1.sıraya  $a_{22}$  katsayısı en büyük denklemleri ikinci sıraya aldık bu durumda  $3 \geq 3$  olması yeterlidir. (pivotlama)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 & x_1 &= \frac{-1+2x_2+x_3}{3} \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -11 & x_2 &= \frac{-11-2x_1-2x_3}{-3} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 8 & x_3 &= \frac{8-x_1-x_2}{-2} \end{aligned}$$

$n = 1$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+2x_2+x_3}{3} = \frac{-1+2*2+(-1,5)}{3} = \frac{-1+4-1,5}{3} = 0,5 \\ x_2 &= \frac{-11-2*0,5-2*(-1,5)}{-3} = \frac{-11-1+3}{-3} = \frac{-12+3}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3 \\ x_3 &= \frac{8-x_1-x_2}{-2} = \frac{8-0,5-3}{-2} = -2,25 \end{aligned}$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+2*3+(-2,25)}{3} = \frac{-1+6-2,25}{3} = 0,917 \\ x_2 &= \frac{-11-2*0,917-2*(-2,25)}{-3} = \frac{-11-1,82+4,5}{-3} = 2,778 & x_3 &= \frac{8-0,917-2,778}{-2} = -2,153 \end{aligned}$$

İterasyon sayısı uzadığından Matlab çözümü yapmak daha doğrudur.

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
	0,5	2	-1,5			
1	0,5	3	-2,25	0	1	0,75
2	0,917	2,778	-2,153	0,4167	0,222	0,0972
3	0,801	2,765	-2,217	0,1157	0,0123	0,064
4	0,771	2,703	-2,263	0,0296	0,0624	0,046

**Örnek 3.**

$$x_1 + 4x_2 - 3x_4 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 8$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 4$$

Denklem takımlarını Gauss-siedel yöntemine göre  $\varepsilon = 0,05$  mutlak hata değeri ile çözünüz.

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$$

#### 4.2.2. Jakobi (Basit İterasyon) Yöntemi

Gauss Sidel yöntemine benzer. Gauss sidel yönteminde her çözümden elde edilen değerler bir sonraki denklemde kullanılarak iterasyona devam edilir. Bu yöntemde ise başlangıç değerleri her denklem takımı için aynı şekilde kullanılır. Yeni elde edilen değerlerde yine her denklem için ortak kullanılır, yani birisinde elde edilen diğerinde kullanılmaz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0}{a_{11}} \quad x_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0}{a_{22}} \quad x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0}{a_{33}}$$

Her denklem ayrı çözülür. Elde edilen yeni sonuçlar ikinci iterasyonda tüm denklemlerde kullanılır.

$$x_1^{(n)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(n-1)} - a_{13}x_3^{(n-1)}}{a_{11}}, \quad x_2^{(n)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(n-1)} - a_{23}x_3^{(n-1)}}{a_{22}}, \quad x_3^{(n)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(n-1)} - a_{32}x_2^{(n-1)}}{a_{33}}$$

#### Örnek 1.

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ -1 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$  yaklaşık kökleriyle Jakobi yöntemini uygulayarak üç yeni kök takımı bulunuz.

$$x_1^{(n)} = \frac{24 - x_2^{(n-1)} - x_3^{(n-1)}}{10} \quad x_2^{(n)} = \frac{21 + x_1^{(n-1)} - x_3^{(n-1)}}{10} \quad x_3^{(n)} = \frac{300 - x_1^{(n-1)} + 2x_2^{(n-1)}}{100}$$

$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
	0	0	0			
1	2,4	2,1	3	2,4	2,1	3
2	1,89	2,04	3,018	0,51	0,06	0,018
3	1,8942	1,9872	3,0219	0,0042	0,0528	0,0039
4	1,8991	1,9872	3,0208	0,0049	0	0,0011

## 5. DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Dört veya beş dereceli polinomlardan yüksek dereceli polinomlar, trigonometrik ve üstel terimler içeren denklemleri analitik yöntemlerle çözmek neredeyse imkansızdır. Bunların sayısal çözümleri için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Doğrusal olmayan Sayısal çözümler yöntemlerinin bir çoğunu temelinde Taylor serisi vardır. Çözümlere geçmeden önce bu seri tanımlanacaktır.

### 5.1. Taylor Serisi

*Taylor serisi*, sürekli bir fonksiyonun herhangi bir  $x_{i+1}$  noktadaki değerini, bu noktanın yakın komşuluğundaki bir  $x_i$  noktasındaki değerleri ve türevleri cinsinden ifade eden aşağıdaki gibi sonsuz bir seridir;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n$$

Dikkat edilirse, serinin sonunda  $(n + 1)$ . terimden sonsuza kadar olan terimlerin hesaba katıldığı bir  $R_n$  kalıntı (ya da kalan veya hata) terimi vardır. Bu terim aşağıdaki şekilde ifade edilir. Burada  $\xi$  değeri  $x_i$  ile  $x_{i+1}$  arasında bir değerdir.

$$R_n = \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

Genellikle  $(x_{i+1} - x_i)$  farkına  $h = (x_{i+1} - x_i)$  adım denir ve Taylor serisi ile kalan terimi sıklıkla adım cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(h)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n$$

$$R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

**Örnek 1.** Sıfırıncı ila 4. Mertebeden Taylor serisi yaklaşımları kullanarak aşağıdaki fonksiyonun  $x_{i+1} = 1$  deki değerini  $x_i = 0$  daki değerleri ve türevleri cinsinden belirleyiniz.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Bilinen bir fonksiyonla ilgilendiğimizden  $f(x)$  fonksiyonunun 0 ve 1 deki değerlerini belirleyebiliriz. Şekilde görüldüğü gibi fonksiyon  $f(0) = 1.2$  de başlamakta ve  $f(1) = 0.2$  olacak şekilde aşağı kıvrılmaktadır. Buna göre Taylor serisi ile yaklaşık olarak belirlemeye çalıştığımız değer gerçekte 0.2 dir. ( $h = 1$ )'dir,

$n = 0$  için; sıfırıncı dereceden Taylor serisi yaklaşımı serinin sağ tarafında tek terim olması durumunda elde edilir:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i), \quad f(1) = f(0) = 1,2, \quad \varepsilon_i = 0,2 - 1,2 = -1$$

$n = 1$  için; ( $n = 0, 1$  değerleri),  $x = 0$  da birinci mertebeye türevin belirlenmesi gerekmektedir:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h \cdot f'(x_i)}{1!} \text{ şeklindedir. } f'(x) = -0,4x^3 - 0,45x^2 - 1x - 0,25,$$

$f'(0) = -0,25$  dir. Birinci mertebeden yaklaşım

$$f(1) = f(0) + h \cdot f'(0) = 1,2 + 1 \cdot (-0,25) = 0,95 \quad \text{hata değeri } \varepsilon_i = 0,2 - 0,95 = -0,75$$

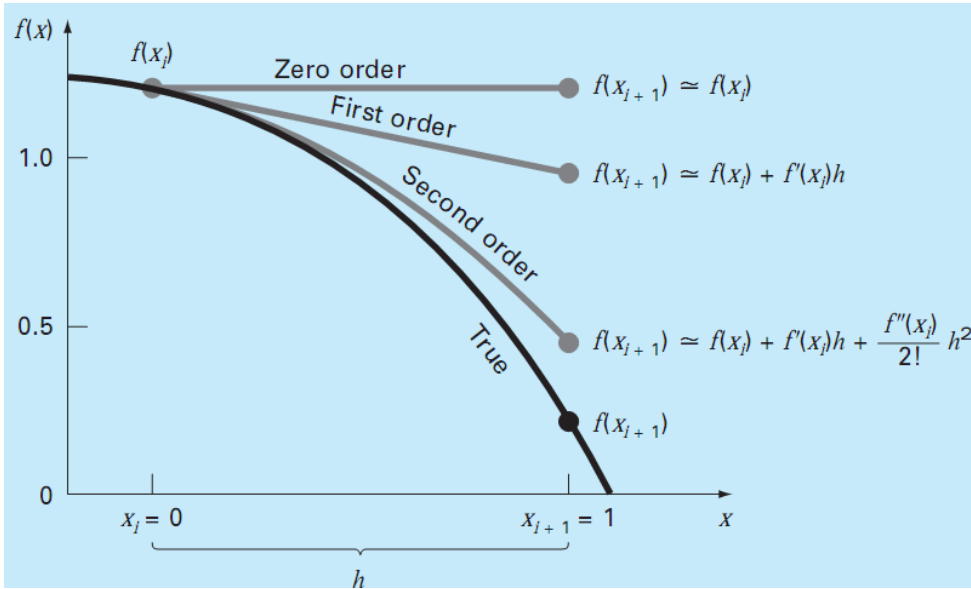
$$\underline{n = 2 \text{ için}} \quad (n = 0, 1, 2) \text{ için Taylor serisi; } f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i)$$

$$\underline{n = 3 \text{ için}} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \text{ için; } f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i)$$

$$\underline{n = 4 \text{ için}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(h)^4}{4!} f^{(4)}(x_i)$$

$$\underline{n = 5 \text{ için}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(h)^4}{4!} f^{(4)}(x_i) + \frac{(h)^5}{5!} f^{(5)}(x_i)$$

(Not:  $n = 2, 3, 4, 5$  için değerler hesaplanacaktır.)



Mertebe artırılarak devam edildiğinde, 4. Mertebeden yaklaşım için kalan ifadesi

$$R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ ifadesinden } R_4 = \frac{(h)^{4+1}}{(4+1)!} f^{(4+1)}(\xi) \text{ olacaktır.}$$

Örnekteki  $f(x)$  4. Dereceden bir polinom olduğundan 5. Derece türevi sıfır olacaktır.

$$R_4 = \frac{(h)^{4+1}}{(4+1)!} f^{4+1}(\xi) = 0 \text{ olacaktır.}$$

Bu fonksiyonun Taylor serisi terimleri yukarıdaki grafikte gösterilmiştir;

Taylor serisi sayısal yöntemlerin temelidir. Eğer  $f(x)$  fonksiyonu,  $x = a$  civarındaki değeri için sonsuz seri ile ifade edilebiliyorsa, o zaman bu  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  civarında “Analitik” olduğu söylenebilir. Taylor serisi aşağıdaki şekilde de kullanılabilir.

$$f(x) = f(a) + (x - a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

Serinin yakınsaklık koşullarını belirlemek zor olmasına karşın  $f(x)$ 'in  $x = a$ 'daki türevinin mevcut olması ve sonlu olması lazımdır. Eğer Taylor serisi mevcut ise  $x$ 'in  $a$ 'dan farklı fakat  $a$  civarındaki bir değerine karşılık düşen  $f(x)$ 'i bulabiliriz. Ancak serinin yakınsak olması ve  $x = a$ 'da  $f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$  in mevcut olması gerekir. Yakınsak çözümi için seride yeterli sayıda terim alınmalıdır. Bu konuyla ilgili yukarıda bir örnek verilmiştir.

Yukarıda da anlatıldığı gibi Taylor serisi bir terime kadar ifade edilir, kesilen terimlerin yerine hata terimi konulur. Örneğin 2. Terimden sonra seriyi kesecek olursak;

$$f(x) = f(a) + (x - a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + R. (x - a)^3 \text{ buradan yapılan hata;}$$

$$R. (x - a)^3 = f(x) - (f(a) + (x - a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)) \text{ şeklinde hesaplanabilir.}$$

Seriden  $n$  adet terim alınıp  $n + 1$  ve sonraki terimler kesilirse o zaman yapılan maksimum hata ise;

$$\frac{(|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \left| \frac{d^{(n+1)}f(x)}{dx^{n+1}} \right| \text{ max . şeklinde yazılabilir. Bu ifade yukarıdaki } R_n = \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \text{ ifadesiyle aynıdır.}$$

Hesaplanan terim kesme hatasının, maksimum hatadan küçük olması gerekir.

## Örnek 2.

$f(x) = e^x$  fonksiyonunu  $a = 0$  civarında Taylor serisine açınız. Daha sonra serinin ilk üç terimini alarak  $x = 0,5$  noktası için  $f(x)$  'i ve kesmeden oluşacak hatayı bulunuz ve maksimum hata ile karşılaştırınız.

$$f(x) = f(a) + (x - a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^n(x) = e^x = f(x)$$

olduğundan, denklemin sağ tarafında  $a = 0$  için;

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)}{1!} \cdot f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$f(x) = e^{(0)} + \frac{x}{1!} e^{(0)} + \frac{x^2}{2!} e^{(0)} + \frac{x^3}{3!} e^{(0)} + \dots = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$x = 0,5 \text{ noktası için ilk üç terimden; } f(x) = e^{(0)} + \frac{x}{1!} e^{(0)} + \frac{x^2}{2!} e^{(0)} + R \cdot (x - a)^3 = e^x$$

$$e^{0,5} = 1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2!} + R(0,5)^3 \Rightarrow \text{hata terimi; } R(0,5)^3 = 0.023 \text{ olur. } R = 0,19$$

$0 \leq x \leq 0.5$  aralığında  $\frac{d^3(e^x)}{dx^3} = e^x$  maksimum değerini  $x = 0.5$  de alır. Bu nedenle hatanın

üst sınırı;  $\frac{(|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \left| \frac{d^{(n+1)}f(x)}{dx^{n+1}} \right|$  **max** ifadesinden ( $a = 0$ ;  $n = 2$ )

$\frac{(0,5)^3}{3!} \cdot \frac{d^3(e^x)}{dx^3} = \frac{(0,5)^3}{3!} \cdot e^{0,5} = 0,03438$  olup buradan  $R(0,5)^3 = 0.023 < 0,03438$  olduğu görülür. Böylece maksimum hatadan küçük bir hata yapılmıştır.

## 5.2. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi (Bisection)

İki başlangıç noktası gerektirir. Bu iki başlangıç noktasında fonksiyonun zıt işaretli değerler alması istenir.  $X_a, X_b$  iki başlangıç değeri buna karşılık  $f(x_a), f(x_b)$  zıt işaretli fonksiyon değeri, eğer böyle iki nokta bulunmuş ise kök mutlaka bunların arasında çıkacaktır.

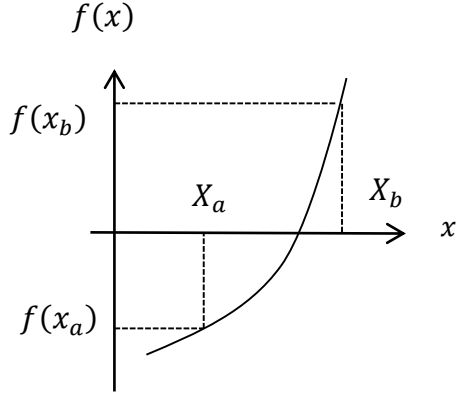
$$x_1 = (x_a + x_b)/2$$

bu yeni noktaya karşılık yeni bir  $f(x_1)$  değeri bulunur ve bu yeni değer  $f(x_a), f(x_b)$  değerlerinden hangisiyle zıt işaretli olduğu belirlenir. Örneğin  $f(x_1), f(x_a)$  ile aynı işaretli  $f(x_b)$  ile zıt işaretli olduğunda kök  $x_1$  ile  $x_b$  arasındadır. İşlem artık bu iki nokta arasındadır. Bu aralık tekrar ikiye bölünür,

$$x_2 = (x_1 + x_b)/2$$

yine işaret kontrolü yapılarak zıt işaretli aralık üzerinden işlem devam eder. Bu çözüm son iki  $x$  değerinin farkının verilen mutlak yaklaşım hatasının küçük eşit değerine ulaşıncaya kadar devam eder.

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \Delta x$$



### Örnek 1.

$$f(x) = y = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$$

fonksiyonun  $1 < x < 2$  aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü bisection (aralığı ikiye bölme) yöntemiyle 0.006 mutlak hatasıyla bulunuz.

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = f(x_1) = f(1) = 1^4 - 9 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 120 \cdot 1 - 130 = -20$$

$$x_2 = 2 \rightarrow y_2 = f(x_2) = f(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 120 \cdot 2 - 130 = 46$$

Zıt işaretli olduğundan başlangıç değerleri doğru seçilmiştir.

$$x_3 = (x_1 + x_2)/2 = (1 + 2)/2 = 1.5$$

$$y_3 = f(x_3) = f(1.5) = (1.5)^4 - 9 \cdot (1.5)^3 - 2 \cdot (1.5)^2 + 120 \cdot (1.5) - 130 = 20,188$$

$$h = |x_3 - x_2| = |1.5 - 2| = 0.5$$

$y_1$  ve  $y_3$  değeri zıt işaretli olduğundan, kök  $x_1$ ,  $x_3$  arasındadır.

$$x_4 = (x_1 + x_3)/2 = (1 + 1.5)/2 = 1,25$$

$$y_4 = f(x_4) = f(1,25) = (1,25)^4 - 9 \cdot (1,25)^3 - 2 \cdot (1,25)^2 + 120 \cdot (1,25) - 130 = 1,74$$

$$h = |x_4 - x_3| = |1,25 - 1,5| = 0.25$$

Tekrar işaret kontrolü yapıldığında  $y_4$  ve  $y_1$  zıt işaretlidir, bu nedenle kök  $x_4$ ,  $x_1$  arasındadır;

$$x_5 = (x_1 + x_4)/2 = (1 + 1,25)/2 = 1,125$$

$$y_5 = f(x_5) = f(1,125) = (1,125)^4 - 9 \cdot (1,125)^3 - 2 \cdot (1,125)^2 + 120 \cdot (1,125) - 130 = -8,74$$

$$h = |x_5 - x_4| = |1,125 - 1,25| = 0.125 \text{ mutlak hatadan küçük değildir işleme devam edilir.}$$

Tekrar işaret kontrolü yapıldığında  $y_5$  ve  $y_4$  zıt işaretlidir, bu nedenle kök  $x_5$ ,  $x_4$  arasındadır;

$$x_6 = (x_4 + x_5)/2 = (1,25 + 1,125)/2 = 1,188$$

$$y_6 = f(x_6) = f(1,188) = (1,188)^4 - 9 \cdot (1,188)^3 - 2 \cdot (1,188)^2 + 120 \cdot (1,188) - 130 = -3,4$$

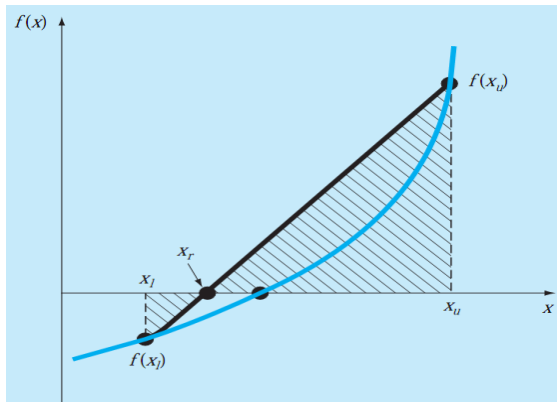
$h = |x_6 - x_5| = |1,188 - 1,125| = 0.063$  mutlak hatadan büyük bir adım daha devam edilir.

adım	$x_n$	$y_n$	$h$
1	1,5	20,188	0,5
2	1,25	1,738	0,25
3	1,125	-8,744	0,125
4	1,188	-3,403	0,063
5	1,156	-6,049	0,031
6	1,141	-7,390	0,016
7	1,133	-8,066	0,008
8	1,129	-8,404	0,004

$h = |x_8 - x_7| = |1,129 - 1,133| = 0,004 < 0,006$ ,  $x = 1,129$  olarak elde edilir.

### 5.3. Doğrusal İnterpolasyon (False Position) Yöntemi

Aralığı ikiye bölme yönteminin yetersiz bir yönü fonksiyonun aralık sınırlarındaki değerlerinin büyüklüklerini göz önüne almaksızın aralığın her zaman ikiye bölünmesidir. Şekilde de görüldüğü gibi  $f(x_l)$  nin  $f(x_u)$  dan küçük olması  $x_l$  nin köke  $x_u$  dan daha yakın olma olasılığını ortaya çıkarmaktadır. Bu durum bir avantaj olarak kullanmaya yönelik olarak doğrusal interpolasyon yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemde aralığın ikiye bölünmesi yerine, aralığın uç noktalarındaki fonksiyon değerlerini birleştiren doğru parçasının  $x$ -eksenini kestiği nokta yeni tahmini kök değeri olarak alınmaktadır. Böylece aralığın uç noktalarındaki fonksiyon değerlerinin büyüklükleri yakınsama hızını artırmak amacıyla bir avantaj olarak kullanılmaktadır.



Buna göre şekildeki benzer üçgenlerden yararlanılarak

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

yazılabilir. Buradan  $x_r$  çekilirse doğrusal interpolasyon formülü;

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u) \cdot (x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

şeklinde elde edilir. Yöntemin algoritması aralığı ikiye bölme ile eşdeğer olup, tek fark,  $x_r$  nin belirlendiği ifadelerde yukarıdaki eşitliğin kullanılmasıdır.

### Örnek 1.

$f(x) = \frac{667,38}{x}(1 - e^{-0,146843x}) - 40$  denkleminin kökünü  $x_l = 12$  ve  $x_u = 16$  değerlerinden başlayarak 0,08 bağıl hatasıyla hesaplayalım,

$n = 1$ ; için

$$x_l = 12, f(x_l) = f(12) = \frac{667,38}{12}(1 - e^{-0,146843 \cdot 12}) - 40 = 6,0699$$

$$x_u = 16, f(x_u) = f(16) = \frac{667,38}{16}(1 - e^{-0,146843 \cdot 16}) - 40 = -2,2688$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u) \cdot (x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \text{ bağıntısından}$$

$$x_r = 16 - \frac{f(16) \cdot (12 - 16)}{f(12) - f(16)} = 16 - \frac{-2,2688 \cdot (12 - 16)}{6,0699 - (-2,2688)} = 14,9113$$

$$f(x_r) = f(14,9113) = \frac{667,38}{14,9113}(1 - e^{-0,146843 \cdot 14,9113}) - 40 = -0,2543$$

$$f(x_l) \cdot f(x_r) = -1,5426 < 0$$

olduğundan kök ilk alt aralıkta kalmaktadır  $x_r$  değeri  $x_u$  değeri olarak atanırsa;

Kök  $x_l$  ile  $x_u = x_r$  arasındadır;

$n = 2$ ; için

$$x_l = 12, f(x_l) = f(12) = \frac{667,38}{12}(1 - e^{-0,146843 \cdot 12}) - 40 = 6,0699$$

$$x_u = 14,9113, f(x_u) = f(14,9113) = \frac{667,38}{14,9113}(1 - e^{-0,146843 \cdot 14,9113}) - 40 = -0,2543$$

$$x_r = 14,9113 - \frac{f(14,9113) \cdot (12 - 14,9113)}{f(12) - f(14,9113)} = 16 - \frac{-0,2543 \cdot (12 - 14,9113)}{6,0699 - (-0,2543)} = 14,7942$$

$$f(x_r) = -0,0273$$

$$\varepsilon = \left| \frac{14,7942 - 14,9113}{14,7942} \right| \cdot \%100 = \%0,79 \text{ diğer adımlar matlab ile}$$

adım	$x_l$	$x_u$	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$x_r$	$f(x_r)$	$\varepsilon$
1	12	16	0,5	-2,2688	14,91	-0,2543	
2	12	14,91	0,25	-0,2543	14,7942	-0,0273	0,7854
3	12	14,79	0,125	-0,0273	14,7817	-0,0029	0,0845
4	12	14,78	0,063	-0,0029	14,7804	-0,0003	0,0090
5	12	14,78	0,031	-0,0003	14,7802	-0,00003	0,0009

$$x = 14,78$$

## Örnek 2.

$f(x) = x^{10} - 1$  fonksiyonunun 0 ile 1,3 aralığında kökünü doğrusal interpolasyon yöntemiyle bulunuz. Her adım için yaklaşık  $\varepsilon_a$  ve  $\varepsilon_t$  gerçek bağıl hataları hesaplayınız

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}} \right| \cdot \%100 \quad , \quad \varepsilon_t = \left| \frac{x_g - x_r^{yeni}}{x_g} \right| \cdot \%100$$

1. adım  $x_l = 0$ ,

$$f(x_l) = f(0) = x^{10} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$x_u = 1,3$ ,

$$f(x_u) = f(1,3) = x^{10} - 1 = (1,3)^{10} - 1 = 12,78$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u) \cdot (x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \text{ bağıntısından}$$

$$x_r = 1,3 - \frac{f(1,3) \cdot (0 - 1,3)}{f(0) - f(1,3)} = 1,3 - \frac{12,78 \cdot (-1,3)}{-1 - (12,78)} = 0,09434$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0,09434)^{10} - 1 = -1$  negatif olduğundan ve kök zıt işaretli aralıkta olacağından  $x_r$ ,  $x_u$  aralığı alınır.  $x_l = 0,09434$  olarak düzeltilir.

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1 - 0,09434}{1} \right| \cdot \%100 = \%90,6 \text{ gerçek hata.}$$

2. adım

$x_l = 0,09430$ ,

$$f(x_l) = (0,09434)^{10} - 1 = -1$$

$x_u = 1,3$ ,

$$f(x_u) = f(1,3) = x^{10} - 1 = (1,3)^{10} - 1 = 12,78$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u) \cdot (x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 1,3 - \frac{f(1,3) \cdot (0,09434 - 1,3)}{f(0,09434) - f(1,3)} = 1,3 - \frac{12,78 \cdot (-1,2057)}{-1 - (12,78)} = 0,18180$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0,1818)^{10} - 1 = -0,9999$  negatif olduğundan  $x_r$ ,  $x_u$  aralığı alınır.  $x_l = 0,18180$  olarak düzeltilir

$$\varepsilon_a = \left| \frac{0,18180 - 0,09434}{0,18180} \right| \cdot \%100 = \%48,1 \quad , \quad \varepsilon_t = \left| \frac{1 - 0,1818}{1} \right| \cdot \%100 = \%81,8$$

3. adım

$$x_l = 0,1818 ,$$

$$f(x_l) = (0,1818)^{10} - 1 = -0,9999$$

$$x_u = 1,3,$$

$$f(x_u) = f(1,3) = x^{10} - 1 = (1,3)^{10} - 1 = 12,78$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l-x_u)}{f(x_l)-f(x_u)}$$

$$x_r = 1,3 - \frac{f(1,3).(0,1818-1,3)}{f(0,1818)-f(1,3)} = 1,3 - \frac{12,78.(-1,1182)}{-0,9999-(12,78)} = 0,26293$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0,26293)^{10} - 1 = -0,9999$  negatif olduğundan  $x_r$ ,  $x_u$  aralığı alınır.  
 $x_l = 0,26293$  olarak düzeltilir.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{0,26293-0,18180}{0,26293} \right| \cdot \%100 = \%30,9 , \varepsilon_t = \left| \frac{1-0,26293}{1} \right| \cdot \%100 = \%73,7$$

4. adım

$$x_l = 0,26293 ,$$

$$f(x_l) = (0,26293)^{10} - 1 = -0,9999$$

$$x_u = 1,3$$

$$f(x_u) = f(1,3) = x^{10} - 1 = (1,3)^{10} - 1 = 12,78$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l-x_u)}{f(x_l)-f(x_u)}$$

$$x_r = 1,3 - \frac{f(1,3).(0,26293 -1,3)}{f(0,26293 )-f(1,3)} = 1,3 - \frac{12,78.(-1,037)}{-0,9999-(12,78)} = 0,33825$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0,33825)^{10} - 1 = -0,9999$  negatif olduğundan  $x_r$ ,  $x_u$  aralığı alınır.  
 $x_l = 0,33825$  olarak düzeltilir

$$\varepsilon_a = \left| \frac{0,33825-0,26293}{0,33825} \right| \cdot \%100 = \%22,3 , \varepsilon_t = \left| \frac{1-0,33825}{1} \right| \cdot \%100 = \%66,2$$

5. adım

$$x_l = 0,33825 ,$$

$$f(x_l) = (0,33825)^{10} - 1 = -0,9999$$

$$x_u = 1,3$$

$$f(x_u) = f(1,3) = x^{10} - 1 = (1,3)^{10} - 1 = 12,78$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u) \cdot (x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x_r = 1,3 - \frac{f(1,3) \cdot (0,33825 - 1,3)}{f(0,33825) - f(1,3)} = 1,3 - \frac{12,78 \cdot (-0,96175)}{-0,9999 - (12,78)} = 0,40798$$

$f(x_r) = x^{10} - 1 = (0,40798)^{10} - 1 = -0,9998$  negatif olduğundan  $x_r$ ,  $x_u$  aralığı alınır.

