

ORAN - ORANTI

Oran: En az birer sıfırdan farklı olmak üzere, birimleri aynı olan iki çokluğun bölümüne "Oran" denir.

Ör 7 metrenin 8 metreye oranı

$$\frac{7m}{8m} = \frac{7}{8}$$

Not: Oranın birimi yoktur.

Ör 40 kg suya 10 kg şeker karıştırılarak bir şeker-su karışımı elde edilmiştir. Bu karışımındaki şekerin tüm karışıma oranını bulalım.

Çözüm: $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

Oranın Özellikleri

1) Kesirinde olduğu gibi, oranın da payı ve paydası sıfırdan farklı bir sayı genişletilebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \quad (c \neq 0)$$

2) Oranın payı ve paydası sıfırdan farklı bir sayı ile sadeleştirilebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad (c \neq 0)$$

ORANTI: İki veya daha fazla oranın eşitliğine "oranti" denir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ eşitliğine ikili oranti,}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ eşitliğine üçlü oranti,}$$

k ye oranti sabiti denir.

KURAL:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ orantısı $a:c:e = b:d:f$

biriminde gösterilebilir.

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısı $a:c = b:d$

biriminde gösterilebilir.

Bu orantıda; a ve d ye dışlar, b ve c ye içler denir.

Orantının Özellikleri

1) Bir orantıda içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \text{ dir.}$$

2) Bir orantıda içler-ye-değiştirilebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ dir.}$$

3) Bir orantıda dışlar-ye-değiştirilebilir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ dir.}$$

4) $m \neq 0, n \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{m \cdot a + n \cdot c}{m \cdot b + n \cdot d} = k \text{ dir.}$$

5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ ise,

$$\begin{aligned} a &= b \cdot k \\ c &= d \cdot k \\ e &= f \cdot k \end{aligned} \text{ dir.}$$

Ör $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 2$ olduğuna göre

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \text{ oranın değerini bulunur.}$$

Çözüm:

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Ör $\frac{2a-3b}{a+4b} = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $\frac{a}{b}$

oranın değerini bulalım.

$$\frac{2a-3b}{a+4b} = \frac{1}{3} \Rightarrow 6a-9b = a+4b$$
$$5a = 13b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{13}{5}$$

Ör 2^{3x+2} sayısının 2^{x-1} sayısına oranı 32 olduğuna göre $x+2$ sayısının $x-2$ sayısına oranı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{2^{3x+2}}{2^{x-1}} = \frac{2^{3x} \cdot 2^2}{2^x \cdot 2^{-1}} \Rightarrow \frac{2^{3x} \cdot 4}{2^x \cdot \frac{1}{2}} = 32$$

$$2^{2x} = 2^2 \Rightarrow 2x = 2, \quad \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

Ör) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ve $2x - 3y + z = 8$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamını bulunuz.

Cözüm: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ olsun

$$\frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3k$$

$$\frac{y}{4} = k \Rightarrow y = 4k$$

$$\frac{z}{5} = k \Rightarrow z = 5k$$

$$2x - 3y + z = 8 \Rightarrow 2 \cdot 3k - 3 \cdot 4k + 5k = 8$$

$$6k - 12k + 5k = 8 \Rightarrow \boxed{k = -8}$$

$$x + y + z = ?$$

$$3k + 4k + 5k = 12k = 12 \cdot (-8) = -96$$

Ör) $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{a-b}{b}$

oranının değerini bulunuz.

Cözüm: $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3a = 2a + 2b$
 $a = 2b$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{2b-b}{b} = \frac{b}{b} = 1$$

Ör) $\frac{a+2}{3} = \frac{b-3}{4} = \frac{c+5}{2} = 2$ olduğuna

göre $a+b+c$ toplamının sonucunu bulunuz?

Cözüm: $\frac{a+2}{3} = 2 \Rightarrow a+2 = 6 \Rightarrow a = 4$
 $\frac{b-3}{4} = 2 \Rightarrow b-3 = 8 \Rightarrow b = 11$
 $\frac{c+5}{2} = 2 \Rightarrow c+5 = 4 \Rightarrow c = -1$
 $a+b+c = 4+11-1 = 14$

$$\frac{a+b+c+4}{9} = 2 \Rightarrow a+b+c+4 = 18$$

$$\Rightarrow \boxed{a+b+c = 14}$$

Ör) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ve $2a + b - c = 35$

olduğuna göre $a = ?$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3k \\ b = 4k \\ c = 5k \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2a + b - c = 35 \\ 2 \cdot 3k + 4k - 5k = 35 \\ 5k = 35 \Rightarrow \boxed{k = 7} \end{array}$$

$$a = 3k \Rightarrow a = 3 \cdot 7 \Rightarrow \boxed{a = 21}$$

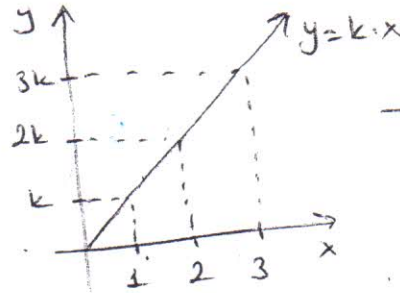
ORANTI ÇEŞİTLERİ

① Doğru Orantı: Biri artarken diğeri de artan veya biri azalırken diğeri de azalan büyüklüğe doğru orantılı büyüklükler denir. Doğru orantılı iki büyüklüğün oranı sabittir. y, x ile doğru orantılı ise,

$$\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = x \cdot k \text{ dir}$$

$y = k \cdot x$ 'e doğru orantı denklemi denir.

Bu denklemin grafiği



x	1	2	3
y	k	2k	3k

Kural: x, y, z sayıları sırasıyla, a, b, c sayıları ile orantılı (doğru orantılı) iseler,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \text{ dir}$$

Ör) a ile b büyüklükleri doğru orantılı olarak değişmektedir.

$a = 6$ iken $b = 4$ old. göre $a = 18$ iken b nin kaç olacağını bulunuz.

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow \frac{6}{4} = k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\frac{18}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

Ör) a, b, c sayıları sırasıyla 3, 8, 5 sayıları ile orantılıdır.

$$a + b - c = 12$$

olduğuna göre, a sayısını bulunuz

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{8} = \frac{c}{5} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3k \\ b = 8k \\ c = 5k \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + b - c = 12 \\ 3k + 8k - 5k = 12 \\ 6k = 12 \Rightarrow \boxed{k = 2} \end{array}$$

$$a = 3k \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

1) + tone limon 245 kuruz old.
göre, 385 kuruz kaç tone limon
alınabilir?

Çözüm:

$$+ \begin{pmatrix} 245 \text{ kuruz} & 7 \text{ tone limon} \\ 385 & x \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{385 \cdot 7}{245} \Rightarrow x = 11$$

10) Bir miktar para 6, 8 ve 10 yazlarındaki üç kardeşe yazıyla orantılı olarak dağıtılıyor. 6 yazındaki kardeşe verilen para 24 TL olduğuna göre dağıtılan paranın kaç TL olduğunu bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = k$$

$$\frac{a}{6} = k \Rightarrow \frac{24}{6} = k \Rightarrow k = 4$$

$$\frac{b}{8} = 4 \Rightarrow b = 32$$

$$\frac{c}{10} = 4 \Rightarrow c = 40$$

$$\text{Toplam para} = a + b + c = 24 + 32 + 40$$

$$\text{Toplam para} = 96 \text{ TL}$$

11) X sayısı $(y^2 + 1)$ sayısı ile doğru orantılıdır. $x = 2$ için $y = 5$ ise $y = -2$ için x kaçtır?

Çözüm:

$$x = k \cdot (y^2 + 1) \Rightarrow x = 2, y = 5$$

$$2 = k \cdot (5^2 + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{13}$$

$$x = ? \quad y = -2$$

$$x = \frac{1}{13} (4 + 1) \Rightarrow x = \frac{5}{13}$$

\Rightarrow

(2) Ters Orantı: İki caddeden biri artarken diğeri azalıyor veya biri azalırken diğeri artıyor bu iki caddeden ters orantıdır denir.