$x_l = 0,40798$  olarak düzeltilir

$$\varepsilon_a = \left| \frac{0,40798 - 0,33825}{0,40798} \right| \cdot \%100 = \%17,1, \quad \varepsilon_t = \left| \frac{1 - 0,40798}{1} \right| \cdot \%100 = \%59,2$$

adım	$x_l$	$x_u$	$x_r$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_t$
1	0	1,3	0,0943	48,1	90,57
2	0,0943	1,3	0,1818	30,85	81,82
3	0,1818	1,3	0,2629	22,25	73,71
4	0,26293	1,3	0,3381	17,1	66,18
5	0,3381	1,3	0,4079	13,69	59,21

$\varepsilon_a = 0,01$  hata değeri ile 39 adım sonunda  $x = 0,9997$  elde edilir.

#### 5.4. Basit İterasyon Yöntemi

$f(x)$  fonksiyonunun köklerini bulmak için  $f(x) = 0$  denkliği  $x = g(x)$  durumuna sokulur. Bu eşitliğin anlamı  $y = x$  doğrusu ile  $x = g(x)$  fonksiyonunun kesim noktasını bulmaktır.  $x = x_0$  başlangıç değeri için  $g(x_0)$  bulunarak,  $x$ 'in yeni değeri  $x_1 = g(x_0)$  alınır işlemler tekrarlanır;

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

.

$$x_n = g(x_{n-1})$$

Yapılan her işlemin sonunda yeni bir  $x$  değeri elde edilir. Eğer  $\varepsilon_x = |x_n - x_{n-1}|$  yaklaşım hatası değeri gittikçe küçülüyorsa çözüm yakınsak olur. Çözüm için istenen hata değerinden daha küçük bir değere ulaşıncaya kadar tekrarlanır. Fark giderek büyüyorsa çözüm ıraksak olur. Ya yeni bir başlangıç değeri ya da farklı bir çözüm yöntemi denenmelidir.

#### Örnek 1.

$$f(x) = 4 \cdot e^{-0,5x} - x$$

denkleminin kökünü  $x_0 = 3$  başlangıç değeri için  $\varepsilon_x = 0.05$  hata değeri ile bulunuz.

$f(x)$  fonksiyonu  $f(x) = 0$  denkliği ile  $x = g(x)$  durumuna sokulur

$4 \cdot e^{-0,5x} - x = 0$ ,  $x = 4 \cdot e^{-0,5x}$ ,  $g(x) = 4 \cdot e^{-0,5x}$  şekline dönüşmüş olur.

$$g(3) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 3} = 0,89$$

$$g(0,89) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 0,89} = 2,56$$

$$g(2,56) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 2,56} = 1,11$$

$$g(1,11) = 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 1,11} = 2,29$$

.

adım	$x$	$g(x)$	$h =  x_n - x_{n-1} $
1	3	0,89	2,11
2	0,89	2,56	1,66
3	2,56	1,11	1,45
4	1,11	2,29	1,18
5	2,29	1,27	1,02
6	1,27	2,11	0,84
7	2,11	1,38	0,73
.	.	.	.
24	1,68	1,72	0,047

24 adım sonra  $x = 1,7$  bulunur (Matlab)

## Örnek 2.

$f(x) = 4 \cdot \ln(x) - x$  denkleminin kökünü  $x_0 = 3$  başlangıç değeri için  $\varepsilon_x = 0.05$  hata değeri ile bulunuz.

$f(x)$  fonksiyonu  $f(x) = 0$  denkliği ile  $x = g(x)$  durumuna sokulur

$x = 4 \cdot \ln(x)$ ,  $g(x) = 4 \cdot \ln(x)$  şekline dönüşmüş olur.

$$g(3) = 4 \cdot \ln(3) = 4,39$$

$$g(4,39) = 4 \cdot \ln(4,39) = 5,92$$

$$g(5,92) = 4 \cdot \ln(5,92) = 7,11$$

$$g(7,11) = 4 \cdot \ln(7,11) = 7,84$$

.

adım	$x$	$g(x)$	$h =  x_n - x_{n-1} $
1	3	4,39	1,39
2	4,39	5,92	1,52
3	5,92	7,11	1,19
4	7,11	7,84	0,73
5	7,84	8,2	0,39
6	8,2	8,43	0,19
7	8,43	8,53	0,09
8	8,53	8,57	0,04

## 5.5. Newton – Rapson Yöntemi

$x_0$  yaklaşık kök,  $h$  yaklaşımdaki mutlak hata olsun; kökün düzeltilmiş hali;  $x_1 = x_0 + h$  olan  $x_1$ :  $f(x)$  fonksiyonunun köküyse  $f(x_1) = 0$  yani  $f(x_0 + h) = 0$  olmalıdır.

$f(x_0 + h)$  ' ın toylar serisi açılımı;

$h = x_1 - x_0$  olduğundan;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h \cdot f'(x_i) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{(h)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(h)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n$$

$h$  yeterince küçükse ve bu açılımın sadece ilk iki terimi alındığında büyük bir hata yapılmış olmaz,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) \quad f(x_0 + h) = f(x_1) \text{ denilirse;}$$

$$f(x_1) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) \text{ elde edilir.}$$

$x_1, f(x)$ 'in bir kökü olduğunda  $f(x_1) = 0$  olacağından;

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0) = 0 \text{ olur. Buradan;}$$

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0 \text{ elde edilir.}$$

$h$  hatasının mutlak değeri, verilen  $\Delta x$  değerinden küçük değilse  $x_1$  değeri yaklaşık kök olarak kabul edilip  $x_2$  gibi yeni kök hesaplanır. Bu durum mutlak kök değerinden daha küçük eşit bir hata değerine kadar sürdürülür. Her adımda  $h = |x_{n+1} - x_n| \leq \Delta x$  hesaplanır.

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ ifadesinden}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ elde edilir}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ Şeklinde iteratif çözüm yapılır.}$$

### Örnek 1.

$f(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 16$  denkleminin  $x_0 = 4$  civarındaki kökünü  $\varepsilon_x = 0,05$  yaklaşım hatası ile bulunuz.

$$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x^1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 4 - \frac{(4^4 - 3 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16)}{4 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4^1} = 3,1$$

hata düzeyi henüz istenilen düzeyde olmadığından işleme devam edilir.

$$x_2 = 3,1 - \frac{((3,1)^4 - 3 \cdot (3,1)^3 + 6 \cdot (3,1)^2 - 16)}{4 \cdot (3,1)^3 - 9 \cdot (3,1)^2 + 12 \cdot (3,1)^1} = 2,46$$

$$x_3 = 2,46 - \frac{((2,46)^4 - 3 \cdot (2,46)^3 + 6 \cdot (2,46)^2 - 16)}{4 \cdot (2,46)^3 - 9 \cdot (2,46)^2 + 12 \cdot (2,46)^1} = 2,1$$

$$x_4 = 2,1 - \frac{((2,1)^4 - 3 \cdot (2,1)^3 + 6 \cdot (2,1)^2 - 16)}{4 \cdot (2,1)^3 - 9 \cdot (2,1)^2 + 12 \cdot (2,1)^1} = 2,006$$

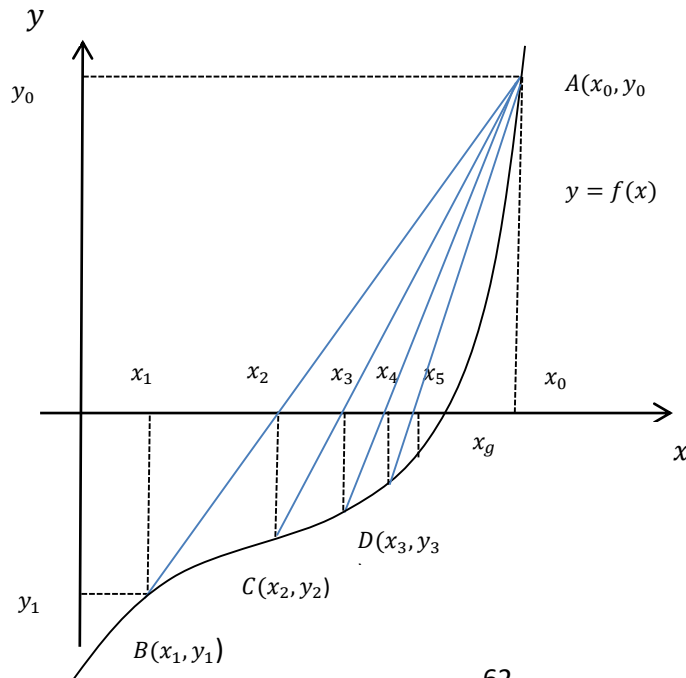
$$x_5 = 2,006 - \frac{((2,006)^4 - 3 \cdot (2,006)^3 + 6 \cdot (2,006)^2 - 16)}{4 \cdot (2,006)^3 - 9 \cdot (2,006)^2 + 12 \cdot (2,006)^1} = 2$$

n	$x_n$	$x_{n+1}$	$h = \left  -\frac{f(x)}{f'(x)} \right $
1	4	3,1	0,9
2	3,1	2,46	0,63
3	2,46	2,1	0,35
4	2,1	2,006	0,09
5	2,006	2	0,09
6	2	2	0,006

Tablodan görüleceği gibi 6. Adımda  $|h| < \varepsilon$   $0,006 < 0,05$  olduğundan;  $x = 2$  dir.

## 5.6. Kiriş Değiştirme (Secant) Yöntemi

Newton-Rapson yönteminde ortaya çıkabilecek potansiyel bir sorun birinci türevin analitik olarak alınmasının gerekliliğidir. Basit polinomlar için bu bir sorun olmamakla birlikte, bazı karmaşık fonksiyonlar için birinci türevin alınmasında güçlükler ortaya çıkabilir. Bu tür durumlarda kullanılır.



$x_1$  ile  $x_0$  arasındaki  $\overline{AB}$  kirişinin denklemi (doğru denklemi);

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow (y - y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow (x - x_0) = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot (y - y_0)$$

$$x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot (y - y_0)$$

$\overline{AB}$  kirişinin  $x$  eksenini kestiği nokta  $x_2$  için bu denklemde  $y = 0$ ,  $x = x_2$  yazılarak;

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot y_0$$

$\overline{AC}$  kirişi için eksen parametreleri bu kirişe göre yazılıp kirişinin  $x$  eksenini kestiği nokta  $x_3$  için aynı denklemde  $y = 0$ ,  $x = x_3$  yazılarak;

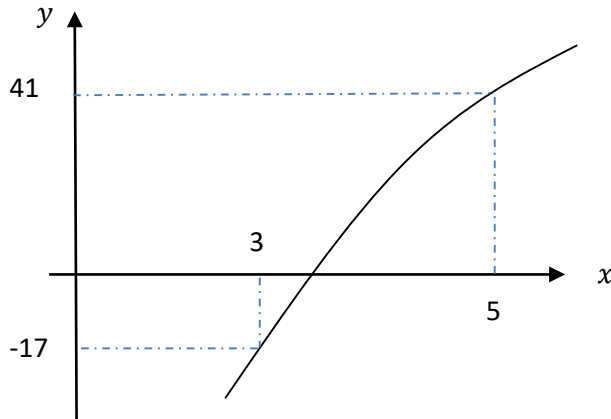
$$x_3 = x_0 - \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0} \cdot y_0$$

Mutlak yaklaşım hatasının belli bir düzeyine kadar bu işlem devam eder. Genelleştirilmiş hali;

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} \cdot y_0$$

### Örnek 1.

$y = f(x) = x^3 - 20x + 16$  denkleminin 3 ile 5 arasında bulunan bir kökünü kiriş yöntemini uygulayarak  $\varepsilon_x = 0,008$  yaklaşım mutlak hatası ile bulunuz.



$x_0 = 5$ ,  $x_1 = 3$  seçilirse;  $y_0$ ,  $y_1$  değerleri hesaplanır.

$$y_0 = f(x_0) = 5^3 - 20.5 + 16 = 41$$

$$y_1 = f(x_1) = 3^3 - 20.3 + 16 = -17$$

yöntem adım adım ilerletilir.

Her adım için yeni  $x_{n+1}$  değeri hesaplanır. Ayrıca her adımda kullanılmak üzere  $y_n = f(x_n)$  değerleri hesaplanır.

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_0$$

$$x_2 = 5 - \frac{(3-5)}{(-17-41)} * 41 = 3,59$$

$$y_2 = f(x_2) = (3,59)^3 - 20 . 3,586 + 16 = -9,6.$$

$$x_3 = 5 - \frac{(3,59-5)}{(-9,6-41)} * 41 = 3,85$$

$$y_3 = f(x_3) = (3,85)^3 - 20 . 3,85 + 16 = -3,93$$

.

matlab çözümü

$n$	$x_n$	$y_n = f(x_n)$	$x_{n+1}$	$h =  x_{n+1} - x_n $
0	5	41		
1	3	-17		
2	3,59	-9,6	3,59	0,59
3	3,85	-3,93	3,85	0,26
<b>4</b>	<b>3,95</b>	<b>-1,3</b>	<b>3,95</b>	<b>0,1</b>
5	3,98	-0,42	3,98	0,03
6	3,99	-0,13	3,99	0,01
7	3,99	-0,04	3,99	0,003

$x = 3,99$  şeklinde bulunur.

## 5.7. Müller Yöntemi

Polinom köklerinin hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir. Hatırlayacağımız gibi, Secant Yöntemi, kökün tahminini, fonksiyonun iki noktadaki değerinden geçen doğrunun x-eksenine uzatılmasıyla elde eder. Müller yöntemi benzer bir yaklaşım kullanır, fakat üç noktadan geçen bir parabolü x eksenine uzatır. Yöntem üç noktadan geçen parabolün katsayılarını bulmaktan ibarettir. Bu katsayılar ikinci derece ifadeye yerine konularak parabolün x-eksenini kestiği nokta, yani kök tahmini yapılır. Parabolik denklem uygun bir şekilde yazılarak yaklaşım kolaylaşır;

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b \cdot (x - x_2) + c$$

Bu parabolün üç noktadan geçmesini isteriz

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$$

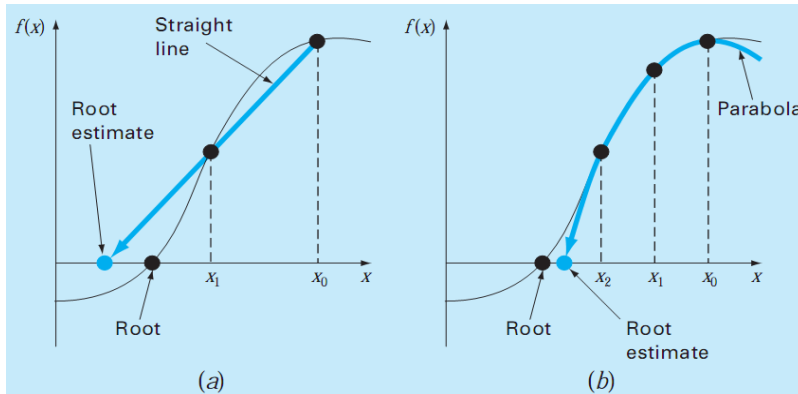
Yukarıdaki eşitlikte üç nokta tek tek yerine konmasıyla hesaplanabilir

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c = c$$

$$c = f(x_2)$$



Şekil –a da köklerin secant yöntemiyle b de ise müller yöntemiyle bulunması gösterilmiştir.

Denklemlerden  $c = f(x_2)$  katsayısı hemen belirlenebilir, ve c-katsayısı fonksiyonun üçüncü tahmininden hesaplanmıştır ve a, b'de hesaplanabilir

$$1. \text{denklem } f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$$

$$2. \text{denklem } f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$

$$h_0 = x_1 - x_0 \quad , \quad h_1 = x_2 - x_1 \quad \text{dir.}$$

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$  ,  $\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$  , denilirse ve bu ifadeler yukarıdaki iki denklemde yerine konulursa;

$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}$  ,  $\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}$  bu ifadeler yukarıdaki iki denklemde yerleştirilirse;

$x_1 - x_2 = -h_1$   $h_0 + h_1 = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 = x_2 - x_0$  ,  $x_0 - x_2 = -(h_0 + h_1)$  dir.

$$\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1} = f(x_1) - f(x_2) = -\delta_1 \cdot h_1$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0} = f(x_0) - f(x_1) = -\delta_0 \cdot h_0$$

2.denklemden;

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$

$$-\delta_1 \cdot h_1 = a(-h_1)^2 + b(-h_1)$$

$$h_1 \cdot b - h_1^2 \cdot a = \delta_1 \cdot h_1$$

$$b = \delta_1 + a \cdot h_1$$

1.denklemden;

$$f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$$

$$-\delta_0 \cdot h_0 - \delta_1 \cdot h_1 = a \cdot (-(h_0 + h_1))^2 + b \cdot (-(h_0 + h_1))$$

$$(h_0 + h_1) \cdot b - (h_0 + h_1)^2 a = \delta_0 \cdot h_0 + \delta_1 \cdot h_1$$

$$h_0 = x_1 - x_0 \text{ , } h_1 = x_2 - x_1 \text{ , } \delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0} \text{ , } \delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}$$

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \text{ , } b = \delta_1 + a \cdot h_1 \text{ , } c = f(x_2)$$

Böylece, aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \text{ hem reel hem kompleks kökler bulunabilir.}$$

Bu eşitlikten elde edilen köklerin hesaplanma işlemi için durdurma kriteri;

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| \cdot \%100$$

Bu eşitlikte işaretten dolayı iki kök elde edilir. Müller yönteminde işaret b'nin işaretine uyacak şekilde seçilir. Bu seçim en büyük payda değerini  $x_2$ 'ye en yakın kök değeri tahminini verecektir.

Bir kere  $x_3$  belirlenince süreç tekrarlanır. Bu durumda aşağıdaki stratejiler kullanılır;

- 1) Eğer reel kökler belirleniyorsa, yeni kök tahmini  $x_3$ 'e en yakın iki orijinal noktayı seçeriz.
- 2) Eğer hem reel hem de kompleks kökler hesaplanıyorsa, sıralamalı bir yaklaşım kullanılır.

### Örnek 1.

Müller yöntemini kullanarak  $x_0 = 4,5$   $x_1 = 5,5$   $x_2 = 5$  sırasıyla İlk tahminleriyle  $f(x) = x^3 - 13x - 12$  denkleminin köklerini belirleyiniz.  $\epsilon_a = 0,03$  (kökler, -3, -1 ve 4'tür)

Önce tahminlerden fonksiyonun değerlerini hesaplayalım;

$$f(x_0) = f(4.5) = 20.625,$$

$$f(x_1) = f(5.5) = 82.875,$$

$$f(x_2) = f(5) = 48$$

Tahmin adımlarında;

$$h_0 = 5,5 - 4,5 = 1 \quad h_1 = 5 - 5,5 = -0,5$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \delta_0 = \frac{82.875 - 20.625}{5,5 - 4,5} = 62.25$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \delta_1 = \frac{48 - 82.875}{5 - 5,5} = 69.75$$

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}, \quad b = a h_1 + \delta_1, \quad c = f(x_2)$$

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{69.75 - 62.25}{(-0,5) + 1} = 15$$

$$b = a \cdot h_1 + \delta_1 = 15 \cdot (-0,5) + 69,75 = 62,25$$

$$c = f(x_2) = 48$$

$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$  denkleminde diskriminantın karesi denenmelidir

$$|b + \sqrt{b^2 - 4ac}| > |b - \sqrt{b^2 - 4ac}|, \quad \sqrt{62,25^2 - 4 \cdot 15 \cdot 48} = 31,54461,$$

$$|62,25 + 31,54461| > |62,25 - 31,54461|,$$

olduğundan paydada pozitif değer kullanılmıştır.

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} = 5 + \frac{-2 \cdot (48)}{62,25 + 31,54461} = 3,976487$$

Hata kestirimi gerçekleştirilir;

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| * \%100 = \left| \frac{3,976487 - 5}{3,976487} \right| * \%100 = \left| \frac{-1,023513}{3,976487} \right| * \%100 = 25,74\%$$

Hata çok büyük olduğu için yeni değerler hesaplanır. Bu işlemler için  $x_0$  yerine  $x_1$ ,  $x_1$  yerine  $x_2$ ,  $x_2$  yerine  $x_3$ . Bundan sonra yeni iterasyon;

$x_0 = 5,5$   $x_1 = 5$   $x_2 = 3,976487$  değerleriyle devam eder.

Hata oranının makul düzeylere indiği adımlarda  $x_n = 4$  olarak bulunur.

$n$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$h_0$	$h_1$	$\delta_0$	$\delta_1$	$a$	$b$	$c$	$x_3$	$\varepsilon_a(\%)$
1	4,5	5,5	5	1	-0,5	62,25	69,75	15	62,25	48	3,97	25,74
2	5,5	5	3,97	-0,5	-1,02	69,75	47,69	14,48	32,88	-0,82	4	0,62
3	5	3,97	4	-1,02	0,02	47,69	34,73	12,98	35,05	0,037	4	0,026

$x = 4$  şeklinde bulunur.

## 5.8. Genelleştirilmiş Newton-Rapson Yöntemi

Doğrusal olmayan denklem takımlarının çözümünde en çok kullanılan yöntemdir.

$$f(x, y) = 0$$

$g(x, y) = 0$  denklemlerinin yaklaşık kökleri;  $x_0, y_0$  ise

$$x_1 = x_0 + \Delta_x,$$

$y_1 = y_0 + \Delta_y$ , düzeltilmiş kök için yukarıdaki denklemlerden;

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = 0$$

$g(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = 0$  bu fonksiyonların Taylor serisi açınımları;

$$f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = f(x_0, y_0) + \frac{\Delta_x}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta_y}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \dots$$

$$g(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) = g(x_0, y_0) + \frac{\Delta_x}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta_y}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} + \dots$$

$\Delta_x$  ve  $\Delta_y$  çok küçük sonlu farklar olduğundan  $\Delta_x$  ve  $\Delta_y$  nin kuvvetlerinin olduğu terimler terkedilir.

$$f(x_0, y_0) + \Delta_x \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \Delta_y \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$g(x_0, y_0) + \Delta_x \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \Delta_y \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Bu noktadan sonra doğrusal denklem takımlarının çözümünde kullanılan yöntemler kullanılabilir. Mutlak hata kontrolü yapılarak  $\varepsilon < |\Delta_x|$ ,  $\varepsilon < |\Delta_y|$  oluncaya kadar iteratif çözüm yapılır.

### Örnek;

$$f(x, y) = x^2 + y - 3 = 0$$

$$g(x, y) = y^2 + x - 5 = 0$$

denklem takımının  $x_0 = 0,6$  ve  $y_0 = 1,5$  noktası civarındaki kökünü  $\varepsilon = 0,08$  mutlak hatasıyla bulunuz.

$x_0 = 0,6$  ve  $y_0 = 1,5$  için;

$$f(x_0, y_0) = 0,6^2 + 1,5 - 3 = -1,14,$$

$g(x_0, y_0) = 1,5^2 + 0,6 - 5 = -2,15$  hesaplanır. Türevler alınır.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 2 * x = 2 * 0,6 = 1,2$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = 2 * y = 2 * 1,5 = 3$$

Matris formuna yerleştirilir.

$$\begin{bmatrix} 1,2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1,14 \\ -2,15 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_x = 0,489, \quad \Delta_y = 0,554$$

Bir adım sonraki  $x_1$   $y_1$  değerleri hesaplanır.

$$x_1 = x_0 + \Delta_x = 0,6 + 0,488 = 1,089$$

$$y_1 = y_0 + \Delta_y = 1,5 + 0,553 = 2,054$$

$f(x_1, y_1) = 0,239$ ,  $g(x_1, y_1) = 0,31$  hesaplanır.

Türev ifadesinde değişenler tekrar hesaplanırsa;

$$\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} = 2 * x = 2 * 1,088 = 2,177$$

$$\frac{\partial g(x_1, y_1)}{\partial y} = 2 * y = 2 * 2,05 = 4,11$$

$$\begin{bmatrix} 2,177 & 1 \\ 1 & 4,11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,239 \\ 0,31 \end{bmatrix}$$

$\Delta_x = 0,085$ ,  $\Delta_y = 0,054$   $\Delta_x < \varepsilon$  ve  $\Delta_y < \varepsilon$  olmadığından işleme devam edilir.

$$x_2 = x_1 + \Delta_x = 1,088 + (-0,07) = 1,004$$

$$y_2 = y_1 + \Delta_y = 2,054 + (-0,54) = 2$$

$n$	$x_0$	$y_0$	$\Delta x$	$\Delta y$
1	0,6	1,5	0,4885	0,5538
2	1,0885	2,0538	0,0848	0,054
3	1,0037	1,9998	0,0037	0,0002

$x = 1$ ,  $y = 2$  şeklinde bulunur.

## 6. İNTERPOLASYON (ARA DEĞER BULMA) YÖNTEMİ VE SONLU FARKLAR

Bilimsel çalışmaların çoğunda deneyler sonucunda veya sayısal işlemler sonucunda bir fonksiyonun ayırık noktaları elde edilir. Elde edilen bu değerlerden faydalanılarak ölçümü yapılmamış yeni değerlerin elde edilmesi işlemine interpolasyon işlemi denilir. Bu işlemde bağımsız değişken  $x$ 'in  $x_1..x_n$  aralığındaki ölçümleri içinde yeni bir değerine karşılık  $x_j$ ,  $f(x_j)$  elde edilir.

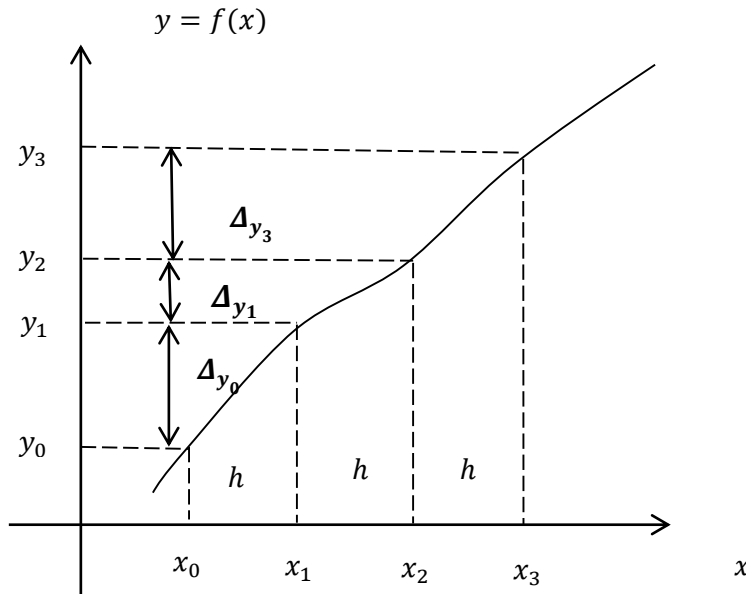
Bu ölçüm aralığının dışındaki bir  $x_{n+j}$  değeri için  $f(x_{n+j})$  hesabına ise Extrapolasyon işlemi denilir.

interpolasyon yöntemlerinin ve bazı sayısal çözüm yöntemlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için *sonlu farklar (ileri-orta-geri yön)* yöntemlerinin iyi bilinmesi gerekir;

### 6.1. Sonlu Farklar

#### 6.1.1. İleri Yönlü Sonlu Farklar

$x$  bağımsız değişkeninin eşit aralıklarındaki değerlerine karşılık düşen bağımlı değişken  $y$ 'nin değerleri şekildeki gibi  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  ise bunların **ileri yöndeki sonlu farkları**;



$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_1 + h) - f(x_1)$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_2 + h) - f(x_2)$$

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(x_n + h) - f(x_n)$$

Bu farkların kuvvetleri ise

$$\Delta^2 y_0 = \Delta.(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta.(\Delta^2 y_0) = \Delta(\Delta y_1 - \Delta y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta.(\Delta^{n-1}.y_0) = \Delta^{n-1}.y_1 - \Delta^{n-1}.y_0$$

Genelleştirme yapılacak olursa;

$$\Delta^n y_m = \Delta(\Delta^{n-1}.y_m) \text{ elde edilir.}$$

İleri yöndeki bu farklar ve kuvvetleri tablo halinde verilen  $x$  ve  $y$  değerlerinden aşağıdaki gibi kolayca elde edilir.

### Örnek 1.

Bir deneyle ölçülen verilerin tablosu aşağıdaki gibi olsun. Tablodan faydalanarak ileri yön sonlu farklar tablosunu hazırlayınız.

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-3	6	25	62	129

x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7	4	5	5	3	1
1	-3	9	10	8	4	
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

$$\Delta y_0 = -3 - (-7) = 4, \quad \Delta y_1 = 6 - (-3) = 9, \quad \Delta y_2 = 25 - 6 = 19, \dots$$

$$\Delta^2 y_0 = 9 - 4 = 5, \quad \Delta^2 y_1 = 19 - 9 = 10, \quad \Delta^2 y_2 = 37 - 19 = 18, \dots$$

$$\Delta^3 y_0 = 10 - 5 = 5, \quad \Delta^3 y_1 = 18 - 10 = 8, \quad \Delta^3 y_2 = 30 - 18 = 12, \dots$$

$$\Delta^4 y_0 = 8 - 5 = 3, \quad \Delta^4 y_1 = 12 - 8 = 4, \dots$$

$$\Delta^5 y_0 = 4 - 3 = 1$$

### 6.1.2. Geri Yönlü Sonlu Farklar

Şekildeki gibi  $x$ 'in  $h$  eşit aralıklarla değerlerine karşılık düşen bağımlı değişkenler  $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-n}$  değerleri ile bunların Geri Yöndeki Sonları Farkları;

$$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1} = f(x_0) - f(x_0 - h)$$

$$\nabla y_{-1} = y_{-1} - y_{-2} = f(x_{-1}) - f(x_{-1} - h)$$

$$\nabla y_{-2} = y_{-2} - y_{-3} = f(x_{-2}) - f(x_{-2} - h)$$

$$\nabla y_{-n} = y_{-n} - y_{-(n+1)} = f(x_{-n}) - f(x_{-n} - h)$$

Olacak bunların kuvvetleri ise;

$$\nabla^2 y_0 = \nabla.(\nabla y_0) = \nabla(y_{-1} - y_0) = \nabla y_{-1} - \nabla y_0 = y_{-2} - y_{-1} - (y_{-1} - y_0) = y_{-2} - 2y_{-1} + y_0$$

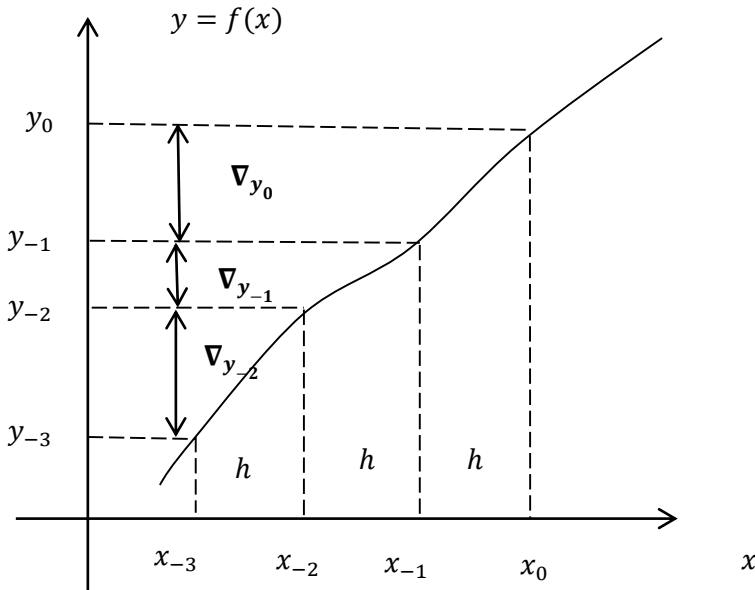
$$\nabla^3 y_0 = \nabla.(\nabla^2 y_0) = \nabla(\nabla y_{-1} - \nabla y_0) = \nabla^2 y_{-1} - \nabla^2 y_0 = y_{-3} - 3y_{-2} + 3y_{-1} - y_0$$

$$\nabla^n y_0 = \nabla.(\nabla^{n-1}.y_0) = \Delta^{n-1}.y_{-1} - \nabla^{n-1}.y_0$$

Genelleştirme yapacak olursak;

$$\nabla^n y_{-m} = \nabla(\nabla^{n-1}.y_{-m}) \text{ elde edilir.}$$

$$\nabla^n y_{-m} = \nabla(\nabla^{n-1}y_{-m}) = (\nabla^{n-1}.y_{-m} - \nabla^{n-1}y_{-(m-1)})$$



### Örnek 1.

Yukarıdaki örnekten geri yön sonlu farkları elde edersek,

$$\nabla y_0 = -3 - (-7) = 4, \quad \nabla y_{-1} = 6 - (-3) = 9, \quad \nabla y_{-2} = 25 - 6 = 19, \dots$$

$$\nabla^2 y_0 = 9 - 4 = 5, \quad \nabla^2 y_{-1} = 19 - 9 = 10, \quad \nabla^2 y_{-2} = 37 - 19 = 18, \dots$$

$$\nabla^3 y_0 = 10 - 5 = 5, \quad \nabla^3 y_{-1} = 18 - 8 = 10, \quad \nabla^3 y_{-2} = 30 - 18 = 12, \dots$$

$$\nabla^4 y_0 = 8 - 5 = 3, \quad \nabla^4 y_{-1} = 12 - 8 = 4, \dots$$

$$\nabla^5 y_0 = 4 - 3 = 1$$

$x$	$y$	$\nabla y$	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	129	67	30	12	4	1

### 6.1.3. Merkezi Yön Sonlu Farklar

$x$ 'in  $h$ ' eşit aralıklarına karşılık düşen  $y$  noktaları ( $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ) olsun,  $x$ 'in  $\frac{h}{2}$  aralıklarına karşılık düşen noktalarda;  $y_{0+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}, y_{2+\frac{1}{2}}, \dots, y_{n+\frac{1}{2}}$  ise  $i$ . noktaya ilişkin merkezi fark;

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i \text{ olarak tanımlanır.}$$

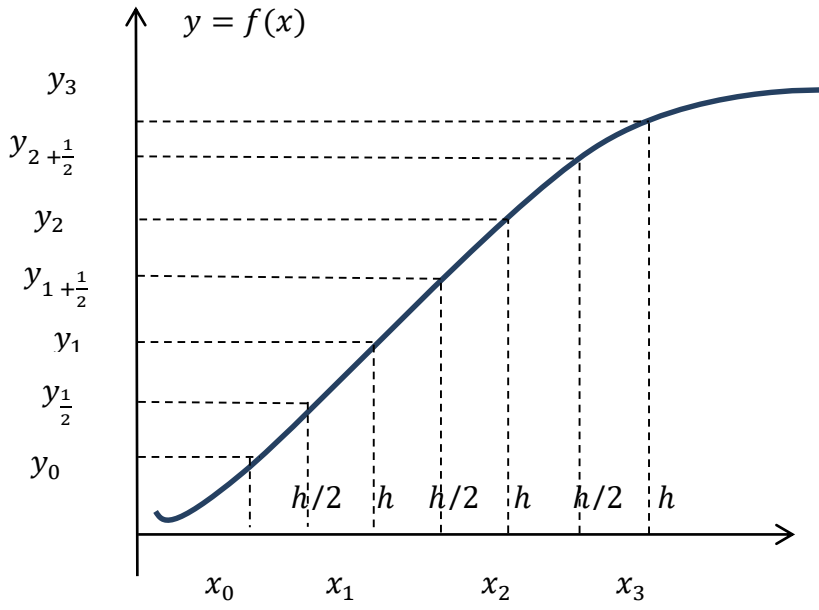
$$\delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0, \quad i = 0$$

$$\delta y_1 = y_{1+\frac{1}{2}} - y_{\frac{1}{2}}, \quad i = 1/2$$

$$\delta y_{1+\frac{1}{2}} = y_2 - y_1, \quad i = 1$$

$$\delta y_{n+\frac{1}{2}} = y_{n+1} - y_n$$

$$\delta^n y_{m+\frac{1}{2}} = \delta^{n-1} \cdot y_{m+1} - \delta^{n-1} y_m$$



$x$	$y$	$\delta y_{\mp \frac{1}{2}}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{\mp \frac{1}{2}}$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y_{\mp \frac{1}{2}}$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	129	67	30	12	4	1

$x = 2$  temel satır alınırsa;

$$x_0 = 2, y_0 = 6$$

$$\delta y_{-\frac{1}{2}} = 9, \delta y_{+\frac{1}{2}} = 19, \delta^2 y_0 = 10, \delta^2 y_1 = 18$$

$$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} = 5, \delta^3 y_{+\frac{1}{2}} = 8, \delta^4 y_0 = 3, \delta^4 y_1 = 4$$

## 6.2. İnterpolasyon Yöntemleri

### 6.2.1. Gregory Newton İnterpolasyon Yöntemi

#### 6.2.1.1. G.N İleri Yön Sonlu Farklar Yöntemini Kullanarak İnterpolasyon

$$Y_1 = Y_0 + \Delta Y_0 = (1 + \Delta)Y_0$$

$$Y_2 = Y_0 + 2\Delta Y_0 + \Delta^2 Y_0 = (1 + \Delta)^2 Y_0$$

$$Y_3 = Y_0 + 3\Delta Y_0 + 3\Delta^2 Y_0 + \Delta^3 Y_0 = (1 + \Delta)^3 Y_0 \text{ bir genelleştirme yapılırsa;}$$

$$Y_P = (1 + \Delta)^P \cdot Y_0 \text{ Bu fonksiyonun binom açılımında}$$

$$Y_P = Y_0 + \frac{P}{1!} \Delta Y_0 + \frac{P(P-1)}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!} \Delta^3 Y_0 + \dots \text{ elde edilir.}$$

Bu bağıntıya “Gregory-Newton ileri yönlü sonlu farklar interpolasyonu” denilir.

$Y_P = f(x_p) = f(x_0 + P \cdot h)$ ,  $P$ . noktanın herhangi bir nokta olarak açılması haline yeni herhangi bir  $x$  noktası için  $y = f(x) = f(x_0 + P \cdot h)$  olur

Yukarıdaki açılımda  $P = \frac{x-x_0}{h}$ , da kullanılabilir.

#### Örnek 1.

İleri yön sonlu farklar tablosundan faydalanarak  $y_{(1.1)}$ 'i bulunuz.

x	$y(x)$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-7	4	5	5	3	1
<b>1</b>	<b>-3</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

İnterpolasyonu istenen noktanın apsisine en yakın  $x$  değer  $x_0$  değeri olarak alınır ve bu satıra tablonun “temel satırı” denir.  $h$  değeri tablodaki  $x$  sütunundan belirlenir.

$x = 1.1$  için en yakın değer  $x_0 = 1$  temel satır seçilir.  $h = 3 - 2 = 1$ ,  $x$  değerleri arasındaki farktan bulunur.

Çözüm için ileri yönümü, geri yönümü kullanacağımıza karar verirken, seriye giren terim sayısının daha fazla olmasına dikkat etmek gerekir bu nedenle  $\nabla$  tablosu değil  $\Delta$  tablosu kullanılır.

$$P = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.1-1}{1} = 0,1 \quad \text{Böylece G-N ileri yön sonlu farklar interpolasyon formülünden;}$$

$y_p = y_0 + \frac{p}{1!} \Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!} \Delta^4 y_0$  temel satır üzerinden işlem yapılır;

$$y_{(1.1)} = (-3) + \frac{0,1}{1!} \cdot 9 + \frac{0,1(0,1-1)}{2!} \cdot 10 + \frac{0,1(0,1-1)(0,1-2)}{3!} \cdot 8 + \frac{0,1((0,1-1)) \cdot ((0,1-2)) \cdot ((0,1-3))}{4!} \cdot 4$$

$$y_{(1.1)} = -3 + 0,9 + (-0,045) \cdot 10 + (0,0285) \cdot 8 + (-0,0206625) \cdot 4$$

$$y_{(1.1)} = -3 + 0,9 - 0,45 + 0,228 - 0,08265 \quad y(1,1) = -2,40465$$

### 6.2.1.2. G.N Geri Yön Sonlu Farklar Formülleri Kullanarak İnterpolasyon

$E = 1 + \Delta = \frac{1}{1-\nabla} = (1 - \nabla)^{-1}$  bağıntısından faydalanılır.

$$y_p = (1 + \Delta)^p \cdot y_0 = (1 - \nabla)^{-p} \cdot y_0$$

$$y_p = y_0 + \frac{p}{1!} \nabla y_0 + \frac{p(p+1)}{2!} \nabla^2 y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} \nabla^3 y_0 + \dots$$

Bu formüle “Gregory-Newton geri yön interpolasyon formülü” denir

### Örnek 1.

Bir sistemle ilgili yapılan seçmeler sonucunda , bir motorun yük momenti ve devir sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.  $My = 7,8Nm$ ’ lik değerine karşılık devir sayısı  $n$  değeri ne olur.

$\frac{My(Nm)}{n(\frac{d}{d})}$     0    2    4    6    8    Bu değeri G-N interpolasyonlarından faydalanarak

bulunuz.

$My$	$n$	$\nabla_n$	$\nabla^2_n$	$\nabla^3_n$	$\nabla^4_n$
0	1000				
2	916	-84			
4	836	-80	4		
6	740	-96	-16	-20	
<b>8</b>	<b>624</b>	<b>-116</b>	<b>-20</b>	<b>-4</b>	<b>16</b>

$My = 7,8Nm$  değeri 8 e yakın alt tarafta bulunduğundan, geri yön sonlu farklar kullanılmalıdır.

$$M_0 = 8Nm \quad h = |0 - 2| = 2 \quad P = \frac{M-M_0}{2} = \frac{7,8-8}{2} = -0,1 \quad n_0 = 624 \text{ d/d}$$

$$n = n_0 + \frac{p}{1!} \nabla n_0 + \frac{p \cdot (p+1)}{2!} \nabla^2 n_0 + \frac{p \cdot (p+1)(p+2)}{3!} \nabla^3 n_0 + \frac{p \cdot (p+1)(p+2)(p+3)}{4!} \nabla^4 n_0 + \dots$$

$$n = 624 + (-0,1) \cdot (-116) + \frac{(-0,1)(-0,1+1)}{2!} \cdot (-20) + \frac{(-0,1)(-0,1+1)(-0,1+2)}{3!} \cdot (-4) + \frac{(-0,1)(-0,1+1)(-0,1+2)(-0,1+3)}{4!} \cdot 16$$

$$n = 624 + 11,6 + 0,9 + 0,114 - 0,3306 = 636,3 \text{ d/d}$$

$$My = 7,8 \text{ nm için } n = 636,3 \text{ d/d}$$

## 6.2.2. Merkezi Farklarla İnterpolasyon

Bir nokta etrafında eşit aralıklarla dağılmış verilerden yapabilmek için merkezi farklılıklardan faydalanılır. Önce merkezi farklar tablosu oluşturulur ve verilecek iki yöntemle İnterpolasyon yapılır. Merkezi yön sonlu farkların birkaç yöntemi vardır.

### 6.2.2.1. Stirling Enterpolayon Formülü

$$y(x) = y_0 + \frac{p}{2} \left( \delta y_{\frac{1}{2}} + \delta y_{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{p^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{p \cdot (p^2-1)}{2 \cdot 3!} \left( \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{p^2(p^2-1)}{4!} \delta^4 y_0 + \dots$$

### 6.2.2.2. Bessel İnterpolasyon Formülü

$$y(x) = y_0 + p \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{p(p-1)}{2 \cdot 2!} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{p \cdot (p-\frac{1}{2})(p-1)}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{p(p+1)(p-1)(p-2)}{2 \cdot 4!} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + \dots$$

### Örnek 1.

Merkezi farklar tablosunun çıkarılışından verilen örnek ele alınacaktır.  $y(2,7)$ 'yi bulalım.  $x = 2,7$  değeri tabloda  $x = 3$  e çok yakın olduğundan tablodaki bu satır temel satır olarak alınır. Dolayısıyla;

$$h = 2 - 1 = 1, \quad x_0 = 3, \quad p = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2,7-3}{1} = -0,3$$

x	0	1	2	3	4	5
Y	-7	-3	6	25	62	129

$$y_0 = y(x_0) = 25, \quad y_1 = 62 \quad \delta y_{\frac{1}{2}} = 32 \quad \delta^2 y_0 = 18 \quad \delta^2 y_1 = 30, \quad \delta^3 y_{\frac{1}{2}} = 12$$

$$\delta^4 y_0 = 4$$

TS

x	y	$\delta y_{\mp\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{\mp\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y_{\mp\frac{1}{2}}$
0	-7	4				
1	-3	9	5	5		
2	6	19	10	8	3	
3	25	37	18	12	4	1
4	62	67	30			
5	129					

Bessel fomülünün ilk üç teriminden

$$y(x) = y_0 + \frac{p}{1!} \cdot \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{p(p-1)}{2.2!} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{p(p-\frac{1}{2})(p-1)}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{p(p+1)(p-1)(p-2)}{2.4!} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + ..$$

$$y(2.7) = 25 + (-0,3).37 + \frac{(-0,3).(-0,3-1)}{2.2!} (18 + 30) + \frac{(-0,3)(-0,3-\frac{1}{2})(-0,3-1)}{3!} .12 + \frac{(-0,3).(-0,3+1)(-0,3-1)(-0,3-2)}{2.4!} .4$$

$y(2.7) = 17,9$  aralığa uygundur

$$y(x) = y_0 + \frac{P}{2} \left( \delta y_{\frac{1}{2}} + \delta y_{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{P^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{P.(P^2-1)}{2.3!} \left( \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{P^2(P^2-1)}{4!} \delta^4 y_0 + \dots$$

$$y(2,7) = 25 + \frac{(-0,3)}{2} . (37 + 19) + \frac{(-0,3)^2}{2!} .18 + \frac{(-0,3).((-0,3)^2-1)}{2.3!} (12 + 8) + \frac{(-0,3)^2((-0,3)^2-1)}{4!} .4$$

$$y(2,7) = 17,85$$

### 6.2.3. Langrange İnterpolasyon Yöntemi

$x$ 'in eşit olmayan aralıkları için yapılan interpolasyondur. Bu interpolasyonda verilen  $(n + 1)$  adet veriye  $n$ . Dereceden bir polinom uydurulur. Böylece ayrıık noktalar için elde edilen polinomdan faydalanılarak  $x$ 'in herhangi bir değerine karşılık  $f(x)$  değeri bulunur.

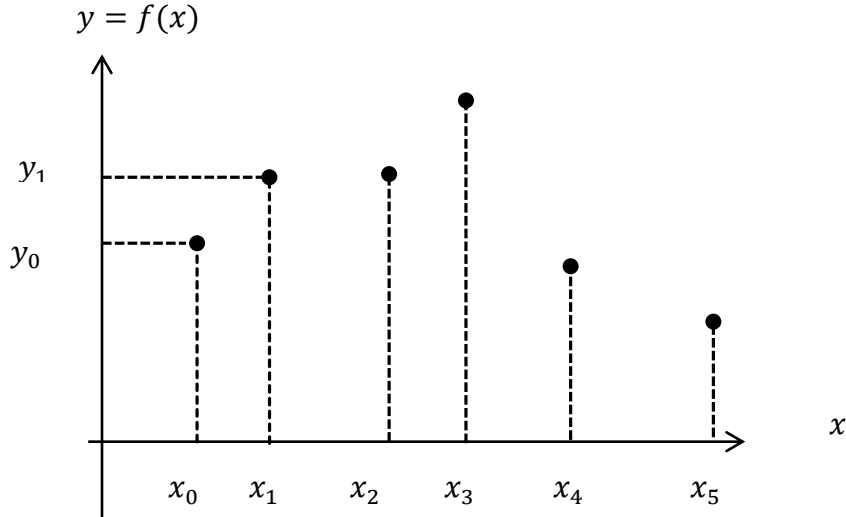
$$g(x) = \sum_i^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

$L_i(x)$  i. Nokta için Langrange katsayısı.

$g(x)$ ; uydurulan polinom

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_n)}$$

İfadenin payında  $(x - x_i)$  paydasında  $(x_i - x_i)$  çarpanı yoktur. Verilen her  $x$  için bu katsayılar hesaplanılarak  $g(x)$  bulunur.



**Örnek 1.**

$i$	0	1	2	3
$x$	1	3	4	6
$y = f(X)$	-7	5	8	14

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 3)(x - 4)(x - 6)}{(1 - 3)(1 - 4)(1 - 6)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 4)(x - 6)}{(3 - 1)(3 - 4)(3 - 6)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 6)}{(4 - 1)(4 - 3)(4 - 6)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(6 - 1)(6 - 3)(6 - 4)}$$

$$g(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2) + L_3f(x_3)$$

$$g(x) = -7L_0 + 5L_1 + 8L_2 + 14L_3$$

$$L_0 = \frac{(x^2-7x+12)(x-6)}{-2 \cdot -3 \cdot -5} = \frac{x^3-7x^2+12x-6x^2+42x-72}{-30}$$

$$L_0 = \frac{x^3-13x^2+54x-72}{-30}$$

$$L_1 = \frac{(x^2-5x+4)(x-6)}{2 \cdot -1 \cdot -3} = \frac{x^3-5x^2+4x-6x^2+30x-24}{6}$$

$$L_1 = \frac{x^3-11x^2+34x-24}{6}$$

$$L_2 = \frac{(x^2-4x+3)(x-6)}{3 \cdot 1 \cdot -2} = \frac{x^3-4x^2+3x-6x^2+24x-18}{-6}$$

$$L_2 = \frac{x^3-10x^2+27x-18}{-6}$$

$$L_3 = \frac{(x^2-4x+3)(x-4)}{5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{x^3-4x^2+3x-4x^2+16x-12}{30}$$

$$L_3 = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{30}$$

$$g(x) = \frac{-7}{-30}(x^3 - 13x^2 + 54x - 72) + \frac{5}{6}(x^3 - 11x^2 + 34x - 24)$$

$$+ \frac{8}{-6}(x^3 - 10x^2 + 27x - 18) + \frac{14}{30}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)$$

$$g(x) = \frac{1}{30}(7x^3 - 91x^2 + 378x - 504 + 25x^3 - 275x^2 + 850x - 600$$

$$-40x^3 + 400x^2 - 1080x + 720 + 14x^3 - 112x^2 + 266x - 168)$$

$$g(x) = \frac{1}{30} \cdot (6x^3 - 78x^2 + 414x - 552)$$

$$g(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$$

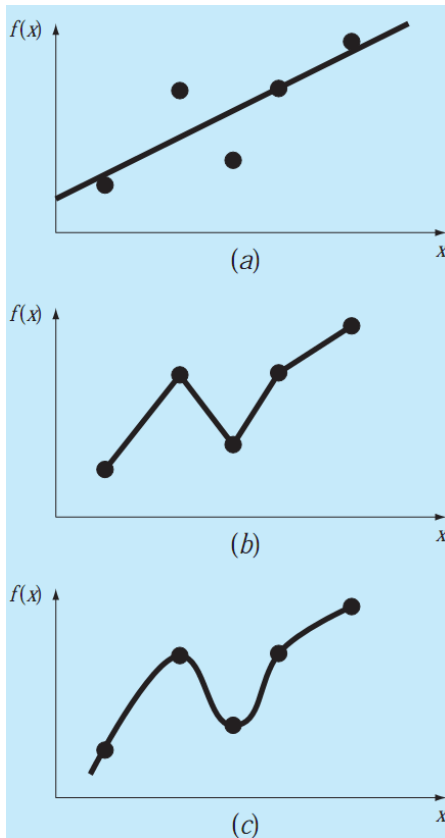
Burada x'in herhangi bir değeri için  $g(x)$  İnterpolasyon bulunabilir.

## 7. EĞRİ UYDURMA YÖNTEMLERİ

Sürekli bir ortam boyunca veriler sıklıkla *ayrık* değerler şeklinde verilir (veya elde edilir). Ancak yine sıklıkla bu ayrık veri değerleri arasındaki bazı değerlerin bilinmesine gereksinim duyulur. Bu bölümde, söz konusu ara değerlerin belirlenmesinde kullanılan yöntemler incelenmektedir. Bu yöntemler genel olarak *eğri uydurma* (*curve fitting*) yöntemleri olarak adlandırılır. Eğri uydurma yöntemleri bazen karmaşık bir takım fonksiyonların yerlerini alabilecek daha basit fonksiyonların belirlenmesinde de kullanılmaktadır.

Uydurulan eğri ile veri değerleri arasındaki hata dikkate alındığında, eğri uydurmada kullanılan yöntemleri iki grupta incelemek mümkündür.

Birinci grupta uydurulan eğri ile veri değerleri arasında önemli derecede hatalar söz konusudur. Bu tür yöntemlerde amaç veri değerlerinin genel dağılımını veya eğilimini en iyi şekilde ifade eden bir eğrinin belirlenmesidir. Veri değerlerinin çok hassas bir doğruluğa sahip olmadığı bu uygulamalarda, uydurulan eğrinin veri noktalarının tümünden geçmesi söz konusu değildir. Bu amaçla uygulanan bir yöntem *en küçük kareler regresyonu* olarak adlandırılır.

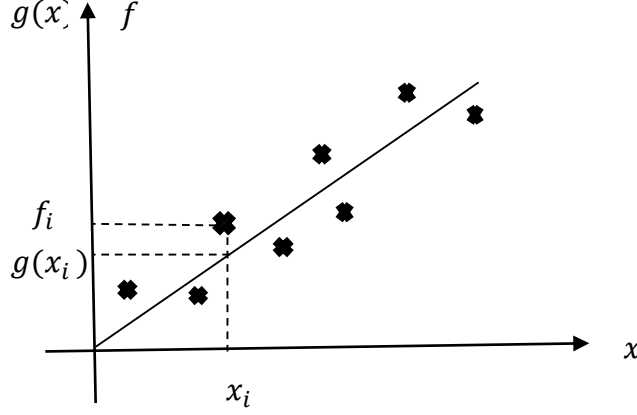


Şekilde noktalardan geçen en iyi üç eğri denemesi.

Daha önce sonlu farkları kullanarak ayrık veri noktalarına polinomial yaklaşımlar yapmıştık ve son olarak Langrange interpolasyonu ile bu ayrık noktaları fonksiyonel şekilde ifade etmiştik. Şimdi ise verilmiş bu ayrık noktalara belirli bir formda fonksiyonların nasıl

uydurulacağını göreceğiz. Öyle ki uydurulan eğriye göre verilen noktalar üzerinden hesaplanan hata minimum olacaktır.

### 7.1. En Küçük Kareler Yöntemi



Şekildeki gibi verilen  $f_i$  noktalarına  $g(x_i)$  fonksiyonu uydurulacak olursa her noktada

$$\varepsilon_i = g(x_i) - f_i$$

Mutlak hataları ortaya çıkar.  $\varepsilon_i$  negatif ve pozitif değer alabileceğinden toplam hata hesaplanırken bunların karelerinin toplamı alınır. Böylece hatada birbirini götürme durumu ortadan kaldırılmış olur.

Toplam hata;

$$E = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f_i]^2 \text{ elde edilir.}$$

Eğer E en küçük yapılırsa (minimize edilirse),  $\varepsilon_i$  mutlak hatasının karesi en küçük yapılmış olur. Verileri değiştiremeyeceğimize göre E'yi en küçük yapmak için  $g(x)$  fonksiyonlarının katsayılarını uygun seçmemiz gerekir.

**Örneğin;**

$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

şeklinde bir polinomsa bu polinomda  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  öyle değerlere sahip olmalıdır ki, toplam hata E minimum olsun.

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$g(x)$  fonksiyonunda ne kadar belirsiz katsayı varsa o kadar  $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$  gibi denklem elde ederiz.