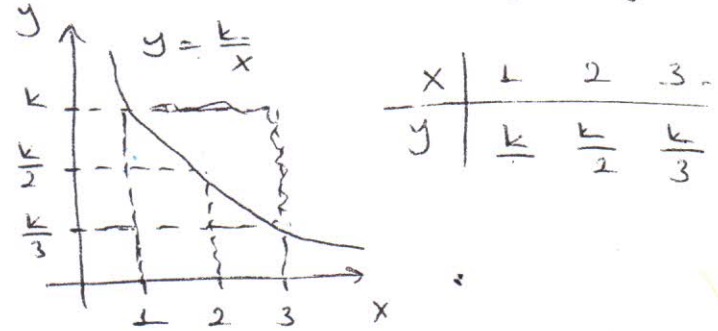
Ters orantılı iki caddeden birini sabittir.

y, x ile ters orantılı ise,

$$x \cdot y = k \quad \text{veya} \quad y = \frac{k}{x} \text{ tir.}$$

$$y = \frac{k}{x} \text{ e ters orantı denklemini}$$

denir. Bu denklemin grafiği;



Kural: x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayıları ile ters orantılı olsun. Buna göre

$$a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k \text{ dir.}$$

12) y, x ile ters orantılıdır. $x = 12$ iken $y = 6$ olduğuna göre $x = 9$ iken $y = ?$ kaçtır?

Çözüm:

$$x \cdot y = k \quad \text{veya} \quad y = \frac{k}{x} \text{ dir,}$$

$$12 \cdot 6 = k \Rightarrow k = 72$$

$$x \cdot y = k \Rightarrow 9 \cdot y = 72 \Rightarrow y = 8$$

13) a, b, c sayıları sırasıyla 3, 4, 5 sayıları ile ters orantılıdır.

$$a + b - 2c = 33$$

olduğuna göre a kaçtır?

$$a = \frac{k}{3}, \quad b = \frac{k}{4}, \quad c = \frac{k}{5}$$

$$a + b - 2c = 33 \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{4} - 2 \cdot \frac{k}{5} = 33$$

$$\frac{11k}{60} = 33$$

$$k = 180$$

$$a = \frac{k}{3} = \frac{180}{3} = 60$$

Ör) Kapasiteleri aynı olan 6 işçi bir işi 10 günde yapabildiğine göre aynı işi 5 işçinin kaç günde yapabileceğini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{pmatrix} 6 \text{ işçi} \rightarrow 10 \text{ günde} \\ 5 \text{ işçi} \rightarrow x \text{ günde} \end{pmatrix} +$$

$$6 \cdot 10 = 5 \cdot x$$

$$\boxed{x = 12}$$

Ör) 10 ve 12 yazındaki iki çocuk 66 fındığı yazılarıyla ters orantılı olarak paylaşacaktır. Buna göre küçük çocuk kaç fındık alır?

Çözüm:

Küçük çocuk : a tane fındık alır

Büyük çocuk : b " " "

$$a = \frac{k}{10} \quad b = \frac{k}{12}$$

$$a + b = 66$$

$$\frac{k}{10} + \frac{k}{12} = 66 \Rightarrow \frac{11k}{60} = 66 \Rightarrow \boxed{k = 360}$$

$$a = \frac{k}{10} \Rightarrow a = \frac{360}{10} \Rightarrow \boxed{a = 36}$$

③ Bileşik Oranti : içinde ikiden fazla oran bulunan orantılara "Bileşik oranti" denir.

Kural : y ; x ile doğru z ile ters orantılı ise :

$$\boxed{y = \frac{k \cdot x}{z}} \text{ dir}$$

Ör) a sayısı, b+2 ile doğru ve c-1 ile ters orantılıdır. a=12 ve b=4 ken c=3 old. göre a=16 ve c=4 ken b=?

Çözüm: $a = k \cdot \frac{(b+2)}{c-1}$

$$12 = \frac{k \cdot (4+2)}{3-1} \Rightarrow 12^2 = \frac{k \cdot 6}{2} \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

$$16 = \frac{4 \cdot (b+2)}{4-1} \Rightarrow 16^3 = 4 \cdot (b+2)$$

$$12 = b+2 \Rightarrow \boxed{b = 10}$$

Ör) Toplamı 98 olan iki doğal sayıdan biri 3 ile doğru orantılı, diğeri 2 ile ters orantılıdır. Buna göre küçük sayının kaç olduğunu bulunuz.