$f_i$  veri noktalarının dağılımına göre doğrusal, polinomial, rasyonel, exponansiyel ve trigonometrik şekilli eğriler ortaya çıkabilir. Bunlar için çözüm yöntemleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

### 7.1.1. Lineer Denklem Uydurma

#### Örnek 1.

$x$	2,1	6,22	7,17	10,52	13,68
$f_i$	2,9	3,83	5,98	5,71	7,74

Olarak verilen noktalara en küçük kareler yöntemiyle

$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x$  doğrusunu uydurmak için önce E'nin ifadesi çıkarılabilir. Daha önce verilen tanımdan;

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f_i]^2 = \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 \cdot x - f_i]^2 \quad \text{buradan;}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f_i] \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_0} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_0}$$

$$\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i) \cdot 1 = \sum_{i=1}^n f_i \cdot 1$$

$$a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial a_1}$$

$$\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i) \cdot x_i = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i$$

1 ve 2 denklemlerinden ;

$$\sum_{i=1}^5 xi = 2,1 + 6,22 + 7,17 + 10,52 + 13,63 = 39,69$$

$$\sum_{i=1}^5 xi^2 = 2,1^2 + 6,22^2 + 7,17^2 + 10,52^2 + 13,63^2 = 392,32$$

$$\sum_{i=1}^5 fi = 2,9 + 3,83 + 5,98 + 5,71 + 7,74 = 26,16$$

$$\sum_{i=1}^5 fi \cdot xi = 2,9 \cdot 2,1 + 6,22 \cdot 3,83 + 7,17 \cdot 5,98 + 10,52 \cdot 5,71 + 13,68 \cdot 7,74 = 238,74$$

Yerlerine yazılırsa

$$1-) a_0 \cdot 5 + a_1 \cdot 39,69 = 26,16$$

$$2-) a_0 \cdot 39,69 + a_1 \cdot 392,32 = 238,74 \text{ elde edilir. İki denklemin çözümünden;}$$

$$a_0 = 2,0383, \quad a_1 = 0,4023 \quad \text{elde edilir ve}$$

$$g(x) = 2,0383 + 0,4023 \cdot x \text{ bulunur.}$$

Denemek için  $x = 2,1$  değeri yerine yazılırsa;

$$g(x) = 2,0383 + 0,4023 \cdot 2 \cdot 1 = 2,88313 \text{ elde edilen değer } fi \text{ ye yakın bir değerdir.}$$

### 7.1.2. Polinom Fonksiyonlar

#### Örnek 1.

$x$	0	0,2	0,4	0,7	0,9	1
$f_i$	1,016	0,768	0,648	0,401	0,272	0,193

$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$E = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f_i]^2 = \sum_{i=1}^6 [a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 - f_i]^2 \text{ olur buradan;}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^6 g(x_i) \cdot \frac{\partial g}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^6 f_i \frac{\partial g}{\partial a_0}$$

$$6 \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^6 xi + a_2 \cdot \sum_{i=1}^6 xi^2 = \sum_{i=1}^6 fi$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^6 g(x_i) \cdot \frac{\partial g}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^6 f_i \frac{\partial g}{\partial a_1}$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i^3 = \sum_{i=1}^6 f_i \cdot x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^6 g(x_i) \cdot \frac{\partial g}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^6 f_i \frac{\partial g}{\partial a_2}$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^6 x_i^4 = \sum_{i=1}^6 f_i \cdot x_i^2$$

serilerin değerleri elde edilir;

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 0,2 + 0,4 + 0,7 + 0,9 + 1 = 3,2$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 0,2^2 + 0,4^2 + 0,7^2 + 0,9^2 + 1 = 2,5$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^3 = 0,2^3 + 0,4^3 + 0,7^3 + 0,9^3 + 1 = 2,144$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^4 = 0,2^4 + 0,4^4 + 0,7^4 + 0,9^4 + 1 = 1,923$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i = 1,016 + 0,768 + 0,648 + 0,401 + 0,272 + 0,193 = 3,293$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i \cdot f_i = 0 \cdot 1,016 + 0,2 \cdot 0,768 + 0,4 \cdot 0,648 + 0,7 \cdot 0,401 + 0,9 \cdot 0,272 + 1 \cdot 0,193 = 1,1313$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i \cdot x_i^2 = 0,768 \cdot 0,2^2 + 0,648 \cdot 0,4^2 + 0,401 \cdot 0,7^2 + 0,272 \cdot 0,9^2 + 0,193 \cdot 1 = 0,744$$

Bunlar 1, 2 ve 3 nolu denklemlerde yerlerine konulursa;

$$6 \cdot a_0 + 3,2 \cdot a_1 + 2,5 \cdot a_2 = 3,293$$

$$3,2 \cdot a_0 + 2,5 \cdot a_1 + 2,144 \cdot a_2 = 1,1313$$

$$2,5 \cdot a_0 + 2,144 \cdot a_1 + 1,923 \cdot a_2 = 0,744$$

$$\text{Buradan } a_0 = 0,9986, \quad a_1 = -1,006, \quad a_2 = 0,2103$$

$$g(x) = 0,9986 + (-1,006 \cdot x) + 0,2103 \cdot x^2 \text{ olarak ifade edilir.}$$

### 7.1.3. Rasyonel Dağılımlı Veriler İçin En Küçük Kareler Yöntemi

#### Örnek 1.

$B = f(H)$  karakteristiğine ait noktalar verilmektedir.

$H_i$	0	100	250	350	500	800	1000	1400	1800	As/m
$B_i$	0	0,5	0,825	1	1,1	1,25	1,3	1,35	1,4	

Bunlar  $B_H$  düzlemine yerleştirildiğinde rasyonel bir fonksiyon civarında dağıldıkları görülür. Burada  $c_1$  ve  $c_2$  belirlenecek katsayılar olmak üzere;

$$B(H) = \frac{1,6H}{c_1 + c_2H} \text{ olsun.}$$

$$g(H) = c_1 + c_2H = \frac{1,6H}{B(H)}$$

Verilen noktalardan  $f_i = \frac{1,6H_i}{B(H)}$  bulup bunlara  $g(H)$  doğrusunu uyduracak olursak  $c_1$  ve  $c_2$  bulunabilir.

$H_i$	0	100	250	350	500	800	1000	1400	1800	As/m
$f_i$	0	320	485	560	727	1024	1230	1660	2057	T

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^9 g_{(H)} \cdot \frac{\partial g}{\partial C_1} = \sum_{i=1}^9 f_i \frac{\partial g}{\partial C_1}$$

$$9 \cdot c_1 + c_2 \cdot \sum_{i=1}^9 H_i = \sum_{i=1}^9 f_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_2} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^9 g_{(H)} \cdot \frac{\partial g}{\partial C_2} = \sum_{i=1}^9 f_i \frac{\partial g}{\partial C_2}$$

$$c_1 \cdot \sum_{i=1}^9 H_i + c_2 \cdot \sum_{i=1}^9 H_i^2 = \sum_{i=1}^9 f_i \cdot H_i$$

$$\sum_{i=1}^9 H_i = 6200 \quad \sum_{i=1}^9 f_i = 8063 \quad \sum_{i=1}^9 H_i^2 = 7285000 \quad \sum_{i=1}^9 f_i \cdot H_i = 8788550$$

$$9 \cdot c_1 + 6200 \cdot c_2 = 8063$$

$$6200 \cdot c_1 + 7285000 \cdot c_2 = 8788550$$

$$c_1 = 156,7 \quad c_2 = 1,073$$

$$B(H) = \frac{1,6H}{156,7 + 1,073H} \text{ elde edilir.}$$

#### 7.1.4. Exponansiyel ( $e^x$ ) Fonksiyonlar

##### Örnek 1.

$x$	0	0,5	1,25	2	2,7	3	3,5	3,9	4,75	5,25
$f_i$	1,37	1,48	2,09	2,77	3,6	4,1	4,88	6,01	7,95	9,9

Veriler koordinat düzleminde exponansiyel bir dağılım gösterir.

$$g(x) = A \cdot e^{Bx}$$

$$\ln g(x) = \ln A + Bx \quad z(x) = C + Bx$$

elde edilebilir.

$y_i = \ln(fi)$  noktalarını hesaplırsak .

$y_i$  için tablo aşağıdaki şekilde olur.

$x$	0	0,5	1,25	2	2,7	3	3,5	3,9	4,75	5,25
$y_i = \ln(fi)$	0,314	0,392	0,737	1,018	1,28	1,41	1,58	1,79	2,07	2,3

Şimdi bu  $y_i$  lere  $z(x) = C + Bx$  doğrusunu en küçük kareler yöntemi ile uyduracak olursak C ve B dolayısıyla A katsayısı belirlenmiş olur;

$$\frac{\partial E}{\partial C} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^{10} z(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial C} = \sum_{i=1}^{10} y_i \frac{\partial z}{\partial C}$$

$$10 \cdot c + B \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^{10} z(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial B} = \sum_{i=1}^{10} y_i \frac{\partial z}{\partial B}$$

$$C \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i + B \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i \cdot x_i$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 26,9 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 12,9 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100 \quad \sum_{i=1}^{10} y_i \cdot x_i = 45$$

$$10 C + 26,9 B = 12,9$$

$$26,9 C + 100 B = 45 \quad \text{bunların çözümünden;}$$

$$C = 0,2548 \quad B = 0,3855 \quad C = \ln A \text{ ise } A = e^C \text{ olduğundan}$$

$$A = e^{0,2548} = 1,2902 \text{ olarak A yıda bulduktan sonra;}$$

$$g(x) = A \cdot e^{Bx} = 1,2902 e^{0,3855x} \text{ elde edilir.}$$

### 7.1.5. Trigonometrik Fonksiyonlar

$x$	0	1	1,5	2,3	2,5	4	5,1	6	6,5	7	8,1	9
$fi$	0,2	0,8	2,5	2,5	3,5	4,3	3	5	3,5	2,4	1,3	2

$x$	9,3	11	11,3	12,1	13,1	14	15,5	16	17,5	17,8	19	20
$f_i$	-0,3	-1,3	-3	-4	-4,9	-4	-5,2	-3	-3,5	-1,6	-11,4	-0,1

Veriler koordinat düzlemine girildiğinde periyodu  $\frac{\pi}{10}$  olan bir sinüs eğrisinin etrafında dağıldığı görülür. Uygulanabilecek en uygun fonksiyon;

$$g(x) = A + B \sin \frac{\pi x}{10} \text{ olur.}$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^{24} g(x_i) \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial A} = \sum_{i=1}^{24} f_i \frac{\partial g(x_i)}{\partial A}$$

$$\sum_{i=1}^{24} (A + B \sin \frac{\pi x_i}{10}) \cdot 1 = \sum_{i=1}^{24} f_i \cdot 1$$

$$n \cdot A + B \cdot \sum_{i=1}^{24} \sin \frac{\pi x_i}{10} = \sum_{i=1}^{24} f_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 0 \text{ ise } \sum_{i=1}^{24} g(x_i) \cdot \frac{\partial g(x_i)}{\partial B} = \sum_{i=1}^{24} f_i \frac{\partial g(x_i)}{\partial B}$$

$$\sum_{i=1}^{24} (A + B \sin \frac{\pi x_i}{10}) \cdot \sin \frac{\pi x_i}{10} = \sum_{i=1}^{24} f_i \cdot \sin \frac{\pi x_i}{10}$$

$$A \cdot \sum_{i=1}^{24} \sin \frac{\pi x_i}{10} + B \cdot \sum_{i=1}^{24} \sin^2 \left( \frac{\pi x_i}{10} \right) = \sum_{i=1}^{24} f_i \sin \frac{\pi x_i}{10}$$

$$\sum_{i=1}^{24} \sin \frac{\pi x_i}{10} = 1,1328 \quad \sum_{i=1}^{24} f_i = -1,3 \quad \sum_{i=1}^{24} \sin^2 \left( \frac{\pi x_i}{10} \right) = 11,0537 \quad \sum_{i=1}^{24} f_i \sin \frac{\pi x_i}{10} = 47,5154$$

Seriler hesaplanıp yerine yazıldığında;

$$24 \cdot A + 1,1328 \cdot B = -1,3$$

$$1,1328 \cdot A + 11,0537 \cdot B = 47,5154 \text{ bunların çözümünden;}$$

$$A = -0,2583 \quad B = 4,3251 \text{ uydurulacak olan fonksiyon;}$$

$$g(x) = -0,2583 + 4,3251 \cdot \sin \left( \frac{\pi x}{10} \right) \text{ elde edilir.}$$

## 8. SAYISAL TÜREV

### 8.1. Sonlu Farklarla Sayısal Türev

$y = f(x)$  gibi bir fonksiyonun  $x_0$  gibi bir noktada türevi  $y' = \frac{dy}{dx}$  olarak tanımlanır. Bunun geometrik anlamı  $x = x_0$  noktasında  $y = f(x)$  'e çizilen teğetin eğimidir.

#### 8.1.1. Geri-Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev

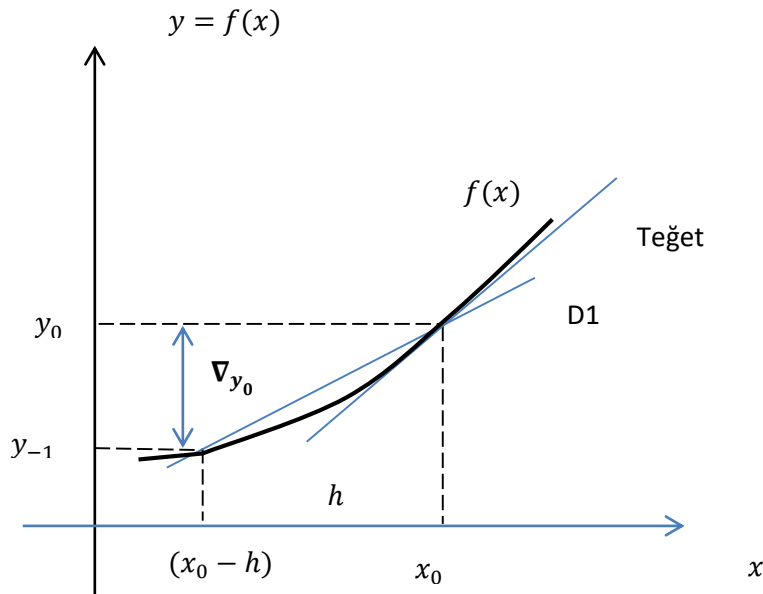
##### Geri-Yön Sonlu Farklardan;

Şekil-a'daki D1 doğrusunun eğiminden;

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y(x_0) - y(x_0 - h)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y_0 - y_{-1}}{h} \right) h$$

çok küçükse limit ifadesi kaldırılarak türevin yaklaşık ifadesi;

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} = \frac{\nabla y_0}{h} \text{ geri yön sonlu farka bağlı olarak elde edilir. **1**}$$



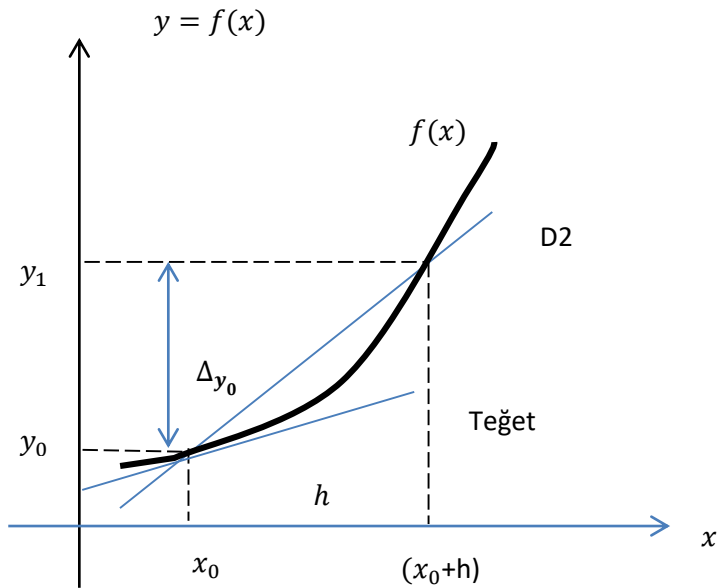
### 8.1.2. İleri-Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev

#### İleri-Yönlü Sonlu Farklardan;

Şekil-b'deki D2 doğrusunun eğiminden;

$\dot{y}(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y_1 - y_0}{h} \right)$  h çok küçükse limit ifadesi kaldırılarak türevin yaklaşık ifadesi;

$\dot{y}(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$  ileri yön sonlu farka bağlı olarak elde edilir. \*\*2\*\*

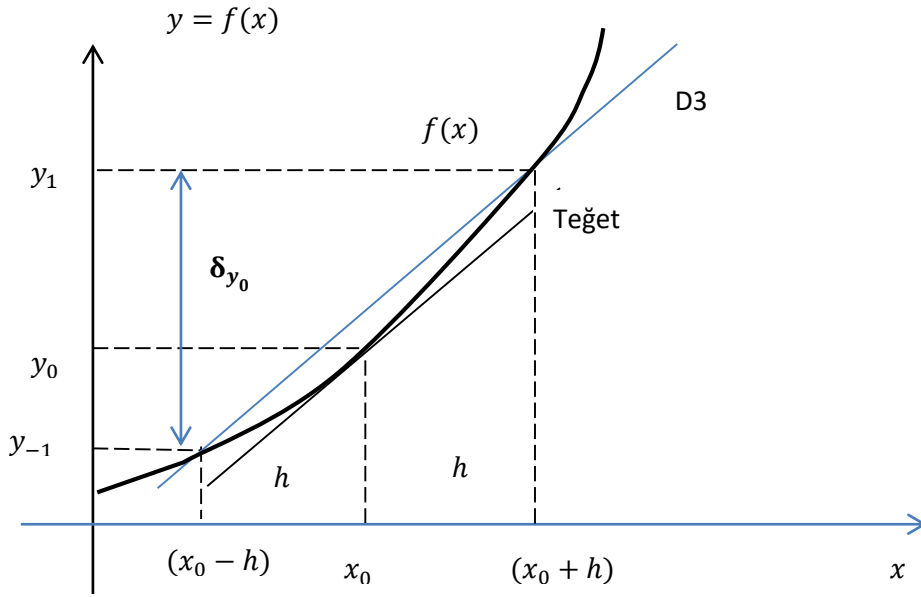


### 8.1.3. Merkezi Yön Sonlu Farklarla Sayısal Türev

#### Merkezi-Yönlü Sonlu Farklardan;

Şekil-c'deki D3 doğrusunun eğiminden;

$\dot{y}(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y(x_0+h) - y(x_0-h)}{2h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \right)$  h çok küçükse limit ifadesi kaldırılarak türevin yaklaşık ifadesi;



$$\dot{y}(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{\delta_{y_0}}{2h} \text{ merkezi yön sonlu farka bağlı olarak elde edilir. } **3**$$

Yukarıdaki üç yöntemdeki üç ifadeden görüleceği gibi analitik çözüm yerine sayısal olarak verilen  $y = f(x)$  den faydalanarak 1. Türevler alınabilir. Yüksek mertebeden türevler için;

$$\ddot{y}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\dot{y}(x_0) - \dot{y}(x_0 - h)}{h} \right) = \frac{1}{h} \left| \frac{\nabla_{y_0} - \nabla_{y_{-1}}}{h} \right| = \frac{1}{h^2} (\nabla_{y_0} - \nabla_{y_{-1}})$$

$\nabla^2_{y_0} = \nabla_{y_0} - \nabla_{y_{-1}} = y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}$  olduğu bilinmektedir; yukarıdaki denklemde yazılırsa;

$$\ddot{y}(x_0) = \frac{\nabla^2_{y_0}}{h^2} = \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} = \frac{y(x_0) - 2y(x_0 - h) + y(x_0 - 2h)}{h^2} \text{ elde edilir.}$$

Genelleştirme yapılırsa n. Mertebeden türev;

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{\nabla^n y_0}{h^n} \text{ geri-yönlü sonlu farklar}$$

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{\Delta^n y_0}{h^n} \text{ ileri-yönlü sonlu farklar}$$

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{\delta^n y_0}{2h^n} \text{ merkezi-yönlü sonlu farklar}$$

### Örnek 1.

$y = f(x) = e^x$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  deki türevini  $h = 0.1$  için;

a)Geri-yönlü sonlu farklarla,

b)İleri-yönlü sonlu farklarla,

c)Merkezi-yönlü sonlu farklarla,

d)Bağıntıdan analitik yolla gerçek değerini bularak sonuçları karşılaştırınız.

$$a) \dot{y}_a(x_0) = \frac{y(x_0) - y(x_0-h)}{h} = \dot{y}_{a(1)} = \frac{y(1) - y(1-0,1)}{0,1} = \frac{e^1 - e^{0,9}}{0,1} = 2,5868$$

$$b) \dot{y}_b(x_0) = \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = \dot{y}_{b(1)} = \frac{y(1+0,1) - y(1)}{0,1} = \frac{e^{1,1} - e^1}{0,1} = 2,8588$$

$$c) \dot{y}_c(x_0) = \frac{y(x_0+h) - y(x_0-h)}{2h} = \dot{y}_{c(1)} = \frac{y(1+0,1) - y(1-0,1)}{0,2} = \frac{e^{1,1} - e^{0,9}}{0,2} = 2,7228$$

$$d) \dot{y}_d = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \dot{y}_{(1)} = e^1 = 2,7183$$

tüm çözümler için bağıl hata hesaplanırsa;

$$\varepsilon_a = \frac{|\dot{y}_d - \dot{y}_a|}{\dot{y}_d} \cdot 100 = \%4,837 \quad \varepsilon_b = \frac{|\dot{y}_d - \dot{y}_b|}{\dot{y}_d} \cdot 100 = \%5,17 \quad \varepsilon_c = \frac{|\dot{y}_d - \dot{y}_c|}{\dot{y}_d} \cdot 100 = \%0,167$$

Hata oranlarından da en yakın çözümün merkezi-yönlü sonlu farklardan elde edildiği görülür.

## 8.2. Taylor Serisi İle Sayısal Türev

Sonlu farklarda çok sayıda  $y$  değeri kullanmadığımızdan hata büyük çıkmaktadır. Bunu Taylor serisi kullanarak çözebiliriz;

$y = f(x)$  gibi bir fonksiyonun  $x = x_0$  gibi bir noktasının  $a = m \cdot h$  civarında taylor açılımını;

$$y(x_0 + a) = y(x_0) + \frac{a}{1!} \dot{y}(x_0) + \frac{a^2}{2!} \ddot{y}(x_0) + \frac{a^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}(x_0) + \dots$$

$$y(x_0 + mh) = y(x_0) + mh \dot{y}(x_0) + \frac{(mh)^2}{2!} \ddot{y}(x_0) + \frac{(mh)^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}(x_0) + \dots$$

**1-) m=1 için;**

$$y(x_0 + h) = y_1 = y_0 + h \cdot \dot{y}(x_0) + \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}(x_0) + \dots \quad \mathbf{**4**}$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(x_0) = \left( \frac{y_1 - y_0}{h} \right) - \frac{h}{2!} \ddot{y}(x_0) + \dots$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(x_0) = \left( \frac{y_1 - y_0}{h} \right) + R(h) \quad **5**$$

\*\*2\*\* bağıntısıyla aynıdır, hata mertebesi de belirlenmiştir.

2-)  $m = -1$  için;

$$y(x_0 - h) = y_{-1} = y_0 - h \dot{y}(x_0) + \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}(x_0) + \dots \quad **6**$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(x_0) = \left( \frac{y_0 - y_{-1}}{h} \right) + R(h) \quad **7**$$

\*\*1\*\* denkleminle aynıdır, hata mertebesi de belirlenmiştir.

3-)

\*\*4\*\* ve \*\*6\*\* bağıntılarından;

$$y(x_0 + h) - y(x_0 - h) = 2 \cdot h \cdot \dot{y}(x_0) + \frac{2 \cdot h^3}{3!} \ddot{y}(x_0) + \dots \quad **8**$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(x_0) = \frac{y(x_0+h) - y(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \ddot{y}(x_0) + \dots$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(x_0) \left( \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \right) + R(h^2) \quad **9**$$

Bu denklem \*\*3\*\* denkleminle aynı olup hata mertebesi  $h^2$  dir.

$0 < h < 1$  olduğu düşünülecek olursa \*\*9\*\* denklemin \*\*5\*\* ve \*\*7\*\* denklemlerine göre çok daha hassas sonuçlar verir.

Bu bağıntılarda kullanılan nokta sayısını artırarak hata mertebesini küçültelim;

1.)

$$m = 1 \text{ için; } y_1 = y_0 + h \dot{y}_0 + \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{(h)^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}_0 + \dots$$

$$m = 2 \text{ için; } y_2 = y_0 + 2 \cdot h \cdot \dot{y}_0 + \frac{(2 \cdot h)^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{(2 \cdot h)^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}_0 + \dots$$

1. denklem 4 ile çarpılıp 2. Denklem -1 ile çarpılırsa;

$$4 \cdot y_1 = 4 \cdot y_0 + 4 \cdot h \cdot \dot{y}_0 + \frac{4 \cdot (h)^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{4 \cdot (h)^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}_0 + \dots$$

$$-y_2 = -y_0 - 2 \cdot h \cdot \dot{y}_0 - \frac{4h^2}{2!} \ddot{y}_0 - \frac{8 \cdot h^3}{3!} \ddot{\ddot{y}}_0 - \dots \text{ elde edilen iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa;}$$

$$\dot{y}_0 = \left( \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \right) + \frac{h^2}{3} \ddot{\ddot{y}}_0 + \dots$$

$$\dot{y}_0 = \left( \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \right) + Rh^2 \text{ İleri-yön noktalar kullanılmaktadır} \quad **10**$$

Burada;  $y_0 = y(x_0)$  ,  $y_1 = y(x_0 + h)$  ,  $y_2 = y(x_0 + 2h)$  olduğundan bunun ileri noktaları kullandığı görülür.

2.)

$$m = -1 \text{ için; } y_{-1} = y_0 - h \dot{y}_0 + \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}_0 - \frac{(h)^3}{3!} \dddot{y}_0 + \dots$$

$$m = -2 \text{ için; } y_{-2} = y_0 - 2h \dot{y}_0 + \frac{(2h)^2}{2!} \ddot{y}_0 - \frac{(2h)^3}{3!} \dddot{y}_0 + \dots \text{ eşitliklerinden;}$$

$$\dot{y}_0 = \left( \frac{y_{-2} - 4y_{-1} + 3y_0}{2h} \right) + Rh^2 \text{ Geri-yön noktalar kullanılmaktadır.} \quad **11**$$

3.)

Yukarıda 10 ve 11 denklemlerinde  $m = 1, 2, -1, -2$  için elde edilen denklemler üzerinden;

$m = 2$  için elde edilen denklemi -1 ile

$m = 1$  için elde edilen denklemi 8 ile

$m = -1$  için elde edilen denklemi -8 ile

$m = 2$  için elde edilen denklemi 1 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak;

$$\dot{y}_0 = \left( \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} \right) + Rh^4 \text{ merkezi yön noktalar için elde edilmiş olur.} \quad **12**$$

İleri, Geri, Merkezi noktaları kullanan formüller için; 1, 2, 3, 4, 5. mertebede denklemler için katsayı tablolar oluşturulmuştur.

### Örnek 1.

Taylor serisinden faydalanarak  $\dot{y}$  (birinci mertebeden türev) için ileri yönde dört nokta kullanan bir bağıntı geliştirip hata mertebesini bulunuz.

$$m = 1 \text{ için; } y_1 = y_0 + h \dot{y}_0 + \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{(h)^3}{3!} \dddot{y}_0 + \frac{(h)^4}{4!} y_0^{(4)} + \dots$$

$$m = 2 \text{ için; } y_2 = y_0 + 2h \dot{y}_0 + \frac{4h^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{8h^3}{3!} \dddot{y}_0 + \frac{16h^4}{4!} y_0^{(4)} + \dots$$

$$m = 3 \text{ için; } y_3 = y_0 + 3h \dot{y}_0 + \frac{9h^2}{2!} \ddot{y}_0 + \frac{27h^3}{3!} \dddot{y}_0 + \frac{81h^4}{4!} y_0^{(4)} + \dots$$

Bu üç denklemden  $y_1$ 'i  $a$  ,  $y_2$ 'yi  $b$  ,  $y_3$ 'ü  $c$  ile çarpıp taraf tarafa toplarsak;

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = (a + b + c) y_0 + (a + 2b + 3c)h \dot{y}_0 + (a + 4b + 9c) \frac{(h)^2}{2!} \ddot{y}_0$$

$$+(a + 8b + 27c) \frac{(h)^3}{3!} \ddot{y}_0 + (a + 16b + 81c) \frac{(h)^4}{4!} y_0^4 + \dots$$

$\dot{y}$  ifadesi elde edilirken  $\dot{y}_0$  ve  $\ddot{y}_0$  ifadeleri yok edilirse ve bunun için katsayıları sıfır alınırsa;

$$(a + 4b + 9c) = 0$$

$$(a + 8b + 27c) = 0$$

a,b,c tam sayı ise ve  $b = k_1 \cdot a$  ,  $c = k_2 \cdot a$  alınır;

$$a(1 + 4k_1 + 9k_2) = 0$$

$$a(1 + 8k_1 + 27k_2) = 0 \text{ elde edilir;}$$

$a \neq 0$  olduğundan

$$1 + 4k_1 + 9k_2 = 0$$

$$1 + 8k_1 + 27k_2 = 0 \text{ çıkar.}$$

denklemleri çözülürse;  $k_1 = -1/2$  ,  $k_2 = 1/9$  bulunur buradan ;

$$b = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a , \quad c = \left(\frac{1}{9}\right) \cdot a \text{ dır.}$$

b ve c tam sayı olacağından a hem 2'ye hem de 9'a tam bölünebilmelidir. Buradan;

$$a = 18, \quad b = -9, \quad c = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

$$18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 11 y_0 + 6h \dot{y}_0 + \frac{3}{2} \cdot h^2 \cdot y_0^2 + \dots$$

$$\dot{y}_0 = \left( \frac{2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0}{6h} \right) + Rh^3 \text{ elde edilir.} \quad **13**$$

## Örnek 2.

Taylor serisinden faydalanarak  $\dot{y}$  (ikinci dereceden türev) için ileri yönde dört nokta kullanan bir bağıntı geliştirerek hata mertebesini bulunuz.

Bir önceki örnekte katsayılarına göre elde edilmiş olan

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = (a + b + c) y_0 + (a + 2b + 3c)h \cdot y_0 + (a + 4b + 9c) \frac{(h)^2}{2!} \dot{y}_0 \\ + (a + 8b + 27c) \frac{(h)^3}{3!} \ddot{y}_0 + (a + 16b + 81c) \frac{(h)^4}{4!} y_0^4 + \dots$$

de  $\ddot{y}_0$ 'yi  $y_0, y_1, y_2$  ve  $y_3$  ile hesaplayıp  $\dot{y}_0$  ve  $\ddot{y}_0$  nün gözükmemesi için katsayıları sıfırlanır;

$$(a + 2b + 3c) = 0$$

$$(a + 8b + 27c) = 0$$

aynı şekilde;  $b = k_1 \cdot a$  ,  $c = k_2 \cdot a$  alınır;

$$1 + 2k_1 + 3k_2 = 0$$

$$1 + 8k_1 + 27k_2 = 0$$

denklemleri çözülürse;  $k_1 = -4/5$  ,  $k_2 = 1/5$  bulunur buradan ;

$b = (-\frac{4}{5}) \cdot a$  ,  $c = (\frac{1}{5}) \cdot a$  olur  $a, b, c$  nin tam sayı olması için;  $a = 5$  seçilirse

$a = 5$ ,  $b = -4$ ,  $c = 1$  olarak bulunur. Bu katsayılardan;

$$5y_1 - 4y_2 + y_3 = 2y_0 - h^2\ddot{y}_0 + \frac{19}{12} \cdot h^4 \cdot y^4 + \dots$$

$$\ddot{y}_0 = \left( \frac{-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0}{h^2} \right) + Rh^2 \text{ elde edilir.}$$

\*\*14\*\*

### Örnek 3.

$t(s)$	0,1	0,2	<b>0,3</b>	0,4	0,5	0,6	0,7
$V(\frac{m}{s})$	10,4	9,9	9,4	9,3	9,4	10,2	11

$t = 0,3$  anındaki ivmeyi; sonlu farklar yöntemiyle (geri, ileri, merkezi) ve Taylor serisinin merkezi yön sonlu farklar yönteminden ve ileri yön dört nokta kullanarak bulunuz. İvme  $a = \Delta V / \Delta t$  dir.

Verilerden  $h = 0,1$  olduğu görülür

$$1) \dot{y}_{(x_0)} = \frac{dy}{dx} = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} = \frac{V_{y_0}}{h} \text{ geri-yön sonlu farklardan}$$

$$a = \frac{V_0 - V_{-1}}{h} = \frac{9,4 - 9,9}{0,1} = -5m/sn^2$$

$$2) \dot{y}_{(x_0)} = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} \text{ ileri-yön sonlu farklardan}$$

$$a = \frac{V_1 - V_0}{h} = \frac{9,3 - 9,4}{0,1} = -1m/sn^2$$

$$3) \dot{y}_{(x_0)} = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{\delta y_0}{2h} \text{ merkezi-yön sonlu farklardan}$$

$$a = \frac{V_1 - V_{-1}}{2h} = \frac{9,3 - 9,9}{2 \cdot (0,1)} = -3m/sn^2$$

4)  $y'(x_0) = \left( \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} \right) + Rh^4$  Taylor serisi merkezi yön noktalar için elde edilmiş

$$a = \left( \frac{-V_2 + 8V_1 - 8V_{-1} + V_{-2}}{12h} \right) = \left( \frac{-9,4 + 8 \cdot 9,3 - 8 \cdot 9,9 + 10,4}{12 \cdot 0,1} \right) = -3,16m/sn^2$$

5)  $y'(x_0) = \left( \frac{2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0}{6h} \right) + Rh^3$  Taylor serisi ileri yön dört nokta

$$a = \left( \frac{2V_3 - 9V_2 + 18V_1 - 11V_0}{6h} \right) = \left( \frac{2 \cdot 10,2 - 9 \cdot 9,4 + 18 \cdot 9,3 - 11 \cdot 9,4}{6 \cdot 0,1} \right)$$

$$a = -0,33m/sn^2$$

En iyi hata mertebesi  $h^4$  olduğundan en güvenilir sonuç 4. Çözümdeki merkezi noktalar kullanıldığında elde edilir.

### 8.3. Gregory-Newton İnterpolasyon Formülleriyle Sayısal Türev

Türev alınacak noktanın verilen  $y$  değerleri tablosunda başta veya sonda oluşuna göre formülleri ileri yön, geri yön diye iki farklı şekilde kullanılmıştı. Dolayısıyla;

a) Gregory-Newton ileri yönlü sonlu farklar interpolasyon formülünden;

$$y(x) = y_0 + \frac{P}{1!} \Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots, \quad P = \frac{(x-x_0)}{h} \text{ olarak tanımlanmıştır.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{(x-x_0)}{h} \right) = \frac{1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dp}$$

Üstteki denklemi  $p$  ye göre türetirsek;

$$y(x) = y_0 + \frac{P}{1!} \Delta y_0 + \frac{(P^2-p)}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{P^3-3P^2+2p}{3!} \Delta^3 Y_0 + \dots \quad p \text{ ye göre türev alırsak;}$$

$$y'_p = \frac{1}{h} \frac{dy}{dp} = \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 + \frac{(2P-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{(3P^2-6p+2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right) \quad (1)$$

$x = x_0$  da türev istenirse  $P = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{(x_0-x_0)}{h} = 0$  olur. Buradan;

$$y'_0 = \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \dots \right) \quad (2)$$

**G.N. ileri yön için birinci mertebe türev formülü elde edilir.**

b) Gregory-Newton geri yönlü sonlu farklar interpolasyon formülünden;

$$Y_p = Y_0 + \frac{P}{1!} \nabla Y_0 + \frac{P(P+1)}{2!} \nabla^2 Y_0 + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!} \nabla^3 Y_0 + \dots$$

$$y_p' = \frac{1}{h} \frac{dy}{dp} = \frac{1}{h} (\nabla Y_0 + \frac{(2P+1)}{2} \nabla^2 Y_0 + \frac{(3P^2+6P+2)}{6} \nabla^3 Y_0 + \dots) \quad (3)$$

$x = x_0$  türev için  $P = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{(x_0-x_0)}{h} = 0$  olur. Buradan;  $P = 0$  koyarsak

$$y_0' = \frac{1}{h} (\nabla y_0 + \frac{1}{2} \nabla^2 y_0 + \frac{1}{3} \cdot \nabla^3 y_0 + \frac{1}{4} \nabla^4 y_0 + \frac{1}{5} \cdot \nabla^5 y_0 + \dots) \quad (4)$$

**G.N. geri-yön için birinci mertebe türev formülü elde edilir.**

Yüksek mertebeli türevler için (1) ve (3) formülden faydalanabiliriz;

Örneğin;  $y''$  türevi için (1) denklemden;

$$y'' = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + (p-1) \cdot \Delta^3 y_0 + \dots) \quad \left\{ \frac{(6P^1-6)}{6} \nabla^3 Y_0 \text{ şeklinde türev} \right\}$$

$x = x_0$  yani  $P = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{(x_0-x_0)}{h} = 0$  olur. Buradan;  $P = 0$  noktasındaki türev;

$$y'' == \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \dots) \quad \text{G.N. İleri yön ikinci mertebe türev formülü.} \quad (5)$$

Aynı şey (2) denklemden elde edilirse;

$$y'' == \frac{1}{h^2} (\nabla^2 y_0 + \nabla^3 y_0 + \dots) \quad \text{G.N. Geri yön ikinci mertebe türev formülü.} \quad (6)$$

#### 8.4. Bessel İnterpolasyon Formülü İle Sayısal Türev

Merkezi farkları kullanan Bessel interpolasyon formülü;

$$y(x) = y_0 + P \cdot \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{P(P-1)}{2.2!} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{P \cdot (p-\frac{1}{2})(P-1)}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{P(P+1)(P-1)(P-2)}{2.4!} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) ..$$

$$y(x) = y_0 + P \cdot \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{(P^2-p)}{2.2!} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{(p^3-\frac{3}{2}P^2+\frac{p}{2})}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{(p^4-2p^3-p^2+2p)}{2.4!} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + ..$$

$$y_p' = \frac{1}{h} \frac{dy}{dp} = \frac{1}{h} [\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{(2P-1)}{4} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{(3P^2-3p+\frac{1}{2})}{6} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{(4P^3-6p^2-2p+2)}{48} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + ..] \quad (7)$$

$x = x_0$  yani  $p = 0$  noktasındaki türev;

$$y_0' = \frac{1}{h} [\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{1}{12} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} (\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + ..] \quad (8)$$

Benzer Şekilde Stirling enterpolasyon formülünü kullanarak bağıntı geliştirilebilir.

Verilmiş olan  $y$  tablosunda  $h$  aralıklı  $x_0$  ile  $x$  arasındaki herhangi bir noktadaki türev isteniyorsa o zaman  $p = \frac{(x-x_0)}{h}$  dan  $p$  hesaplanarak  $y'_p$  lerden türev bulunur.

### Örnek 1.

Verilen tablodan G-N ileri yön ve Bessel merkezi yön sonlu farklar tablolarını hazırlayarak  $t_0 = 0,3$  anındaki ivmeyi hesaplayınız.

t(s)	V(m/s)	$\Delta V$	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$	$\Delta^4 V$	$\Delta^5 V$
0,1	10,4	-0,5	0	0,4	-0,6	1,3
0,2	9,9	-0,5	0,4	-0,2	0,7	-1,9
<b>0,3</b>	<b>9,4</b>	<b>-0,1</b>	<b>0,2</b>	<b>0,5</b>	<b>-1,2</b>	
0,4	9,3	0,1	0,7	-0,7		
0,5	9,4	0,8	0			
0,6	10,2	0,8				
0,7	11					

$y'_0 = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \dots)$  G.N. ileri yön sonlu farklar türev formülü

$t_0 = 0,3$  'de ivme

$$a = V' = \frac{1}{0,1} (-0,1 - \frac{0,2}{2} + \frac{0,5}{3} \Delta^3 y_0 + \frac{1,2}{4} + 0)$$

$$a = V' = 2,66$$

Tablodan Merkezi Yön sonlu farklar elde edilirse;

t(s)	v(m/s)	$\delta V_{\pm 1/2}$	$\delta^2 V$	$\delta^3 V_{\pm 1/2}$	$\delta^4 V$	$\delta^5 V_{\pm 1/2}$	$\delta^5 V$
0,1	10,4						
		-0,5					
0,2	9,9		0				
		-0,5		0,4			
<b>0,3</b>	<b>9,4</b>	<b>-0,1</b>	<b>0,4</b>	<b>-0,2</b>	<b>-0,6</b>	<b>1,3</b>	
			<b>0,2</b>		0,7		-3,2
0,4	9,3			0,5		-1,9	
		0,1			-1,2		
0,5	9,4		0,7				
		0,8		-0,7			
0,6	10,2		0				
		0,8					
0,7	11						

$y'_0 = \frac{1}{h} [\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{1}{12} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}(\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1) + \dots]$  merkezi yön sonlu farklar formülü

$$a = V' = \frac{1}{0,1} [-0,1 - \frac{1}{4}(0,4 + 0,2) + \frac{1}{12}(-0,2) + \frac{1}{24}(-0,6 + 0,7)]$$

$$a = V' = \frac{1}{0,1} [-0,1 - 0,15 - 0,0166 + 0,0042]$$

$$a = V' = -2,625 \text{ azalan ivme}$$

## Örnek 2.

$y = e^x$  fonksiyonuna ilişkin  $y$  değerlerini 0,7.. 1,4 aralığında  $h = 0,1$  aralıklarla hesaplayıp  $\Delta y$  ve  $\delta_y$  farklar tablolarını çıkarınız. Bu tablolardan faydalanarak ve aşağıdaki denklemlerden  $x_0 = 1$  deki türevini bulup analitik yolla bulunanla karşılaştıralım.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,7	2,013	0,212	0,022	0,003	-0,001
0,8	2,225	0,234	0,025	0,002	0,001
0,9	2,459	0,259	0,027	0,003	0
<b>1,0</b>	<b>2,718</b>	<b>0,286</b>	<b>0,030</b>	<b>0,003</b>	
1,1	3,004	0,316	0,033		
1,2	3,320	0,349			
1,3	3,669				

$y'_0 = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \cdot \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \cdot \Delta^5 y_0 - \dots)$  G.N. ileri yön sonlu farklar türev formülü

$x_0 = 1$  'deki türev;

$$y'_0 = \frac{1}{0,1} [0,286 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,003] = 2,72$$

Merkezi yön tablosu hesaplanırsa;

$x$	$y$	$\delta y_{\pm 1/2}$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y_{\pm 1/2}$
0,7	2,013			
		0,212		
0,8	<b>2,225</b>		0,022	
		0,234		0,003
0,9	<b>2,459</b>		0,025	
		0,259		0,002

1,0	2,718		0,027	
		0,286		0,003
1,1	3,004		0,03	
		0,316		0,003
1,2	3,320		0,033	
		0,349		
1,3	3,669			

$y'_0 = \left( \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} \right) + Rh^4$  Taylor serisi merkezi yön noktalar için elde edilmiş türev formülü;

$$y'_0 = \left( \frac{-3,320 + 8 \cdot 3,004 - 8 \cdot 2,459 + 2,225}{12 \cdot 0,1} \right) = 2,7208$$

$y'_0 = \frac{1}{h} \left[ \delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{1}{12} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \dots \right]$  merkezi yön sonlu farklar türev formülü;

$$y'_0 = \frac{1}{0,1} \left[ 0,286 - \frac{1}{4} (0,027 + 0,03) + \frac{1}{12} (0,003) \right] = 2,7204$$

Analitik çözüm;

$$y_0 = e^{x_0} = 2,718$$

## 8.5. Polinomlarla Sayısal Türev

Sonlu farklarla, polinomlar arasındaki ilişkiden polinomları kullanarak sonlu fark bağıntıları çıkarma şeklinde türev alınabilir.

$y(x) = Ax^2 + Bx + C$  polinomunda

$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h$  noktalarındaki değerler  $y_0, y_1, y_2$  ise;

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C$$

$$x_1 = h \Rightarrow y_1 = Ah^2 + Bh + C$$

$x_2 = 2h \Rightarrow y_2 = 4Ah^2 + 2Bh + C$  elde edilir. Bu üç eşitlikten;

$$B = \left( \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \right) \text{ elde edilir.}$$

$y'(x) = 2Ax + B$  ve  $y'(0) = B$  olduğundan;

$$y'_0 = B = \left( \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \right) \text{ ileri yön sonlu farklar formülüdür.}$$

Eğer  $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 3h$  aralıkları için  $y_0, y_1, y_2$  verilmiş olsaydı

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C$$

$$x_1 = h \Rightarrow y_1 = Ah^2 + Bh + C$$

$$x_2 = 2h \Rightarrow y_2 = 9Ah^2 + 3Bh + C \text{ elde edilir. Bu üç eşitlikten;}$$

$$y'_0 = B = \left( \frac{-8y_0 + 9y_1 - y_2}{6h} \right) \text{ elde edilir.}$$

### Örnek 1.

$x$	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	5	0,5	8,0	35,5	95	198,5

Yukarıdaki bilgiler bir polinoma aittir. Bu polinoma ait bilgilerden; polinomun kaçınıcı dereceden olduğunu, polinomun terimleri içerisinde en büyük dereceli olanın katsayısını bulunuz.

Geri veya ileri yön sonlu farklar kullanılabilir;

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	-0,5	8	12
1	0,5	7,5	20	12
2	8	27,5	32	12
3	35,5	59,5	44	
4	95	103,5		
5	198,5			

3. farklar sabit olduğundan Polinom 3. Derecedendir.

3. dereceden türev sonlu farklar cinsinden;

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\Delta^3 y}{h^3} + R(h) \text{ hatayı ihmal ederek } x \text{'in değerinden } h = 1 \text{ olduğundan;}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\Delta^3 y}{h^3} = \frac{12}{1} = 12$$

Bunun ardışık integrasyonu ile aranan polinomun;

$$y = C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 \text{ olduğu ortaya çıkar.}$$

En büyük dereceli terimin katsayısı;

$$\frac{dy}{dx} = 3C_3 x^2 + 2C_2 x + C_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6C_3x^1 + 2C_2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6 \cdot C_3 = 12 \text{ olduğundan } C_3 = 2 \text{ dir.}$$

## 9. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

**Diferansiyel Denklemlerin Çözümü;** o diferansiyel denklemi sağlayan bağımlı değişkendir.

$L \frac{di}{dt} + Ri = \sin \omega t$  denklemin çözümü, bu diferansiyel denklemi sağlayan  $i$  değeridir.

### 9.1. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

#### a)Katsayılarına Göre Diferansiyel Denklemler

*1-Sabit Katsayılı Liner (Doğrusal) Diferansiyel Denklemler*

$$c_1 \frac{dy}{dx} + c_2 y = f(x), \quad (c_1, c_2 \text{ sabit sayılar})$$

*2-Değişken Katsayılı Liner (Doğrusal) Diferansiyel Denklemler*

$$c_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + c_2(x) \cdot y = f(x), \quad (c_1, c_2 \text{ x'in fonksiyonu})$$

*3-Nonliner (Doğrusal olmayan) Diferansiyel Denklemler*

$$c_1(y) \cdot \frac{dy}{dx} + c_2(y) \cdot y = f(x), \quad (c_1, c_2 \text{ y'nin yani bağımlı değişkenin fonksiyonu})$$

#### b)Derece ve Mertebelerine Göre Diferansiyel Denklemler

$(\frac{d^m y}{dx^m})^n$  m mertebeyi, n dereceyi gösterir.

m. mertebeden, n. dereceden bir diferansiyel denklem olarak tanımlanır.

$$c_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + c_3 \cdot y = f(x) \quad (\text{sabit katsayılı, 2. Mertebeden liner diferansiyel denklem})$$

$$c_1 (\frac{d^2 y}{dx^2})^3 + c_2 (\frac{d^2 y}{dx^2})^2 + c_3 \cdot y = f(x) \quad (\text{sabit katsayılı, 2. Mertebeden 3. Dereceden liner diferansiyel denklem})$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sin \omega t \quad (\text{Sabit katsayılı Liner 1. Mertebeden diferansiyel denklem})$$

$$L(i) \frac{di}{dt} + Ri = \sin \omega t \quad (\text{Nonliner 1. Mertebeden diferansiyel denklem})$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega \sin \omega t \quad (\text{İkinci Mertebeden sabit katsayılı Liner diferansiyel denklem})$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{sabit katsayılı ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( V_{(A)} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V_{(A)} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j \quad (\text{ikinci mertebeden, nonliner, kısmi diferansiyel denklem})$$

## 9.2. Taylor ve Maclourin Serileri ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

**Maclourin Serisi kullanımı;** Diferansiyel denklemin verilen ilk koşulları (başlangıç değerleri) bağımsız değişkenin sıfır değeri için verildiğinde kullanılır.

**Taylor Serisi kullanımı;** Başlangıç değerleri sıfırdan farklı değerler için veriliyorsa kullanılır.

**Örnek;**

$$y' = \frac{1}{2}(1+x).y^2$$

bu diferansiyel denklemin  $x_0 = 0$  için  $y_0 = 1$  ilk değeri ile çözümü için verilen diff denklemden;

$$y' = \frac{1}{2}(1+x).y^2 \quad y'(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(1+x_0).y_0^2 = \frac{1}{2}(1+0).1^2 = \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}y^2 + (1+x).y.y' \quad y''(x_0, y_0) = \frac{1}{2}y_0^2 + (1+x_0).y_0y' = \frac{1}{2}1^2 + (1+0).\frac{1}{2}.1 = 1$$

$$y''' = 0 + y.y' + \left(\frac{1}{2}2yy' + y'y' + yy'' + xy'y' + xyy''\right) = 2.y.y' + (1+x).[(y')^2 + y.y'']$$

$$y'''(x_0, y_0) = 2.1.\frac{1}{2} + (1+0).\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1.1\right] = \frac{9}{4}$$

Şeklinde ardışık türevler alınarak  $(x_0, y_0)$  değerleri yerine yerleştirilerek maclourin serisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y(x) = y_0 + \frac{x}{1!}y'(x_0, y_0) + \frac{x^2}{2!}y''(x_0, y_0) + \frac{x^3}{3!}y'''(x_0, y_0) + \dots \quad (1)$$

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1}.\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2!}.1 + \frac{x^3}{3!}.\frac{9}{4}$$

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} + \dots \quad (2)$$

şeklinde bir seri oluşur. Bu seri sayısal çözümlere için uygun değildir.

### 9.3. Euler Yöntemi ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

$h = \Delta x = (x_1 - x_0)$  ve verilen  $(x_0, y_0)$  ilk değerleri için Taylor serisinden ;

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0, y_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0, y_0) + \dots$$

$$y_1 = y_0 + h.y'(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0, y_0) + \dots \text{ ilk iki terim alınırsa;}$$

$$y_1 = y_0 + h.y'(x_0, y_0) \text{ bağıntısı elde edilir.}$$

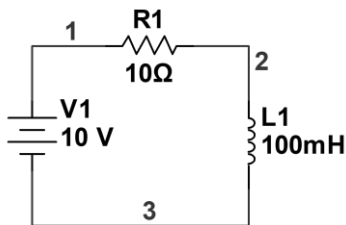
Verilen diferansiyel denklem,  $h$  ve  $(x_0, y_0)$  ilk değerlerinden  $y$  'nin  $y_1$  gibi yeni bir noktasını bulabiliriz. Böylece  $x_1 = (x_0 + h)$  için  $y = y_1$  bulunmuş olur. Her bulunan noktanın bir sonraki noktaya başlangıç değeri oluşturduğu düşünülürse;

$$y_2 = y_1 + h.y'(x_1, y_1)$$

ile hesaplanır.  $y' = f(x, y)$  diferansiyel denklemin,  $h, x_n, y_n$ , için genelleştirilmiştir.

$$y_{n+1} = y_n + h.y'(x_n, y_n) \text{ elde edilir.}$$

#### Örnek 1.



Seri bağlı  $R = 10\Omega$  direnç ile  $L = 0.1H$  bobinden oluşan bir devreye 10V bir doğru gerilim  $t_0 = 0$  anında uygulanıyor.  $i_0 = i(0) = 0$ , ve  $h = \Delta t = 0,001$  aralıklarla  $i_1 = i(t_1)$ ,  $i_2 = i(t_2)$  yi Euler yöntemi ve analitik yöntemle hesaplayınız.

Verilen devreye ilişkin çevre denkleminden;

$$E = R.i + L.\frac{di}{dt} \text{ diferansiyel denklemden;}$$

$$f(t, i) = \frac{di}{dt} = \frac{E-R.i}{L} = \frac{10-10.i}{0,1} = 100(1 - i) \Rightarrow f(t, i) = \frac{di}{dt} = 100(1 - i) \text{ elde edilir.}$$

Euler yöntemi çözümü;

$$t_1 = (t_0 + h) = 0,001\text{sn}$$

$$i_1 = i_0 + hf(t_0, i_0) \quad i_1 = 0 + 0,001 \cdot (100 \cdot (1 - 0)) \Rightarrow i_1 = 0,1 A$$

$$t_2 = (t_1 + h) = 0,002 \text{sn}$$

$$i_2 = i_1 + hf(t_1, i_1) \quad i_2 = 0,1 + 0,001 \cdot (100 \cdot (1 - 0,1)) \Rightarrow i_2 = 0,09A$$

Diferansiyel denklemin analitik çözümü;

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (\text{bobinin analitik ifadesi}) \quad (\tau = L/R \text{ zaman sabiti})$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,1}{10} = 0,01$$

$$i(t) = \frac{10}{10}(1 - e^{-\frac{t}{0,01}}) \quad i(t) = 1(1 - e^{-100t}) \text{ olup}$$

$$i_1 = i(0,001) = 0,0952, \quad i_2 = i(0,002) = 0,1813 \text{ şeklindedir.}$$

Devreden akan  $i$  akımının zamansan değişimi için iterasyon sayısı artırılır.

## 9.4. Runge-Kutta Yöntemleri ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

### 9.4.1. İki Adımlı Runge-Kutta Yöntemi

$y' = f(x, y)$  diferansiyel denklemini  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  ilk değerleri  $\Delta x = h$  aralığı ile çözmek için ilk adımda;

1. Adım;

$$A = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$x_A = x_0 + \frac{h}{2}$$

$$y_A = y_0 + \frac{A}{2}$$

$\Delta y_1 = h \cdot f(x_A, y_A)$  ara değerlerini hesapladıktan sonra ikinci adımda

2. Adım

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

$x_1 = x_0 + h$  ile bulunur.

$y_2$  ikinci noktayı hesaplamak için Aynı işlemler  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  ilk değerleriyle tekrarlanır.

### Örnek 1;

$$f(i, t) = \frac{di}{dt} = 100(1 - i)$$

diferansiyel denkleminde  $i_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$  ilk değeri ve  $h = 0,001s$  için  $i_1$  ve  $i_2$  yi iki adımlı Runge-Kutta yöntemini kullanarak hesaplayınız.

$i_1$ 'in hesabı;

1. Adım;

$$A = h \cdot f(t_0, i_0) = 0,001 \cdot (100 \cdot (1-0)) = 0,1$$

$$t_A = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,001}{2} = 0,0005$$

$$i_A = i_0 + \frac{A}{2} = 0 + \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$\Delta i_1 = h \cdot f(t_A, i_A) = 0,001 * 100(1 - 0,05) = 0,095$$

2. Adım

$$i_1 = i_0 + \Delta i_1 = 0 + 0,095 = 0,095A$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,001 = 0,001$$

$i_2$  ikinci noktayı hesaplamak için Aynı işlemler  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  ilk değerleriyle tekrarlanır

$i_2$ 'nin hesabı;

1. Adım;

$$A = h \cdot f(t_1, i_1) = 0,001 \cdot 100(1-0,095) = 0,0905$$

$$t_A = t_1 + \frac{h}{2} = 0,001 + \frac{0,001}{2} = 0,0015$$

$$i_A = i_1 + \frac{A}{2} = 0,095 + \frac{0,0905}{2} = 0,14$$

$$\Delta i_2 = h \cdot f(t_A, i_A) = 0,001 * 100(1 - 0,14) = 0,086$$

2. Adım

$$i_2 = i_1 + \Delta i_2 = 0,095 + 0,086 = 0,181A$$

$$t_2 = t_1 + h = 0,001 + 0,001 = 0,002$$

Analitik sonuçlar

$$i_1 = 0,0951A \quad i_2 = 0,181A$$

## Örnek 2.

$$y' = \frac{1}{2}(x + y) \cdot y^2$$

diferansiyel denklemini  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  başlangıç koşulu  $h = 0,1$  adımla 2 adımlı R-K yöntemini kullanarak  $y$ 'nin,  $y_1$  ve,  $y_2$  gibi iki yeni değerini bulunuz.