Çözüm:

I. sayı = x olsun

II. sayı = y olsun.

$$x + y = 98$$

$$x = 3k \quad y = \frac{k}{2}$$

$$x + y = 98$$

$$3k + \frac{k}{2} = 98 \Rightarrow \frac{7k}{2} = 98$$

(2)

$$\boxed{k = 28}$$

$$y = \frac{k}{2} \Rightarrow y = \frac{28}{2} \Rightarrow \boxed{14 = y}$$

Ör) 4 makina, 6 günde 120 parça ürün üretmektedir. Buna göre, aynı nitelikteki 6 makina, 8 günde kaç parça ürün ürettiğini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{array}{l} 4 \text{ makina} \leftrightarrow 6 \text{ günde} \rightarrow 120 \text{ parça} \\ 6 \text{ makina} \leftrightarrow 8 \text{ günde} \rightarrow x \text{ parça} \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{l} 4 \text{ makina} \rightarrow 120 \text{ parça} \rightarrow 6 \text{ günde} \\ 6 \text{ makina} \rightarrow x \text{ parça} \rightarrow 8 \text{ günde} \end{array}$$

$$4 \cdot x \cdot \cancel{8} = 6 \cdot 120 \cdot \cancel{6} \Rightarrow \boxed{x = 240}$$

Not : Bileşik orantılı sorularda aşağıdaki oranda kullanılır.

Birinci iz = Birinci iz ile ilgili diğer verilenler
ikinci iz = İkinci iz ile ilgili diğer verilenler

Ör) 4 işçi 8m² halıyı 20 günde dokuyorsa aynı kapasitedeki 6 işçinin 15 m² halıyı kaç günde dokuyabileceğini bulunuz.

$$\frac{4 \cdot 20}{18} = \frac{6 \cdot x}{2} \Rightarrow \boxed{x = 25}$$

Birbirine bağılı dizli çoklu devir sayısı ile diz sayısı ters tıdır.

Birbirine deviren üç çoklu dizli diz sayısı 170 dir. Birinci çoklu yapınca ikinci çoklu 4 devir üçüncü çoklu 8 devir yapmaktadır. göre, birinci çoklu diz sayısı kaçtır?

Çözüm:

İz sayıları sırasıyla ; x, y, z dir.

$$x = \frac{k}{3}, y = \frac{k}{4}, z = \frac{k}{8}$$

$$x + y + z = 170$$

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} = 170$$

$$(8) \quad (6) \quad (3)$$

$$\frac{17k}{24} = 170 \Rightarrow k = 240$$

$$x = \frac{k}{3} \Rightarrow x = \frac{240}{3} \Rightarrow x = 80$$

4

ORTALAMALAR

Aritmetik Ortalama: n tane sayının toplamının n 'ye bölünme, bu sayıların "aritmetik ortalaması" denir.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sayıların A.O.

$$A.O = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

ör) 3, 5 ve 10 sayılarının A.O. bulunuz.

$$\frac{3+5+10}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

ör) 6 sayının A.O. 13 olduğuna göre, bu sayıların toplamını bulunuz.

$$13 = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 13 \cdot 6$$

$$x = 78$$

ör) 12 tane sayının ortalaması 20 dir. Bu sayıların toplamı 160 olan 13 sayı daha ekleniyor. Buna göre yeni ortalaması kaçtır?

Çözüm:

$$12 \cdot 20 = 240 \text{ tır.}$$

$$\text{Yeni A.O} = \frac{\text{Bütün sayıların toplamı}}{\text{Bütün sayıların sayısı}} = \frac{240+160}{12+13} = \frac{400}{25} = 16$$

ör) a ile b nin A.O. 11, b ile c nin A.O. 17, a ile c nin A.O. 41.

old. göre ; a, b ve c sayılarının A.O. bulunuz.

$$\frac{a+b}{2} = 11 \Rightarrow a+b = 22$$

$$\frac{b+c}{2} = 17 \Rightarrow b+c = 34$$

$$\frac{a+c}{2} = 41 \Rightarrow a+c = 82$$

$$2(a+b+c) = 138$$

$$a+b+c = 69$$

$$A.O = \frac{a+b+c}{3} = \frac{69}{3} \Rightarrow A.O = 23$$

ör) Avukat ve doktorların oluşturduğu bir gruptaki avukatların ortalama 39, doktorların ortalama 41 dir. Avukatların sayısı Doktorların sayısının 3 katı olduğuna göre, bu grubun ortalama kaç olduğuna bulunuz.