1.Adım;

$$A_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \cdot y_0^2 = 0,1 \cdot \frac{1}{2}(0 + 1) \cdot 1^2 = 0,05$$

$$x_A = x_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$y_A = y_0 + \frac{A}{2} = 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025$$

$$\Delta y_1 = h \cdot f(x_A, y_A) = h \cdot \frac{1}{2}(x_A + y_A) \cdot y_A^2 = 0,1 \cdot \frac{1}{2}(0,05 + 1,025) \cdot (1,025)^2 = 0,0565$$

2.Adım

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1 + 0,0564 = 1,0565$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$A_2 = h \cdot f(x_1, y_1) = h \cdot \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \cdot y_1^2 = 0,1 \cdot \frac{1}{2}(0,1 + 1,0564) \cdot 1,0564^2 = 0,0645$$

$$x_A = x_1 + \frac{h}{2} = 0,1 + \frac{0,1}{2} = 0,15$$

$$y_A = y_1 + \frac{A}{2} = 1,0564 + \frac{0,06452}{2} = 1,0887$$

$$\Delta y_2 = h \cdot f(x_A, y_A) = 0,1 \cdot \frac{1}{2}(0,15 + 1,08866) \cdot (1,08866)^2 = 0,0734$$

2.Adım

$$y_2 = y_1 + \Delta y_2 = 1,0564 + 0,0734 = 1,1299$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

### 9.4.2. Dört Adımlı Runge-Kutta Yöntemi

#### 1.adım

$$\begin{aligned}x_A &= x_0 \\y_A &= y_0 \\A &= h \cdot f(x_A, y_A)\end{aligned}$$

#### 2.adım

$$\begin{aligned}x_B &= x_0 + \frac{h}{2} \\y_B &= y_0 + \frac{A}{2} \\B &= h \cdot f(x_B, y_B)\end{aligned}$$

**3.adım**

$$\begin{aligned}x_C &= x_0 + \frac{h}{2} \\y_C &= y_0 + \frac{B}{2} \\C &= h \cdot f(x_C, y_C)\end{aligned}$$

**4.adım**

$$\begin{aligned}x_D &= x_0 + h \\y_D &= y_0 + C \\D &= h \cdot f(x_D, y_D)\end{aligned}$$

A, B, C, D, değerleri hesaplandıktan sonra;

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6} [A + 2B + 2C + D]$$

ile hesaplanarak  $y$ 'nin  $y_0$  dan sonraki,

$$x_1 = x_0 + h \text{ deki değeri;}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$y$ 'nin  $y_2$  gibi ikinci değeri için  $x_1, y_1$  değerleri başlangıç değeri kabul edilir. İşlemler  $y$ 'nin hesaplanacak nokta sayısının sınırı verilerek ya da biz  $x_{max}$  değerine kadar devam ederek durdurulur.

**Örnek 1.**

Dört adımlı R-K yöntemini kullanarak  $\Delta t = h = 0,1$  için aşağıdaki diferansiyel denklemden  $y_0 = 3$  ilk değeri ile  $t_1 = t_0 + h$  anındaki  $y = y_1$  değerini bulunuz.

$$f(t, y) = \frac{4t}{y} - ty$$

1.adım

$$t_A = t_0 = 0$$

$$y_A = y_0 = 3$$

$$A = h \cdot f(t_A, y_A) = 0,1 \cdot f(0, 3) = 0,1 \left( \frac{4t}{y} - ty \right) = 0,1 \cdot \left( \frac{4 \cdot 0}{3} - 0 \cdot 3 \right) = 0$$

2.adım

$$t_B = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$y_B = y_0 + \frac{A}{2} = 3 + \frac{0}{2} = 3$$

$$B = h \cdot f(t_B, y_B) = 0,1 \cdot f(0,05, 3) = 0,1 \cdot \left( \frac{4t}{y} - ty \right) = 0,1 \cdot \left( \frac{4 \cdot 0,05}{3} - 0,05 \cdot 3 \right) = -0,0083$$

3.adım

$$t_C = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0,1}{2} = 0,05$$

$$y_C = y_0 + \frac{B}{2} = 3 + \frac{-0,00833}{2} = 2,9958$$

$$C = h \cdot f(t_C, y_C) = 0,1 \cdot f(0,05, 2,9958) = 0,1 \cdot \left( \frac{4t}{y} - ty \right) = 0,1 \cdot \left( \frac{4 \cdot 0,05}{2,9958} - 0,05 \cdot 2,9958 \right) = -0,0083$$

4.adım

$$t_D = t_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$y_D = y_0 + C = 3 + (-0,0083) = 2,9917$$

$$D = h \cdot f(t_D, y_D) = 0,1 \cdot f(0,1, 2,9916) = 0,1 \cdot \left( \frac{4t}{y} - ty \right) = 0,1 \cdot \left( \frac{4 \cdot 0,1}{2,9916} - 0,05 \cdot 2,9916 \right) = -0,0165$$

A, B, C, D, değerleri hesaplandıktan sonra;

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}[A + 2B + 2C + D] = \frac{1}{6}[0 + 2 \cdot (-0,00833) + 2 \cdot (-0,0083) + (-0,0165)] = -0,0083$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 3 + (-0,0084) = 2,9917$$

$$t_1 = t_0 + h = 0,1$$

## 9.5. Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için verilen diferansiyel denklem uygun ara dönüşümlerle birinci mertebeden diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Böylece elde edilecek denklem sayısı verilen diferansiyel denklemin mertebesi eşittir.

### Örnek 1.

$$ay'' + by' + cy = U(x)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi çözmek için gerekli denklem takımını elde edelim;

$$y' = \frac{dy}{dx} = v \text{ ara dönüşümü yapılırsa;}$$

$$av' + bv + cy = u(x)$$

Elde edilir böylece çözülecek birinci mertebeden iki diferansiyel denklem elde edilir;

$$1. v' = \frac{dv}{dx} = f(x, y, v) = \frac{U(x) - bv - cy}{a}$$

$$2. y' = \frac{dy}{dx} = z(x, y, v) = v$$

elde edilen bu iki diferansiyel denklemin çözümü daha önce verilen yöntemlerden birisiyle yapılır.

### Örnek 2.

$$ay''' + by'' + cy' + y = u(x)$$

denklemini çözmek için ara dönüşümler yaparak birinci dereceden denklem takımını elde ediniz.

$$\frac{dy}{dx} = v \quad , \quad av'' + bv' + cv + y = u(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = w \quad , \quad aw' + bw + cv + y = u(x)$$

$$\frac{dw}{dx} = w' = \frac{u(x) - bw - cv - y}{a}$$

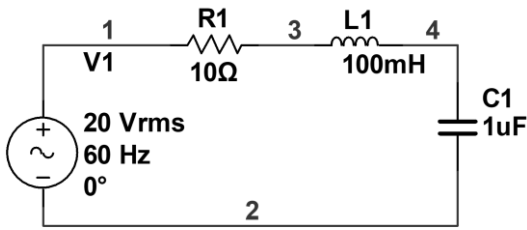
Buradan üç denklem elde edilir;

$$\frac{dw}{dx} = f(x, y, v, w) = \frac{u(x) - y - cv - bw}{a}$$

$$\frac{dv}{dx} = g(x, y, v, w) = w$$

$$\frac{dy}{dx} = z(x, y, v, w) = v \quad \text{gibi üç adet birinci mertebeden diferansiyel denkleme dönüşür.}$$

### Örnek 3.



$$\frac{di}{dt} = f(t, i, q) = a \cdot \sin \omega t + b \cdot i(t) + c \cdot q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = z(t, i, q) = i$$

Diferansiyel denklem takımını  $t = t_0 = 0$  ,  $i_0(0) = I$  ,  $q_0(0) = Q$  başlangıç koşullarıyla seçilen her  $h = \Delta t$  için R-K metoduyla çözüyoruz.

$$t_A = t, \quad i_A = i, \quad q_A = q$$

$$A_1 = h \cdot f(t_A, i_A, q_A)$$

$$A_2 = h \cdot z(t_A, i_A, q_A)$$

$$t_B = t + h/2, \quad i_B = i + A_1/2, \quad q_B = q + A_2/2C$$

$$B_1 = h.f(t_B, i_B, q_B)$$

$$B_2 = h.z(t_B, i_B, q_B)$$

$$t_C = t + h/2, \quad i_C = i + B_1/2, \quad q_C = q + B_2/2$$

$$C_1 = h.f(t_C, i_C, q_C)$$

$$C_2 = h.z(t_C, i_C, q_C)$$

$$t_D = t + h, \quad i_D = i + C_1, \quad q_D = q + C_2$$

$$D_1 = h.f(t_D, i_D, q_D)$$

$$D_2 = h.z(t_D, i_D, q_D)$$

$$i = i + \frac{1}{6}[A_1 + 2B_1 + 2C_1 + D_1]$$

$$q = q + \frac{1}{6}[A_2 + 2B_2 + 2C_2 + D_2]$$

$$t = t + h$$

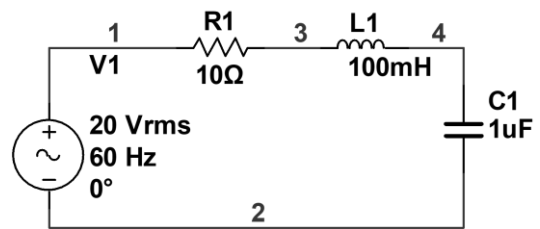
Bu işlem bir nokta içindir, yeni noktalar için  $i$  ve  $q$  başlangıç değeri alınarak baş tarafa dönülür.

#### Örnek 4.

$$V(t) = 10 \sin(100t), \quad L = 0,1H,$$

$$\Delta t = h = 0,0002s, \quad V_c(0) = 0, \quad i_c(0) = 0,$$

$$C = 100\mu F, \quad R = 1\Omega$$



Devreye ilişkin diferansiyel denklemleri çıkartarak  $i(t)$  nin başlangıç noktasından başka üç noktasını daha  $t = h = 0,0002s$  ile R-K yöntemiyle çözelim.

$$V(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C},$$

$$\frac{dq}{dt} = i(t)$$

$$f(t, i, q) = \frac{di(t)}{dt} = \frac{V(t) - R.i(t) - \frac{q(t)}{C}}{L} = \frac{10 \sin(100t) - 1.i(t) - \frac{q(t)}{10^{-6}}}{0,1}$$

$$f(t, i, q) = 100 \sin(100t) - 10.i(t) - 10^{-5}.q(t)$$

$$q(t, i, q) = \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

1. Dereceden R-K yöntemiyle;  $t_0 = 0$  ,  $i_0 = 0$ , ve  $q_0 = 0$  başlangıç koşullarıyla;

1.noktanın hesabı;

$$A_1 = h \cdot f(t_0, i_0, q_0) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot f(t_0, i_0, q_0) = 0$$

$$t_A = t_0 + \frac{h}{2} = 1 \cdot 10^{-4} ,$$

$$i_A = i_0 + \frac{A_1}{2} = 0$$

$$t_1 = t_0 + h = 2 \cdot 10^{-4} ,$$

$$i_1 = i_0 + h \cdot f(t_A, i_A, q_A) = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$A_2 = h \cdot g(t_0, i_0, q_0) = h \cdot i_0 = 0$$

$$q_A = q_0 + \frac{A_2}{2} = 0$$

$$q_1 = q_0 + h \cdot g(t_A, i_A, q_A) = 0$$

2.noktanın hesabı;

$$A_1 = h \cdot f(t_1, i_1, q_1) = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$t_A = t_1 + \frac{h}{2} = 3 \cdot 10^{-4} ,$$

$$i_A = i_1 + \frac{A_1}{2} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$t_2 = t_1 + h = 4 \cdot 10^{-4} ,$$

$$i_2 = i_1 + h \cdot f(t_A, i_A, q_A) = 8 \cdot 10^{-4}$$

$$A_2 = h \cdot g(t_1, i_1, q_1) = h \cdot i_1 = 4 \cdot 10^{-8}$$

$$q_A = q_1 + \frac{A_2}{2} = 2 \cdot 10^{-8}$$

$$q_2 = q_1 + h \cdot g(t_A, i_A, q_A) = q_1 + h \cdot i_A = 8 \cdot 10^{-4}$$

3.noktanın hesabı;

$$A_1 = h \cdot f(t_2, i_2, q_2) = 8 \cdot 10^{-4}$$

$$t_A = t_2 + \frac{h}{2} = 5 \cdot 10^{-4} ,$$

$$i_A = i_2 + \frac{A_1}{2} = 12 \cdot 10^{-4}$$

$$t_3 = t_2 + h = 6.10^{-4},$$

$$i_3 = i_2 + h.f(t_A, i_A, q_A) = 18.10^{-4}$$

$$A_2 = h.g(t_2, i_2, q_2) = h.i_2 = 16.10^{-8}$$

$$q_A = q_2 + \frac{A_2}{2} = 16.10^{-8}$$

$$q_3 = q_2 + h.g(t_A, i_A, q_A) = q_2 + h.i_A = 32.10^{-8} \text{ böylece;}$$

$t(s)$	$i(A)$	$q(C)$
0	0	0
$2.10^{-4}$	$2.10^{-4}$	0
$4.10^{-4}$	$8.10^{-4}$	$8.10^{-8}$
$6.10^{-4}$	$18.10^{-4}$	$32.10^{-8}$

## 9.6. Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Sayısal Çözümleme

Mühendislik alanındaki uygulamaların çoğunda fiziksel problemler genellikle birer kısmi diferansiyel denklemle ifade edilir.

a.  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  (Eliptik diferansiyel denklem, Elektrik ve Magnetik alan dağılımı sıcaklık dağılımı denklemi olarak kullanılır)

a.  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  (hiperbolik diferansiyel denklem, dalga denklemi)

a.  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$  (Parabolik, diferansiyel denklem, Difzyon denklemi, ısı iletim uygulanamaları)

### 9.6.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Kısmi diferansiyel denklemleri kartezyen koordinatlarda genel olarak;

$$a.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b.\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + c.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + d.\frac{\partial U}{\partial x} + e.\frac{\partial U}{\partial y} + fU + g = 0 \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Burada katsayılar sabit olabileceği gibi (doğrusal kısmi diferansiyel denklem) bağımsız değişkenler  $x$  ve  $y$  nin fonksiyonu da olabilirler (doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler).

Yukarıda verilen genel formda eğer;

1.  $b^2 - 4ac < 0$  (Parabolik diferansiyel denklem)

2.  $b^2 - 4ac = 0$  (Eliptik diferansiyel denklem)

3.  $b^2 - 4ac > 0$  (Hiperbolik diferansiyel denklem)

Bu isimlendirme eğrilerin yapılarından kaynaklıdır.

Çözüm için iki önemli yöntem vardır;

**a.)Sonlu farklar yöntemi;** Çözülecek diferansiyel denklem, sonlu farklar cinsinden alınarak ve sınır şartları da kullanılarak denklem takımına dönüştürülüp çözülür.

**b.)Sonlu elemanlar yöntemi;** Diferansiyel denklem doğrudan çözülmez ancak sonuçları bu diferansiyel denklemi sağlayan ele alınan fiziksel problemin “Enerji Fonksiyoneli” minimize edilir.

Bu iki yöntem arasındaki temel farklılıklar;

- \* Sonlu elemanlar düzgün olmayan şekillere daha kolay uygulanır.
- \* Sınır koşullarıyla belirlenmiş, çözüm bölgesi elemanlara ayrıştırılan sonlu elemanlar yönteminde, değişik büyüklükteki elemanlar kullanılabilir. Bu nedenle bağımlı değişkende büyük değişmelerin söz konusu olduğu yerlerde küçük elemanlar, küçük değişmelerin olduğu yerlerde de büyük elemanlar kullanarak çözülecek denklem sayısında ve çözüm zamanı indirgenmiş olur..
- \* Sonlu farklar yönteminde çözümde, genellikle iteratif çözümlerle karşılaşılmasına karşılık sonlu elemanlarda bazen doğrudan doğruya bir işlemle sonuca varılır.

## 9.6.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklarla Çözüm Yöntemleri

### 9.6.2.1. Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklarla Çözümü

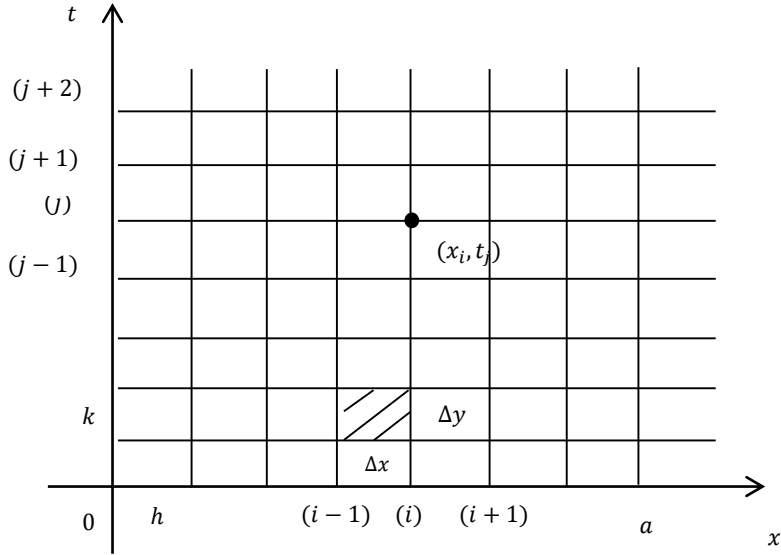
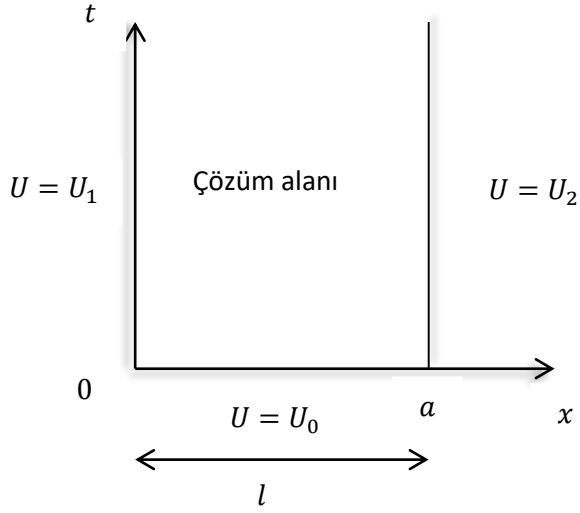
#### Örnek 1.

Isı iletimi yapmakta olan  $l$  boyundaki bir çubuğun her iki başındaki sıcaklığının bilinip ve zamanla değişmediğini varsayalım. Ayrıca  $t = 0$  anında çubuk boyunda sıcaklık dağılımının da bilindiğini kabul edelim. Örneğin sabit olsun. Böylece üç taraftan sınır koşulları belirlenmiş olan alanda sıcaklık dağılımını elde etmek için  $U$  sıcaklığı göstermek üzere;

$$a. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

bu tek boyutlu ısı iletim denklemini çözmek gerekir.

Bu denklem parabolik bir kısmi diferansiyel denklem olup çözüm için çözüm alanı şekilde görüldüğü gibi elemanlara ayrılmıştır ve denklemdeki türevler yerine ikinci mertebeden türevler için merkezi farklar, birinci mertebeden türevler için ileri yön farklar alınır. Böylece şekildeki gibi bir bölmeleme için;



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x+\Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t+\Delta t) - U(x, t)}{\Delta t}$$

olmak üzere  $(x_i, t_k)$  noktası için;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1, j} - 2U_{i, j} + U_{i-1, j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i, j+1} - U_{i, j}}{k}$$

konulup gerekli düzenleme yapılırsa;

$$\beta = \frac{a.k}{h^2} \quad \text{olmak üzere;}$$

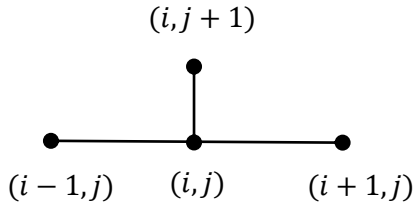
$$U_{i,j+1} = \beta \cdot U_{i+1,j} + (1 - 2\beta) \cdot U_{i,j} + \beta \cdot U_{i-1,j} \quad \text{cebrîk denklemi elde edilir.} \quad (2)$$

Kararlı çözümler elde etmek için;

$$\beta \leq \frac{1}{2} \quad \text{olmak zorundadır. Bu koşulla}$$

$$\beta \leq \frac{h^2}{2a} \quad \text{olacağından } h \text{ seçilince } k \text{ belirlenmiş olur.}$$

2. denklemde  $t = 0$  olduğu  $x$  eksenî üzerindeki noktalara uygulanırsa bu noktaların değeri sınır koşullarından belli olduğu için  $t = \Delta t = k$  olan yatay doğru üzerinde bulunan noktalardaki sıcaklıklar belirlenmiş olur. Böylece  $x$  eksenî üzerindeki noktaları başlangıç değeri olarak alırsak her  $k = \Delta t$  artımında yani noktaların sıcaklıkları hesaplanmış olur. Yani  $(i - 1, j), (i, j), (i + 1, j)$  noktalarındaki sıcaklıklar biliniyorsa  $(i, j + 1)$  noktasındaki sıcaklık hesaplanabilir.



### Örnek 1.

Bağıl büyüklükler kullanılarak (1) denklemi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Denklemde büyüklükler norm olup birimleri olmaz. Bağıl boyu  $x = 1$  olan her iki başında bağıl sıcaklığı sıfırda tutulan bir çubuğu tam ortasından  $u = 1$  bağıl sıcaklığına getirelim. Sonra ısı kaynağını uzaklaştıralım. Bağıl zaman  $t = 0,005$  olana kadar ( $h = 0,1, k = 0,001$ ) aralıklı noktalardaki sıcaklıkları bu denklemden; Bütün  $t$  değerleri için  $x = 0$  ve  $x = 1$ 'de  $u = 0$  dır.

$$t = 0 \quad \text{için} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{de} \quad U = 2x$$

$$t = 0 \quad \text{için} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \text{de} \quad U = 2(1 - x) \quad \text{sınır değerlerinden faydalanarak bulalım;}$$

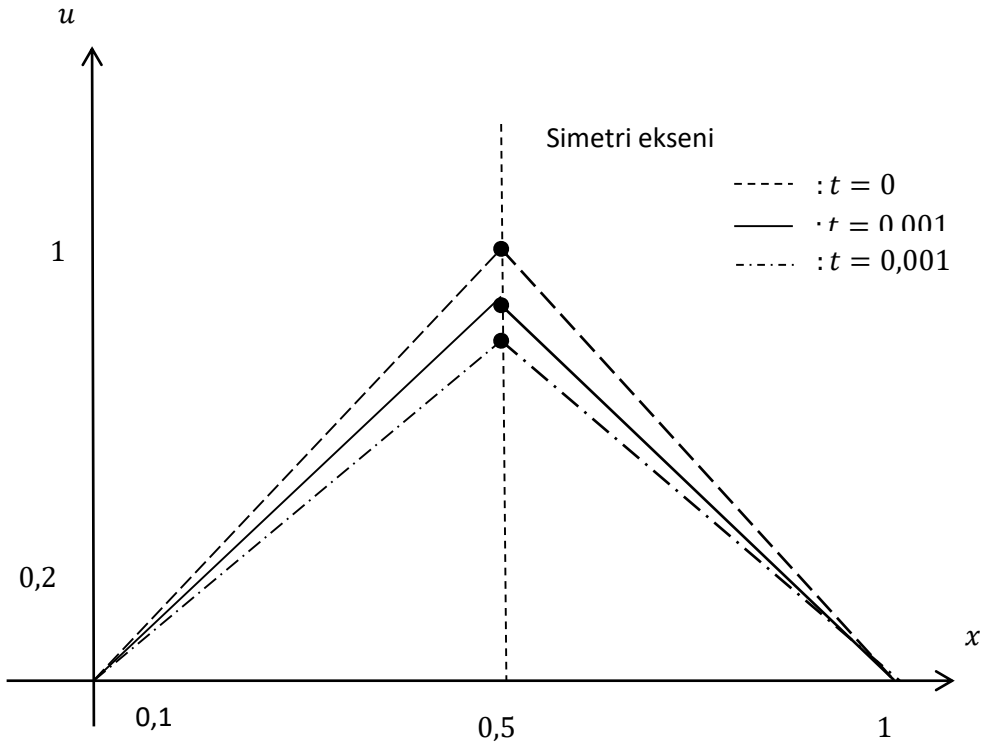
$a = 1$  alınırsa (2) bağıntısı bağıl büyüklükler cinsinden verilmiş olan diferansiyel denklem içinde geçerli olur. Böylece;

$$U_{i,j+1} = \beta \cdot U_{i+1,j} + (1 - 2 \cdot \beta) \cdot U_{i,j} + \beta \cdot U_{i-1,j}$$

bağıntısı bağıl büyüklükler cinsinden verilmiş olan diferansiyel denklem içinde geçerli olur. Böylece;

$\beta = \frac{a \cdot k}{h^2} = \frac{1 \cdot 0,001}{0,01} = 0,1$  için yukarıdaki denklem kullanılarak aşağıdaki tablo ve şekildeki dağılımı elde edilir.

	$i$	0	1	2	3	4	5
	$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$j = 0$	$t = 0,000$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$j = 1$	$t = 0,001$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,96
$j = 2$	$t = 0,002$	0	0,2	0,4	0,6	0,796	0,928
$j = 3$	$t = 0,003$	0	0,2	0,4	0,599	0,789	0,901
$j = 4$	$t = 0,004$	0	0,2	0,4	0,598	0,781	0,879
$j = 5$	$t = 0,005$	0	0,2	0,39	0,597	0,773	0,859



9.6.2.2. *Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklarla Çözümü*

Çözüm bölgesi elemanlara ayrıştırılır. Denklemlerdeki türevler yerine merkezi farklar alınır.

$\Delta U = 0$  ile gösterilen Laplace denklemi olarak ta bilinir.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Eliptik kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. Sınır koşullarıyla belirlenmiş  $R$  çözüm bölgesi şekildeki gibi  $k = \Delta y$ , ve  $h = \Delta x$  aralıklara bölelim;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x+\Delta x, y) - 2U(x, y) + U(x-\Delta x, y)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(x, y+\Delta y) - 2U(x, y) + U(x, y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}$$

olmak üzere  $(x_i, y_j)$  noktaları için;

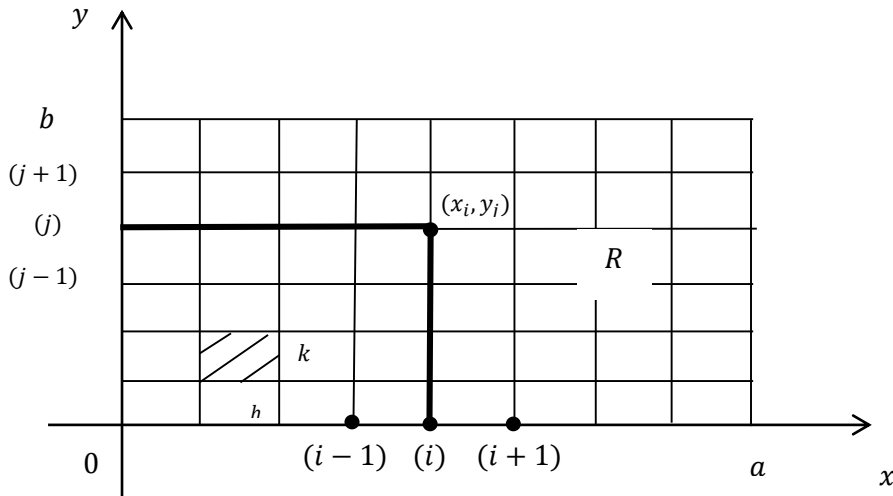
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1, j} - 2U_{i, j} + U_{i-1, j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{i, j+1} - 2U_{i, j} + U_{i, j-1}}{k^2} \text{ yazarak denklemden yerine yerleştirip, ara işlemlerden sonra;}$$

$$2(h^2 + k^2) \cdot U_{i, j} = k^2(U_{i+1, j} + U_{i-1, j}) + h^2(U_{i, j+1} + U_{i, j-1}) \quad (1)$$

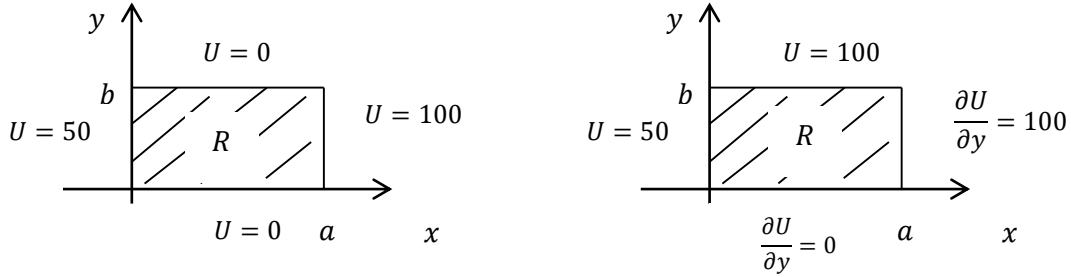
cebirsel denklemini elde ederiz. Kolaylık olması için;  $h = k$  alınırsa;

$$4 \cdot U_{i, j} = (U_{i+1, j} + U_{i-1, j} + U_{i, j+1} + U_{i, j-1}) \text{ elde edilir.} \quad (2)$$



R bölgesinin sınırları boyunca U değerleri verildiği için bölmeleme sonunda ortaya çıkan her nokta için bu denkleme benzer, denklemler yazılacak olursa bu noktalar sayısınca bilinmeyen ve denklem elde edilir. Bu cebirsel denklem takımının çözümüyle her bir noktanın U değeri belirlenmiş olur.

Sınır koşulları U'nun sabit değerleriyle verilebileceği gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarak ta verilebilir. Bazen de sınır değer olarak U'nun bağımsız değişkenlerinden birine göre



birinci mertebeden türevinin değerini verir. Sınır koşulları U nun sabit değerleri ile verilebileceği gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarak ta verilebilir. Bazen de sınır değer olarak U nun bağımsız değişkenlerden birine göre birinci mertebeden türevinin değerleri verilir.

Sınır koşulları U nun türevleri şeklinde verilirse bu türevleri sonlu farklar cinsinden yazarak noktaların U değerleri arasındaki ilişkiler sağlanır. Örneğin yukarıda gösterilen ikinci şekil kullanılırsa hata mertebesi küçük olur.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{U(x-2\Delta x,y) - 4U(x-\Delta x,y) + 3U(x,y)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{-U(x,y+2\Delta y) + 4U(x,y+\Delta y) - 3U(x,y)}{2\Delta y}$$

Sonlu farklar kullanılırsa hata mertebesi küçük olur.  $\frac{\partial U}{\partial x}$  için geri yön sonlu farklar kullanılmasının sebebi,  $x$ 'in sınır değerinde türev alınmasıdır, yani türeve girecek olan  $x$  değerleri bu sınırın gerisindeki değerleridir. Benzer düşünceyle  $\frac{\partial U}{\partial y}$  için ileri yön sonlu farkların kullanılması gerekliliği ortaya çıkar. Böylece;

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = \frac{-U(x,2k) + 4U(x,k) - 3U(x,0)}{2k} = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\frac{\partial U(a,y)}{\partial x} = \frac{U(a-2h,y) - 4U(a-h,y) + 3U(a,y)}{2h} = 100 \quad 0 \leq y \leq b$$

İlk eşitlikte  $x$  eksenine  $k$  aralıklarla paralel iki yatay doğru üzerindeki noktalara ilişkin  $U$  değerleri arasındaki ilişki sağlanır. Benzer şekilde ikinci bağıntıyla

$$x = a, \quad x = a - h, \quad \text{ve} \quad x = a - 2h,$$

düşey doğruları üzerindeki noktalara ilişkin  $U$  değerleri arasında ilişki sağlanmış olur. Birinci mertebeden bu türevler için;

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{U(x,y) - U(x-\Delta x,y)}{\Delta x} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{U(x,y+\Delta y) - U(x,y)}{\Delta y}$$

Sonlu farklarla alınabilir. Ancak bir öncekine göre hassas sonuçlar çıkmaz.

### Örnek 1.

Şekilde sınır koşulları belirlenen  $R$  bölgesi içinde gösterilen noktalarda;

$$\Delta\varphi = 8x^2y^2$$

poisson diferansiyel denklemini sağlayan potansiyellerini bulunuz.

$h = k = 1$  olmak üzere daha önce;

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  ve  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$  için sonlu farklar cinsinden verilen ifadelerde  $U$  yerine  $\varphi$  alınarak;

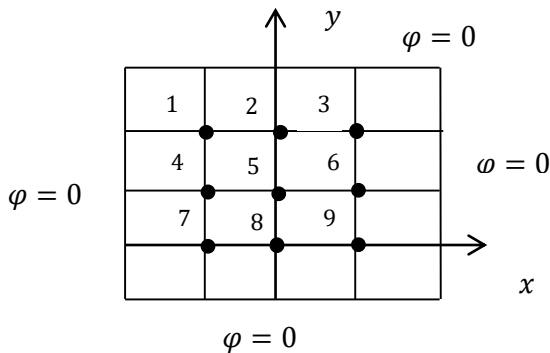
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 8x^2y^2$  de yerlerine konulursa (2) bağıntısına benzer şekilde;

$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 8x^2y^2$  elde edilir. Simetriden dolayı şekil için;

$$\varphi_1 = \varphi_7 = \varphi_3 = \varphi_9$$

$$\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8$$

olduğu hatırd tutularak çıkarılan bu bağıntıyı şekildeki 1, 2 ve 5 nolu noktalara sırasıyla uygularsak;



1 noktası için;

$$\varphi_2 + \varphi_4 - 4\varphi_1 = 8(-1)^2(-1)^2, \quad \varphi_2 = \varphi_4 \quad \text{olduğundan} \quad 2\varphi_2 - 4\varphi_1 = 8$$

2 noktası için;

$$\varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_5 - 4\varphi_2 = 8(-1)^2(0)^2 \quad \varphi_3 = \varphi_1 \text{ olduğundan } 2\varphi_1 - 4\varphi_2 + \varphi_5 = 0$$

5 noktası için;

$$\varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_8 - 4\varphi_5 = 8(0)^2(0)^2, \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8, \text{ olduğundan } 4\varphi_2 - 4\varphi_5 = 0$$

$$2\varphi_2 - 4\varphi_1 = 8$$

$$2\varphi_1 - 4\varphi_2 + \varphi_5 = 0$$

$4\varphi_2 - 4\varphi_5 = 0$  denklemleri çözüldüğünde;

$$\varphi_1 = -3, \quad \varphi_2 = -2, \quad \varphi_5 = -2 \text{ olarak bulunur.}$$

### 9.6.2.3. Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklarla Çözümü

İnşaat ve Makine mühendisliğinde akışkanlar teorisinde kullanılan aşağıdaki denklem;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Birinci mertebeden bir hiperbolik kısmi diferansiyel denklem olup çözümleri için Lax-Wendroff yöntemi kullanılır ( $a > 0$  olan bir sabit). Bu yöntemle göre verilen diferansiyel denklemden;

$\frac{\partial}{\partial t} = -a \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ , olduğu hatırlanarak  $U(x, t)$  fonksiyonu  $(x, t + \Delta t)$  noktası civarında Taylor serisine açılır. Yani  $\Delta t = k$  alınarak bu açılım;

$$U(x, t + k) = U(x, t) + k \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + R \dots$$

$R \cong 0$  olup,  $t$  ye göre kısmi türevleri yukarıda verilen ilişki gereğince  $x$ 'e göre kısmi türevler cinsinden yazarsak;

$$U(x, t + k) = U(x, t) - a \cdot k \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} k^2 a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}$$

$h = \Delta x$  olmak üzere  $x$ 'e göre kısmi türevler yerine merkezi farklar yazılacak olursa;

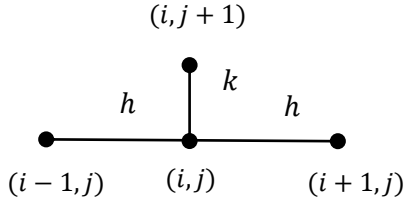
$$U(x, t + k) = U(x, t) - \frac{a \cdot k}{2h} [U(x + h, t) - U(x - h, t)] + \frac{k^2 a^2}{2h^2} [U(x + h, t) - 2 \cdot U(x, t) + U(x - h, t)] \text{ yani}$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{a \cdot k}{2h} [U_{i+1,j} - U_{i-1,j}] + \frac{k^2 a^2}{2h^2} [U_{i+1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}] \text{ ara işlemden sonra;}$$

$$P = \frac{a \cdot k}{h} \text{ olmak üzere}$$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1 + p) U_{i-1,j} + (1 - p) U_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1 - p) U_{i+1,j} \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece  $(i, j)$ ,  $(i + 1, j)$  ve  $(i - 1, j)$  noktalarında bilinen  $U$  değerlerinden faydalanarak  $(i, j + 1)$  noktasındaki  $U$  değeri belirlenmiş olur.



### Örnek 1.

Anolitik çözümü  $U = \frac{1}{8} \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi t)$  olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \text{ normalize dalga denkleminin;}$$

- \* Sınır koşulları  $t \geq 0$  için  $x = 0$  ve  $x = 1$  de  $U = 0$
- \* Başlangıç koşulları  $t = 0$  da  $0 \leq x \leq 1$  aralığı için  $U = \frac{1}{8} \sin(\pi x)$  ve  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  ve  $g(x) = 0$

ile  $r = 1$  olarak birkaç noktasını sayısal olarak hesaplayalım.

$r = 1$  için aşağıdaki eşitlikten

$$U_{i,j+1} = r^2 U_{i+1,j} + 2 \cdot (1 - r^2) U_{i,j} + r^2 U_{i-1,j} - U_{i,j-1} \quad (\text{bir örnekten elde edilmiştir})$$

$$a) U_{i,j+1} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - U_{i,j-1} \quad j \geq 1$$

$$U_{i,1} = U_{i+1,0} + U_{i-1,0} - U_{i,-1} \quad j = 0$$

$$\frac{1}{2k} [U_{i,1} - U_{i,-1}] = g(x) \quad (\text{bir örnekten elde edilmiştir})$$

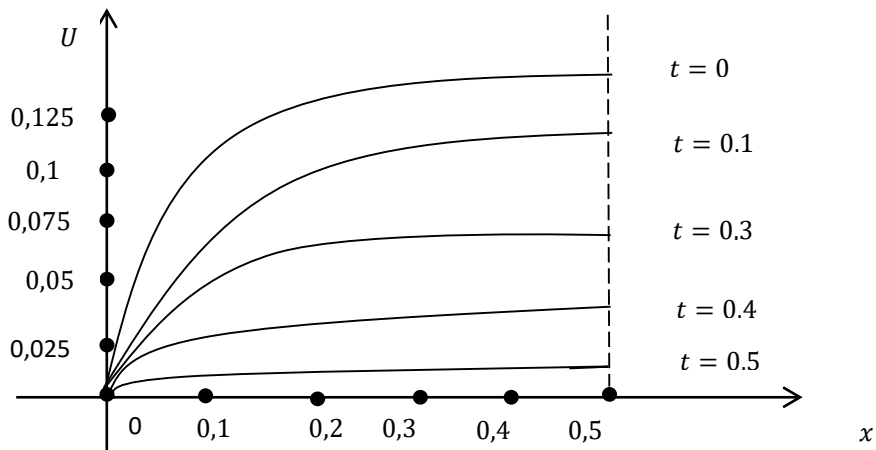
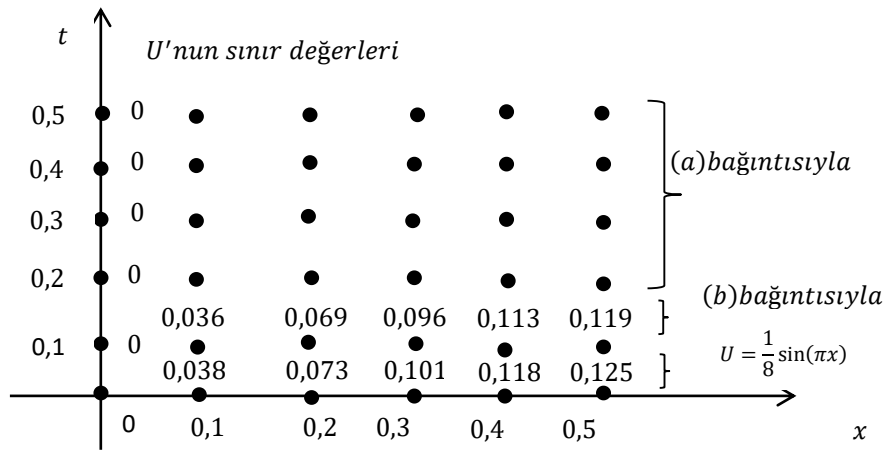
Bu eşitlikten  $g(x) = 0$  için  $j = 0$  alınarak;

$$U_{i,1} = U_{i,-1} \text{ elde edilir.}$$

Son iki eşitlikten  $j = 0$  için;

$$b) U_{i,1} = \frac{1}{2} [U_{i-1,0} + U_{i+1,0}]$$

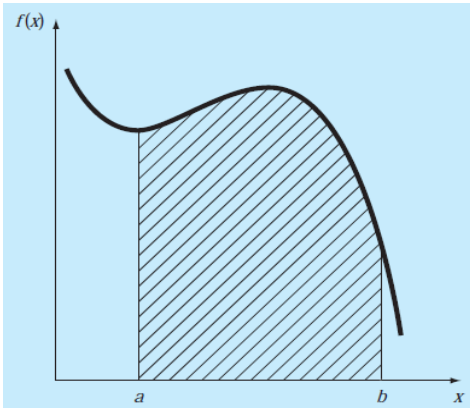
şimdi  $t = 0$  için  $x$  eksenini boyunca  $h = 0,1$  seçerek ( $r = 1$  olduğu için  $k = 1$  olur) işaretlenecek her noktaya  $U = \frac{1}{8} \sin(\pi x)$  den  $U$  ları hesaplayıp koyalım. Sonra  $x = 0$  olduğu  $t$  eksenini boyunca  $k = 0,1$  aralıklarla alınacak her noktaya  $U = 0$  değerlerini yerleştirelim daha sonra  $t = k = 0,1$  yatay doğrusu boyunca dizili noktalardaki  $U$  ları (b) bağıntısı ile hesaplayalım. Geri kalan noktalardaki  $U$  değerleri yukarıdaki (a) bağıntısıyla hesaplanır.



## 10. SAYISAL İNTEGRAL

Sözlük anlamına göre *integrasyon* birleştirme, parçaları bir araya getirme, bütünü oluşturma anlamına gelmektedir. Matematiksel olarak integrasyon;

$I = \int_a^b f(x)dx$  şeklinde gösterilmekte ve  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = a$  ile  $x = b$  sınırları arasında  $x$  bağımsız değişkenine göre integralini ifade etmektedir. İntegralin sembolü de büyük harf  $S$  (*summation=toplama*) ‘den esinlenerek türetilmiştir. Yukarıdaki eşitlikte integrali alınan  $f(x)$  fonksiyonuna *integrand* denir. Şekilde integrasyon kavramının grafiksel ifadesi görülmektedir. Buna göre  $f(x)$  fonksiyonunun integrali,  $x = a$  ve  $x = b$  sınırları arasında fonksiyon ile  $x$  eksenini arasında kalan alana karşılık gelmektedir.



### 10.1. Newton-Cotes İntegrasyon Formülleri İle Sayısal İntegral

Newton-Cotes formülleri en yaygın olarak kullanılan sayısal integrasyon formülleridir. Bu formüller karmaşık fonksiyonlar veya tablolanmış veri değerleri yerine integrali kolay olan yaklaşık fonksiyonların kullanılması esasına dayanır. Matematiksel olarak bu durum;

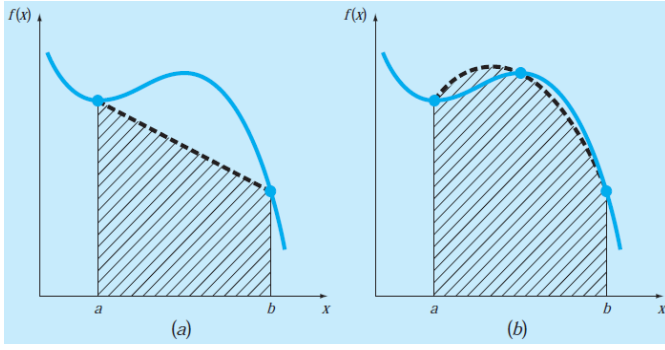
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $f_n(x)$ , integrali alınmak istenen esas fonksiyonun yerine konulacak olan ve

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

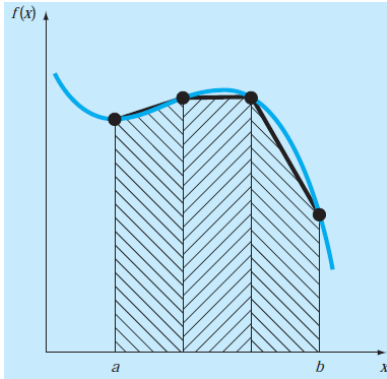
şeklinde  $n$ . dereceden bir polinomdur.

Örneğin aşağıdaki Şekil a da karmaşık bir fonksiyona birinci dereceden bir polinomla (bir doğru ile) yaklaşılması durumundaki ve, Şekil b ‘de ise ikinci dereceden bir polinomla (bir parabol ile) yaklaşılması durumundaki integrasyonlar görülmektedir.



- (a) Düz bir doğru ve  
 (b) Bir parabol altındaki alan yardımıyla integral hesabı

İntegrale sabit uzunluktaki dilimler boyunca parça parça bir seri polinom kullanılarak da yaklaşılabilir. Örneğin aşağıdaki şekilde karmaşık bir fonksiyonun  $x = a$  ve  $x = b$  aralığındaki integraline üç doğrusal fonksiyondan oluşan dilimler ile yaklaşılması durumu görülmektedir. Aynı amaç için daha yüksek dereceden polinomlar da kullanılabilir.



Üç doğru parçası altında kalan alan yardımıyla integrale yaklaşım.

### 10.1.1. Polinomlarla Sayısal İntegral, Yamuk (Trapez) Kuralı

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi;  $y = f(x)$  eğrisinin altında  $x_0 \leq x \leq x_n$  aralığındaki alanı;  $n = \frac{x_n - x_0}{h}$  dilime bölerek elde edilen her bir dilimdeki  $y = f(x)$  eğri parçasını bir doğru parçası olarak alırsak dilim yamuğa benzeyeceğinden alan;

1. Dilimin alanı  $I_1 = \frac{h}{2}(y_1 + y_0)$  yamuğun alanı.

2. Dilimin alanı  $I_2 = \frac{h}{2}(y_2 + y_1)$

$n$ . Dilimin alanı  $I_n = \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$

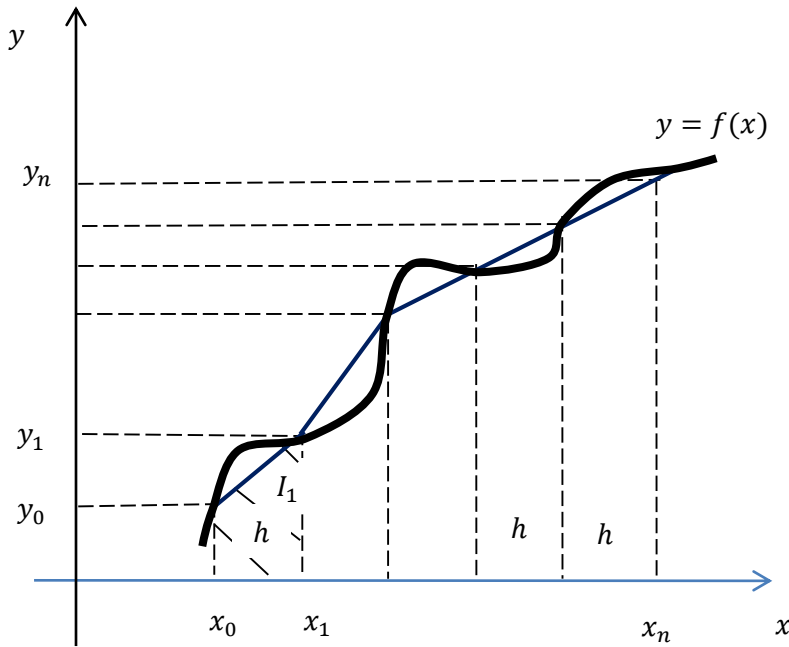
$y = f(x)$  eğrisinin altında  $x_0 \leq x \leq x_n$  aralığındaki alan  $n$  adet dilimin alanına eşit olduğundan, yani

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y(x)dx$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{h}{2}(y_1 + y_0) + \frac{h}{2}(y_2 + y_1) + \dots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n) \quad (1)$$



Her dilimin alanı yamuğun alanından küçük de olsa farklı olduğundan (1) denklemindeki ifade hata içeren bir ifadedir. Bu hatayı küçültmek için  $h$  aralığı küçültülür, yani  $n$  dilim sayısı artırılır. Bu yöntem **Yamuk kuralı** denilir. Burada  $y = f(x)$  yerine  $h$  aralığındaki doğru parçası (1. dereceden polinom) alınmıştır.

Yamuk kuralının farklı bir yorumu aşağıdaki eşitlikten  $n$ . dereceden polinomun, 1. Dereceden doğru denklemi olması durumuna karşılık gelir;

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

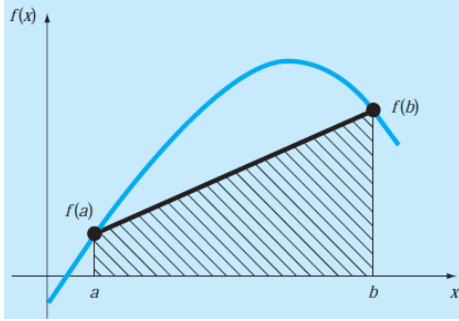
Eğri uydurma konusundan hatırlanacağı üzere doğru denklemi;

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$$

şeklindedir. Bu bağıntı integral ifadesindeki integrand yerine yazılır ve  $a$  ve  $b$  sınırları arasında integral alınır, bu doğru altında kalan alan;

$$I = \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) \right] dx$$

şeklinde elde edilir.



Şekil Trapez kuralının grafiksel açılımı

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + f(a) - \frac{a \cdot f(b) - a \cdot f(a)}{b-a}$$

$$f_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(a) - a \cdot f(b) + a \cdot f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$$

Bu ifadenin  $x = a$  ve  $x = b$  aralığında integrali alınır

$$I = \int_a^b \left[ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a} \right] dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a} \cdot x \Big|_a^b$$

$$I = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b^2-a^2)}{2} + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a} (b-a)$$

$$(b^2 - a^2) = (b-a) \cdot (b+a)$$

$$I = [f(b) - f(a)] \cdot \frac{(b+a)}{2} + b \cdot f(a) - a \cdot f(b)$$

$$I = \frac{b \cdot f(b) - b \cdot f(a) + a \cdot f(b) - a \cdot f(a)}{2} + \frac{2b \cdot f(a) - 2a \cdot f(b)}{2} = \frac{f(b)[b+a-2a] + f(a)[-b-a+2b]}{2}$$

$$I = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Elde edilen bu bağıntı **yamuk formülü** olarak bilinir. Geometrik olarak yamuk kuralı şeklindeki  $f(a)$  ve  $f(b)$  noktalarını birleştiren doğru altında kalan alana karşılık gelmektedir. Yamuk kuralının doğruluğunu artırmanın bir yolu  $a$  'dan  $b$  'ye kadar olan integral aralığını belirli sayıda dilimlere bölmek ve her bir dilime yamuk kuralını uygulamaktır. Her bir dilimin alanı toplanarak aralık boyunca integral hesaplanmış olur. Bu şekilde elde edilen formül **çok dilimli yamuk kuralı** veya kısaca **yamuk kuralı** olarak adlandırılır.

Yandaki şekilde yamuk kuralının genel formatı ve kullanılan notasyon görülmektedir. İntegral aralığı boyunca  $n+1$  tane eşit aralıklarla yerleştirilmiş nokta  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  vardır. Dolayısıyla eşit genişlikli  $n$  adet dilim söz konusudur. Buna göre bir dilimin genişliği,

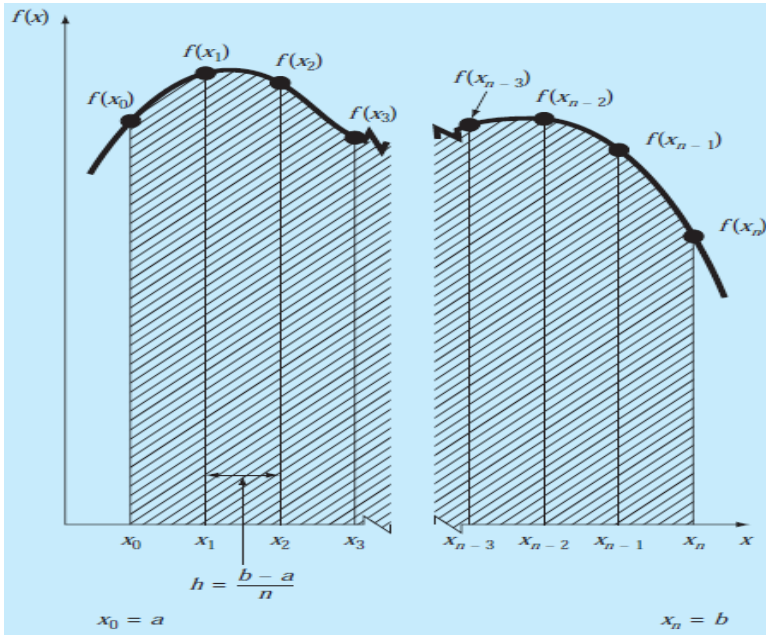
$$h = \frac{b-a}{n} \quad \{x_0 = a, x_n = b\} \text{ olmaktadır.}$$

Eğer  $a$  ve  $b$  sırasıyla  $x_0$  ve  $x_n$  olarak gösterilirse, toplam integral;

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I \cong h \cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + h \cdot \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

şeklinde yazılabilir.



Yamuk kuralı her bir integral için uygulanırsa her bölme aralığı eşit  $h$  ile ifade edilerek;

elde edilir. Terimler gruplanırsa;

$$I = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

yamuk kuralı için alternatif bir ifade  $h = \frac{b-a}{n}$  ifadede yerine yazılırsa;

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

şeklinde elde edilebilir. Yukarıdaki diğer yöntemle elde edilen ifadenin aynısıdır.

### Örnek 1.

Aşağıdaki fonksiyonun  $a = 0$  ve  $b = 0.8$  aralığındaki integralini hesaplamak için iki dilimli yamuk kuralı uygulayın

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

İntegralin analitik değeri  $I = 1.640533$  olduğuna göre gerçek hata oranını bulun.

$$n = 2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{2} = 0.4, \quad \text{dilimler } 0 \text{ dan başlayarak } 0.4 \text{ adımlarla ilerler.}$$

$$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$$

$$f(x_1) = f(0.4) = 2.456$$

$$f(b) = f(x_2) = f(0.8) = 0.232$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2 \cdot n} = (0.8 - 0) \frac{0.2 + 2 \cdot (2.456) + 0.232}{2 \cdot 2} = 1.0688$$

$$\varepsilon = \left| \frac{1.640533 - 1.0688}{1.640533} \right| \cdot 100\% = 34.9\%$$

$n$	$h$	$I$	$\varepsilon t(\%)$
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

Yukarıdaki örneğin üç-elemanlıdan 10-elemanlı duruma kadar tekrarlanmasıyla elde edilen sonuçlar tablo da özetlenmiştir. Eleman sayısındaki artışla birlikte hata oranındaki düşüşe dikkat edilmelidir.