Çözüm:

Doktorların sayısı : D olsun.

Avukatların sayısı : $3D$ olsun.

$$\text{Av. ortalama} = \frac{\text{Av. ortalama} \cdot \text{sayısı}}{\text{Av. sayısı}}$$

$$39 = \frac{\text{Av. ortalama} \cdot \text{toplam}}{3D} \Rightarrow \text{Av. ortalama} \cdot \text{toplam} = 117D$$

$$\text{Dr. ortalama} = \frac{\text{Dr. ortalama} \cdot \text{toplam}}{D} \Rightarrow \text{Dr. ortalama} \cdot \text{toplam} = 41D$$

$$\text{Top ortalama} = \frac{117D + 41D}{4D} = 39.5$$

Not: n tane sayının A.O. x olsun.

Bu n tane sayının herbiri a ile
çarpılır, b kadar arttırılırsa yeni

$$A.O. = x.a + b$$

Ör) 10 tane sayının ortalaması 8 ise,
bu sayıların herbiri 3 ~~arttır~~ artır-
ıldığında ortalaması,

$$8 + 3 = 11 \text{ olur}$$

Ör) Bugünkü yaşları 117 den bir
grubun dört yıl önceki yaş ortalaması
9 dur. Buna göre, bu grupta kaç kişi
olduğunu bulunuz.

Çözüm:

$$4 \text{ yıl önceki } A.O. = 9$$

$$\text{Bugünkü } A.O. = 9 + 4 = 13$$

$$A.O. = \frac{\text{Toplam}}{\text{Kişi sayısı}} \Rightarrow 13 = \frac{117}{\text{Kişi sayısı}}$$

$$\boxed{\text{Kişi sayısı} = 9}$$

2) Geometrik Ortalama:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sayıların G.O.;

$$\boxed{G.O. = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}}$$

Ör) 4 ile 9 un G.O. kaçtır?

$$G.O. = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{G.O. = 6}$$

Ör) 2, 4 ve 8 in G.O. kaçtır?

$$G.O. = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} \Rightarrow G.O. = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Ör) $7 - \sqrt{13}$ ve $7 + \sqrt{13}$ sayılarının
G.O. bulunuz.

$$\begin{aligned} G.O. &= \sqrt{(7 - \sqrt{13}) \cdot (7 + \sqrt{13})} \\ &= \sqrt{7^2 - (\sqrt{13})^2} \\ &= \sqrt{49 - 13} \\ &= \sqrt{36} \\ G.O. &= 6 \end{aligned}$$

Ör) 3^{x+1} ile $\sqrt{3}$ ün G.O. 3 old.
göre x kaçtır?

Çözüm:

$$(3)^2 = (\sqrt{3^{x+1}} \cdot \sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = 3^{x+1} \cdot \sqrt{3}$$

$$3 \cdot 9 = 3^x \cdot 3 \cdot 3^{1/2} \Rightarrow 3^1 = 3^{x + \frac{1}{2}}$$

$$1 = x + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Not: A.O. nın ve G.O. nın tanımında
x ile y nin hem A.O. sı hemde
G.O. sı 2 ise

$$\boxed{x = y = 2} \text{ olur}$$

Ör) x ile y birer pozitif tam sayı
O.Ü. $(x+3)$ ile $(y-2)$ sayısının
A.O. sı G.O. sına eşittir. Buna göre
x+y toplamının alabileceği en küçük
değeri bulunuz.

Çözüm:

$$x+3 = y-2 \Rightarrow x+5 = y$$

$$x=1 \quad y=6$$

$$x+y = 7$$

3) Harmonik Ortalama: Sıfırden
farklı a_1, a_2, \dots, a_n gibi n tane
gerçek sayının H.O. sı;

$$H.O. = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$a \text{ ile } b \text{ nin } H.O. = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow$$

$$H.O. = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Ör) İki sayının A.O. sı 10, G.O. sı 8 di.
Bu sayıların H.O. sı bulunuz.

$$A.O. = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 20$$

$$G.O. = \sqrt{ab} \Rightarrow a \cdot b = 64$$