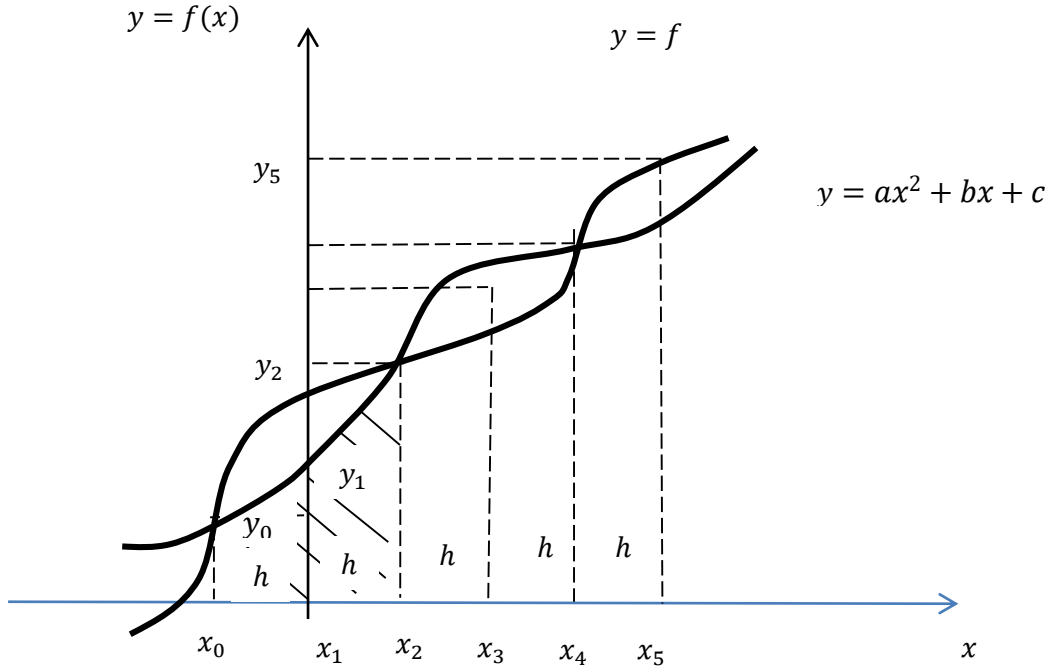
#### 10.1.2. Simpson Kuralı

Yamuk kuralını daha ince dilimlerle uygulamak integrasyonu iyileştirmenin bir yolu olmakla birlikte, bir diğer yol da, integrasyonda doğrusal elemanlar kullanmak yerine daha yüksek

dereceden polinomların kullanılmasıdır. Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi eğer  $f(a)$  ve  $f(b)$  noktaları arasında  $(a, b)$  aralığını eşit iki parçaya bölen üçüncü bir nokta elde edilebilirse, bu üç nokta bir parabol ile; benzer şekilde eşit aralıklı dört nokta elde edilebilirse bu noktalar üçüncü dereceden bir fonksiyon ile birleştirilebilir. Bu polinomların integralde kullanılmasıyla elde edilen formülasyonlar **Simpson kuralı** olarak adlandırılır. İki çeşit simpson kuralı tanımlanır;

### 10.1.2.1. 1/3 Simpson Kuralı

Eğer doğru parçası yerine  $y = ax^2 + bx + c$  alınırsa  $f(x)$ 'e biraz daha uygun yaklaşım yapılmış olacağından hata küçük olacaktır.



$$x = x_0 = -h \text{ için } y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \quad y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$x = x_1 = 0 \text{ için } y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \quad y_1 = c$$

$$x = x_2 = h \text{ için } y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \quad y_2 = ah^2 + bh + c$$

denklemlerinden;

$$a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \quad b = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) \quad c = y_1$$

Bulunduk tan sonra;  $x_0 \leq x \leq x_2$  aralığında;

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx \cong \int_{x_0=-h}^{x_1=h} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_{-h}^h$$

$$I_1 = \left(\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right) - \left(-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right)$$

$$I_1 = \frac{2a}{3}h^3 + 2ch$$

$a$  ve  $c$  yerlerine konularsa;

$$I_1 = \frac{2h^3}{3} \left( \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) \right) + 2h \cdot y_1$$

$I_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$  bu eşitliğe **1/3 Simpson kuralı** da denilir.

$2h$  genişliğindeki  $x_2 \leq x \leq x_4$  aralığında aynı kuralı uygularsak;

$$I_2 = \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Genelleştirirsek;  $x_{n-2} \leq x \leq x_n$

$$I_n = \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \text{ olur o halde;}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} y(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} y(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} y(x) dx$$

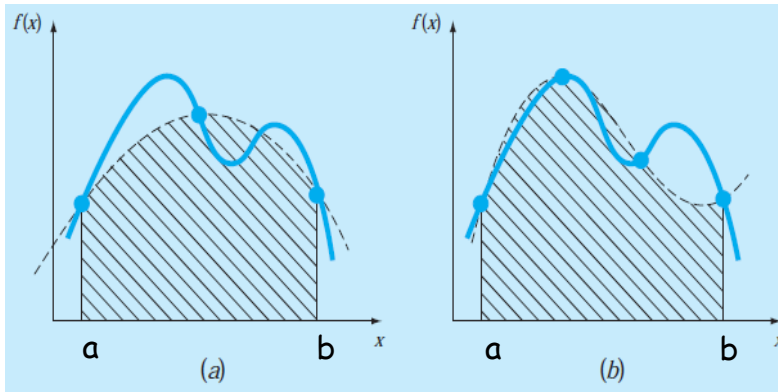
$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots$$

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + y_n$$

eşitliğiyle **1/3 Simpson kuralının genel formu** elde edilir.

**Bir başka yöntemle aynı kurallar elde edilebilir.**



a) Simpson'un 1/3 kuralının grafik gösterimi, üç noktayı birleştiren bir parabolün altındaki alanı kapsar.

b) Simpson'un 3/8 kuralının grafik gösterimi, dört noktayı birleştiren bir kübik polinomun altındaki alanı kapsar.

Aşağıdaki eşitlikte ikinci dereceden bir polinomun kullanılması durumunda 1/3 Simpson kuralı elde edilir.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

Eğer  $a$  ve  $b$ ,  $x_0$  ve  $x_2$  olarak gösterilirse,  $f_2(x)$  fonksiyonu Lagrange-interpolasyon polinomu ile ifade edilerek integrasyon aşağıdaki gibi gerçekleştirilebilir.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

İntegrasyon ve ardından düzenleme işleminden sonra aşağıdaki bağıntı elde edilir;

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad \text{burada } h = (b - a)/2 \text{ şeklindedir.}$$

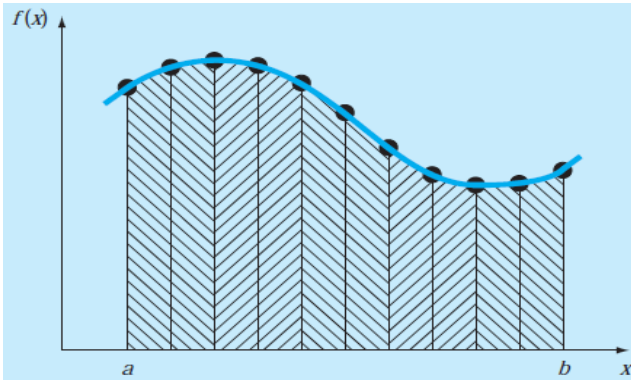
Bu bağıntı **1/3 Simpson kuralı** olarak adlandırılır. 1/3 adlandırması bağıntıdaki 1/3 katsayısından kaynaklanmaktadır. Bu son bağıntıda  $h = (b - a)/2$  değeri yerine yazılırsa bağıntı;

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad \text{şeklinde olur.}$$

Burada  $a = x_0$ ,  $b = x_2$ , ve  $x_1 = (b + a)/2$ , yani  $a$  ve  $b$  arasındaki orta noktadır.

Yamuk kuralında olduğu gibi **Simpson kuralı** da eşit genişlikteki ikiden fazla sayıda elemana uygulanacak şekilde genişletilebilir. Bu durumda dilim genişliği aşağıdaki gibi olacaktır;

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$



Simpson'un 1/3 kuralının çoklu uygulamasının grafik gösterimi, yöntem, aralık sayısının çift olması durumunda uygulanabilir.

Bu durumda toplam integral aşağıdaki gibi olur;

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Her bir integral için 1/3 Simpson formülü kullanılırsa;

$$I \cong h \frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3} + h \frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{3} + \dots + h \frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{3}$$

elde edilir. Uygun terimler bir araya toplanırsa **1/3 Simpson kuralının genel formülü**;

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0)+4 \cdot \sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i)+2 \cdot \sum_{j=2,4,6..}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3 \cdot n}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere; 1/3 Simpson kuralı uygulanacak ise çift sayıda dilim kullanılması gerekir

## Örnek 2.

Aşağıdaki fonksiyonun integralini,  $a = 0$  ve  $b = 0.8$  aralığında dört elemanlı ( $n = 4$ ), 1/3 Simpson kuralı ile hesaplayınız. Analitik integral değeri  $I = 1.640533$  'dir.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$n = 4, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{4} = 0.2, \quad \text{dilimler 0 dan başlayarak 0.2 adımlarla ilerler.}$$

$$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$$

$$f(x_1) = f(0.2) = 1.288$$

$$f(x_2) = f(0.4) = 2.456$$

$$f(x_3) = f(0.6) = 3.464$$

$$f(b) = f(x_4) = f(0.8) = 0.232$$

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0)+4 \cdot \sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i)+2 \cdot \sum_{j=2,4,6..}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3 \cdot n}$$

$$I \cong (0.8 - 0) \frac{0.2+4 \cdot (1.288+3.464)+2 \cdot (2.456)+0.232}{3 \cdot 4} = 1.62357$$

$$\varepsilon_t = 1.04\%$$

10 nokta ilerletilirse; Çift noktalarda çözümün daha yakın olduğu görülmektedir.

$n$ Nokta	$h$ adım	$I$ İntegral	$\varepsilon_t$ Hata
4	0,2	1,62	1,04
5	0,16	1,5	8,28
6	0,133	1,64	0,21

7	0,114	1,57	4
8	0,1	1,64	0,065
9	0,089	1,6	2,42
10	0,08	1,64	0,027

### 10.1.2.2. 3/8 Simpson Kuralı

Yukarıdaki örnekte 1/3 Simpson kuralının oldukça doğru sonuç verdiği görüldü. Bu nedenle bir çok uygulamada 1/3 Simpson kuralı, yamuk kuralına tercih edilmektedir. Ancak 1/3 Simpson kuralının bir sakıncası, çift sayıda dilim kullanılması zorunluluğudur. Bazı durumlarda aralığın yuvarlatma hatası az olmasına yönelik olarak tek sayıda dilimlere bölünmesi uygun olabilir. Böyle durumlarda 1/3 Simpson kuralı aşağıda açıklanacak olan 3/8 Simpson kuralı ile birlikte kullanılabilir.

3/8 Simpson kuralı, 1/3 Simpson kuralına benzer şekilde türetilir. Üçüncü dereceden bir Lagrange interpolasyon polinomu integrand olarak kullanılıp integrali alınır;

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \text{ şeklinde olur.}$$

Burada  $h = (b - a)/3$  tür. Bu eşitlik **3/8 Simpson** kuralı olarak adlandırılır ve genellikle tek sayıda eleman kullanmak gerektiğinde, 1/3 Simpson kuralıyla birlikte son üç elemanına uygulanır.

Dilim genişliği yukarıdaki formülde yerine yazılırsa formül;

$$I \cong (b - a) \frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8} \text{ şekline gelir.}$$

### Örnek 3.

a) Simpson'un 3/8 kuralını kullanarak;

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

fonksiyonunun  $a = 0$ 'dan  $b = 0.8$ 'e kadar sayısal integralini hesaplayınız.

b) Beş aralık (dilim) için aynı fonksiyonun  $a = 0$ 'dan  $b = 0.8$ 'e kadar sayısal integralini 1/3 ve 3/8 Simpson kurallarını birlikte kullanarak hesaplayınız.

(a): Simpson'un 3/8 kuralının tekli uygulaması dört adet eşit aralıklı nokta gerektirir;

$$n = 4, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$$

$$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$$

$$f(x_1) = f(0.2667) = 1.432724$$

$$f(x_2) = f(0.533) = 3.487177$$

$$f(b) = f(x_3) = f(0.8) = 0.232$$

Eşitlik 3/8 simpson kuralı uygulanarak aşağıdaki sonuçlar bulunur;

$$I_{3/8} \cong (0.8 - 0) \frac{0.2+3*(1.432724+3.487177)+0.232}{8} = 1.519170$$

$$\varepsilon = \left| \frac{1.640533 - 1.519170}{1.640533} \right| \cdot 100\% = 7.39\%$$

**(b)**

Beş dilim için dilim genişliği belirlenirse;

$$n = 5, h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{5} = 0.16$$

elde edilir. Buna göre veri değerleri

$$f(a) = f(x_0) = f(0) = 0.2$$

$$f(x_1) = f(0.16) = 1.296919$$

$$f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$$

$$f(x_3) = f(0.48) = 3.186015$$

$$f(x_4) = f(0.64) = 3.181929$$

$$f(b) = f(x_5) = f(0.8) = 0.232$$

şeklinde kolaylıkla hesaplanabilir. Son üç dilim Simpson 3/3 ile yapılacağından geriye kalan ilk iki dilim (aralık) için 1/3 Simpson kuralı uygulanırsa; Burada a değeri aynı kalırken b değeri  $x_2$  değeri yani  $h$  nin ikinci değeri olur. Buna bağlı yeni  $f(b)$  değeri hesaplanır.

$$a = 0 \quad b = 0.32 \quad n = 2$$

$$f(b) = f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$$

$$I_{1/3} \cong (0.32 - 0) \frac{0.2+4*(1.296919)+2*(0)+1.743393}{3.2} = 0.3803237$$

bulunur.

Son üç dilim (aralık) için 3/8 Simpson kuralı kullanılırsa; Burada b değeri aynı kalırken a değeri a değeri  $x_2$  değeri yani  $h$  nin ikinci değeri olur. Buna bağlı  $f(a)$  değeri hesaplanır.

$$a = 0.32 \quad b = 0.8 \quad n = 3$$

$$f(a) = f(x_2) = f(0.32) = 1.743393$$

$$I_{3/8} \cong (0.8 - 0.32) \frac{1.743393 + 3*(3.186015 + 3.181929) + 0.232}{8} = 1.264753$$

Böylece toplam integral, iki integralin toplamı olacaktır.

$$I \cong I_{1/3} + I_{3/8} = 0.3803237 + 1.264753 = 1.645077$$

$$\varepsilon_t = 0.28\%$$

Sonuçları karşılaştırdığımızda; hata oranı 1/3 Simpson yönteminde; % 1.04 iken, 3/8 Simpson yönteminde % 0.28'e düşmektedir.

## 10.2. Gregory-Newton İnterpolasyon İle Sayısal İntegral

İleri yön sonlu farklar interpolasyon formülü;

$$y_p(x) = y_0 + \frac{p}{1!} \Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots, \quad p = \frac{x-x_0}{h} \text{ bilindiğinden.}$$

$x = x_0 + ph \quad dx = h \cdot dp$  Elde edilir. Yamuk kuralının uygulandığı şekilde ki,

$x_0 \leq x \leq x_1$ , ( $0 \leq p \leq 1$ ), aralığına düşen integral;

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx = h \int_0^1 y_p dp$$

$$I_1 = h \int_0^1 (y_0 + \frac{p}{1!} \Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots) dp$$

p'ye göre integral alınıp sınır değerleri yerleştirilir.

$$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 y_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 y_0 + \dots) \text{ olur.}$$

Fakat hassasiyet için dört terim yeterlidir bu durumda pratik olarak;

$$I_1 \cong h(y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 y_0) \text{ elde edilir.} \quad (1)$$

Eğer parantez içindeki ilk iki terim işleme katılırsa;

$$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0) = h(y_0 + \frac{1}{2} (y_1 - y_0)) = \frac{h}{2} (y_1 + y_0)$$

olarak yamuk kuralındaki bağıntı elde edilir. Bu (1) denkleminin özel bir halidir.

$x_1 \leq x \leq x_2$ , için ( $1 \leq p \leq 2$ ) aralığı için;

$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx = h \int_1^2 y_p dp$  ‘den sınır değiştirerek tekrar türev alındığında elde edilen sonuç;

$$I_2 = h(y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_1 \text{ ilk iki terim işleme katılırsa;}$$

Böylece;  $x_0 \leq x \leq x_n$  , aralığında n dilim için toplam integral;

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = h \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + \frac{1}{2}\Delta y_k + \frac{1}{12}\Delta^2 y_k + \frac{1}{24}\Delta^3 y_k)$$

veya ileri yön sonlu farklar tablosundan faydalanırken daha kullanışlı olan;

$$I = h[ \sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2} (\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k) - \frac{1}{12} (\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 y_k) + \frac{1}{24} (\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^3 y_k)] \text{ elde edilir.}$$

Bu bağıntıdan faydalanarak, bazı terimleri ihmal ederek, Simpson kuralında elde edilen bağıntı çıkarılabilir.

Benzer yolla ileri yön farklar yerine geri yön farklar kullanacak olursak  $y_p$  olarak;

$$y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\nabla y_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \dots \text{ alınıp;}$$

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx \cong h \int_0^1 y_p dp \text{ aynı adımlardan sonra;}$$

$$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\nabla y_0 + \frac{5}{12}\nabla^2 y_0 + \frac{3}{8}\nabla^3 y_0 + \dots) \text{ ilk iki terim işleme katılırsa;}$$

Toplam alan;

$$I = h[ \sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2} (\sum_{k=0}^{n-1} \nabla y_k) + \frac{5}{12} (\sum_{k=0}^{n-1} \nabla^2 y_k) + \frac{3}{8} (\sum_{k=0}^{n-1} \nabla^3 y_k)] \text{ elde edilir.}$$

İşlem geri yön sonlu farklar tablosundan yapılır.

### 10.3. Bessel İnterpolasyon Formülü ile Sayısal İntegral

Merkezi yön sonlu farkları kullanan interpolasyon bağıntısı;

$$y_p = y_0 + P\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{P(P-1)}{2.2!} (\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{P.(p-\frac{1}{2})(P-1)}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + .. \text{ şeklinde dir.}$$

$x_0 \leq x \leq x_1$  ,  $0 \leq p \leq 1$  aralığına düşen integral

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx \cong h \int_0^1 y_p dp \text{ den}$$

$$I_1 = h(y_0 + \frac{1}{2}\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1)) \quad n \text{ adet dilim için integral } n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

$$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^2 y_k)] \quad \text{elde edilir. (merkezi yön tablosundan)}$$

### Örnek 1.

$I = \int_{-2}^{+2} e^{-x^2/2} dx$  integralinin  $I = 2,3925$  sonucunu  $h = 1$  adımlarla sayısal yöntemlerle bulalım.

$y = e^{-x^2/2}$  fonksiyonu  $x_0 = -2 \leq x \leq x_n = 2$  aralığını  $n = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{2 - (-2)}{1} = 4$  dilime bölerek;  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ , noktalarına karşılık düşen  $y$  değerlerini hesaplayıp  $\Delta y$  (ileri yön sonlu farklar tablosunu oluşturalım).

$k$	$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-2	0,135	0,472	-0,078	-0,709	1,418
1	-1	0,607	0,393	-0,786	-0,709	
2	0	1	-0,393	-0,079		
3	1	0,607	-0,472			
4	2	0,135				

$$y(-2) = e^{-(-2)^2/2} = 0,135$$

$$y(-1) = e^{-(-1)^2/2} = 0,6065$$

$$y(0) = e^0 = 1$$

.

$$y(2) = e^{-(2)^2/2} = 0,135$$

$$\Delta y_0 = 0,607 - 0,135 = 0,472$$

$$\Delta y_1 = 1 - 0,607 = 0,393$$

.

### Polinomlarla sayısal integral (trapez) formülünden

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n) \quad \text{(yamuk kuralı)}$$

$$I_a = \frac{1}{2}(0,135 + 2(0,607 + 1 + 0,607) + 0,135) = 2,349$$

### 1/3 Simpson formülünden;

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}))$$

$$I_b = \frac{1}{3}(0,135 + 0,135 + 2(1) + 4(0,607 + 0,607)) = 2,375$$

**G-N interpolasyon formülünden;**

$$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 y_k) + \frac{1}{24}(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^3 y_k)]$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} y_k = 0,135 + 0,607 + 1 + 0,607 = 2,3484$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta y_k = 0,472 + 0,393 + (-0,393) + (-0,472) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta^2 y_k = (-0,079) + (-0,786) + (-0,079) = -0,9424$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} \Delta^3 y_k = (-0,707) + (0,707) = 0$$

$$I_c = 1[2,3484 + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{12}(-0,9424) + \frac{1}{24}(0)] = 2,4269$$

**Bessel sayısal integral formülünden;**

Merkezi yön tablosu  $\delta$  elde edilirse;

$k$	$x$	$y$	$\delta y_{\frac{1}{2}}$	$\Delta \delta^2 y$
0	-2	0,135		
			0,472	
1	-1	0,607		-0,079
			0,393	
2	0	1		-0,786
			-0,393	
3	1	0,607		-0,079
			-0,472	
4	2	0,135		

$$I = h[\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{12}(\sum_{k=0}^{n-1} \delta^2 y_k)]$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} y_k = 2,349$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} \delta y_{k+\frac{1}{2}} = 0,472 + 0,393 + (-0,393) + (-0,472) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{4-1} \delta^2 y_k = (-0,079) + (-0,786) + (-0,079) = -0,944$$

$$I_d = 2,349 + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{12}(-0,944) = 2,4269$$

## 11. KAYNAKLAR

- **Sayısal Çözümleme**  
**Prof. Dr. Sefa AKPINAR**
  
- **Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler**  
**Steven C. CHAPRA & Raymond P. CANALE**

## EK-1

### 11. MATLAB VE PROGRAMLAMA MANTIĞI

MATLAB; temel olarak nümerik hesaplama, grafiksel veri gösterimi ve programlamayı içeren teknik ve bilimsel hesaplamalar için yazılmış yüksek performansa sahip bir yazılımdır. Matlab programının tipik kullanım alanları: Matematik ve hesaplama işlemleri / Algoritma geliştirme / Modelleme, simülasyon (benzetim) ve ön tipleme / Veri analizi ve görsel efektlerle destekli gösterim / Bilimsel ve mühendislik grafikleri / Uygulama Geliştirme şeklinde özetlenebilir.

MATLAB adı, *MATrix LABORatory (Matris Laboratuari)* kelimelerinden gelir. İlk başlarda bilim adamlarına problemlerin çözümüne matris temelli teknikleri kullanarak yardımcı olmaktaydı. Bugün ise geliştirilen yerleşik kütüphanesi ve uygulama ve programlama özellikleri ile gerek üniversite ortamlarında (başta matematik ve mühendislik olmak üzere tüm bilim dallarında) gerekse sanayi çevresinde yüksek verimli araştırma, geliştirme ve analiz aracı olarak yaygın bir kullanım alanı bulmuştur. Ayrıca işaret işleme, kontrol, fuzzy, sinir ağları, wavelet analiz gibi bir çok alanda ortaya koyduğu **Toolbox** adı verilen yardımcı alt programlarla da özelleştirilmiş ve kolaylaştırılmış imkanlar sağlamış ve sağlamaya da devam etmektedir.

Matlab, komut temelli bir programdır. Command Window penceresinde » işareti Matlab'in komut prompt'unu gösterir ve bu işaret bulunduğu satır komut satırı olarak adlandırılır. Bu işaretin hemen yanında yanıp sönen **I** şeklinde ki işaret komut ve metin yazma cursor'u yani imlecidir. Bu işaretin olduğu yerde klavyeden giriş yapılabilir demektir.

**Temel Matris İşlemleri;** Örnek uygulama komutları aşağıda gösterilmiştir.

```
clc                %komut satırını siler
A = [2 4 5 7]     % A satır matrisi
B = [2, 4, 5, 7]  % B satır matrisi
C = [1; 2; 4; 6]  % C sütun matrisi
C1 = [-10:2:20]   % C1 satır matrisi dizisel tanımlama
C2 = [-10:2:20]'  % C2 sütun matrisi dizisel tanımlama

length(C2)        % C2 sütun matrisi eleman sayısı
C1s=size(C1)     % C1 matris boyutu satır sütun şeklinde
C2s=size(C2)     % C2 matris boyutu satır sütun şeklinde

A(3) = 27        % A satır matrisinin 3. elemanını değiştirir
B(6) = -5        % B satır matrisinin 7. elemanını değiştirir arada olmayan elemanlara 0
değeri atar
```

```

B(2)= [ ]           % B satır matrisinin 2. elemanını siler

A = A+3           %tüm elemanlarla toplar
B = B*2           %tüm elemanlarla çarpar
B = B/2           %tüm elemanlarla böler

C3=A.*A           %A nın tüm elemanlarının eleman eleman çarpar
A1=[1:1:4]
C4=A.^A1          %A nın tüm elemanlarının A1 elemanlarıyla birebir üssünü alır

V1=zeros(1,10)    %Tüm elemanları sıfır bir satır vektörü
V2=zeros(10,1)    %Tüm elemanları sıfır bir sütun vektörü
V3=ones(1,10)     %Tüm elemanları 1 bir satır vektörü
V4=ones(10,1)     %Tüm elemanları 1 bir satır vektörü
V5=rand(1,10)     %Tüm elemanları rastgele bir satır vektörü
V6=randn(1,10)    %Tüm elemanları ortalaması 0 standart sapması 1 olacak şekilde
                  rastgele seçilmiş bir satır vektörü

C1
ort=mean(C1)       %Ortalama değer
ortd=median(C1)   %Orta değer
stds=std(C1)      %Standart sapma
byk=max(C1)       %Vektörün maksimum değeri
kck=min(C1)       %Vektörün minimum değeri
vryns=var(C1)     %V arisans
topl=sum(C1)      %Elemanların toplamı
carp=prod(C1)     %Elemanların çarpımı
sirala=sort(C1)   %Elemanları büyüklüğe göre sıralama
sr_yua=flipud(C1) %Sıralamayı yukarıdan aşağıya değiştirme
sr_solsag=fliplr(C1) %Sıralamayı soldan sağa değiştirme

A = [1 4; 2 3]
B = [1 4; 2 3]
C=[0 3; 1 2]

D=A+C           %toplama
D1=D'           %transpoze
D = 2*A         %skaler ile işlemler
D = A/2

E=C*A           %iki matrisin çarpımı
DT=det(A)       % matrisin determinantı
Ainv=inv(A)     % matrisin tersi
tst=A*Ainv      %matris le tersinin çarpımı birim matris

```

Imat=eye(3) %3x3 boyutlu birim matris  
rnk= rank(A) % bir matrisin rank ı

A=[2 3 -1;-1 2 3;0 1 2] %Denklemlerin katsayı matrisi  
b=[-1 9 5]' %sonuç matrisi  
x=inv(A)\*b %değişkenler  
x=A\b

## EK-2

### 12. ÖRNEK PROBLEMLER

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ç) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2. Aşağıdaki işlemleri,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri için, eğer yapılabilir ise, gerçekleştiriniz.

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } AC & \text{b) } C + DA & \text{c) } D^T - AC & \text{ç) } (3)BA + (4)AC & \text{d) } C^2 = CC \\ \text{e) } ACD & \text{f) } CDA & \text{g) } DBA & \text{ğ) } BAD & \text{h) } A(C^2) \\ \text{i) } A^T & \text{j) } CA^T & \text{k) } CD^T & \text{l) } D^T C & \text{m) } DB^T \end{array}$$

3. Aşağıdaki matris denklemlerinden  $a, b, c$  ve  $d$  yi bulunuz.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Aşağıda verilen matris ikililerinin çarpımının birim matris olduğunu gözlemleyerek bu matrislerin birbirinin tersi olduğunu gösteriniz.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{b)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

5.  $A$  ve  $B$   $n \times n$  matrisler;  $C$ ,  $D$  ve  $X$   $n \times l$  sütun matrisleri ise, aşağıdaki matris denklemlerinden  $X$  i bulunuz. (Gerekli olan tüm ters matrislerin varlığı kabul ediliyor.)

$$\text{a)} AX - BX = C \quad \text{b)} AX - X = C \quad \text{c)} AX + C = BX + D$$

6. Aşağıdaki denklemleri, matrislerin tersini kullanarak çözünüz.

$$\text{a)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$$

7. Aşağıdaki denklem sistemlerini ters matris yöntemi ile çözünüz.

$$\text{a)} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ 5x_1 + 8x_2 = 30 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 25 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 8x_1 + x_2 + 7x_3 = 153 \\ 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 155 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 105 \end{cases}$$

8. Verilen matrisin, varsa, tersini bulunuz.

$$\text{a)} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{b)} A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{c)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ç)} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{d)} A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{e)} A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 9 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Aşağıdaki denklem sistemlerini ters matris yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 5 \\ 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 30 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 25 \end{cases}, \quad \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -8 \\ 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 12 \\ 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 40 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 32 \end{cases}$$

$$10. A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre } A \text{ yı bulunuz.}$$

$$11. A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre } BA \text{ çarpımını bulunuz.}$$

