CEBİR II

BÖLÜM I

1.1 HALKALAR

Tanım 1.1.1: $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve $\cdot$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

H1: $(R,+)$ değişmeli gruptur.

H2: $\cdot$ işleminin R'de birleşme özelliği vardır.

H3: $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani

$\forall a,b,c \in R$ için $a.(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$ dir.

$(R,+)$ değişmeli grubunun birim elemanı 0 veya 0_R ile gösterilir. Buna R halkasının sıfırı denir. Ayrıca $a \in R$ elemanının $+$ işlemine göre tersi $-a$ ile gösterilir.

Halkanın $\circ$ işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer varsa buna halkanın birim elemanı denir ve 1 veya 1_R ile gösterilir. Böyle halkaya birimli halka denir. Ayrıca halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahipse halkaya değişmeli halka denir. Halka sonlu elemanlı ise sonlu halka, aksi halde sonsuz halka olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.2 $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. $\{a\in R \mid \forall b\in R,\ ab=ba\}$ kümesine halkanın merkezi denir ve $M(R)$ ile gösterilir. Özel olarak $R=M(R)$ ise R değişmeli halkadır.

Gruplarda olduğu gibi, iki eleman için tanımlı $+$ ve $\cdot$ işlemleri sonlu sayıda eleman için de tümevarımla tanımlanabilir. Bu durumda

$$(a_1+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+\cdots+a_n)=\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)+\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n}a_i\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i,\quad \left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)$$

Örnek 1.1.3: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ birer değişmeli ve birimli halkadır.

Örnek 1.1.4: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $R=\{f \mid f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyon$\}$ kümesi üzerinde $+,\cdot$ işlemleri sırasıyla $\forall f,g\in R$, $\forall a\in\mathbb{R}$ için $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$, $(f\cdot g)(a)=f(a)g(a)$ şeklinde tanımlansın. $(R,+,\cdot)$ bir halkadır.

$\forall f,g,f',g'\in R$, $\forall a\in\mathbb{R}$ için $f=f'$, $g=g'$ ise

$(f+g)(a)=f(a)+g(a)=f'(a)+g'(a)=(f'+g')(a)$ ve

$(f\cdot g)(a)=f(a)\cdot g(a)=f'(a)\cdot g'(a)=(f'g')(a)$ olup

$f+g=f'+g'$, $f\cdot g=f'g'$ gerçekleştiğinden $+,\cdot$ R üzerinde birer ikili işlemdir. Diğer özellikler kolaylıkla sağlandığından ödev bırakılmıştır.

Örnek 1.1.4: A bir küme ve $P(A)$, A'nın kuvvet kümesi olsun. $\forall X, Y \in P(A)$ için $X+Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$ ve $X\cdot Y = X\cap Y$ ile tanımlanıyor. $(P(A),+,\cdot)$ bir halkadır.

Sadece H2 özelliğini gösterelim.

$X, Y, Z \in P(A)$ için

$$
\begin{aligned}
X\cdot(Y+Z) = X\cap(Y+Z) &= X\cap[(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus Y)]\\
&=[X\cap(Y\setminus Z)]\cup[X\cap(Z\setminus Y)]\\
&=[(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)]\cup[(X\cap Z)\setminus(X\cap Y)]\\
&=(X\cap Y)+(X\cap Z)\\
&=(X\cdot Y)+(X\cdot Z)
\end{aligned}
$$

Teorem 1.1.5: R bir halka, $\forall a,b \in R$ için

i) $a.0_R = 0_R.a = 0_R$

ii) $a.(-b) = (-a)b = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) = a.b$ dir.

İspat: i) Halkanın sıfır elemanı tanımı ve soldan dağılma özelliğini kullanarak $\forall a \in R$ için $a.0_R = a.(0_R + 0_R) = a.0_R + a.0_R$ den $a.0_R = 0_R$ bulunur. Benzer düşünce ile $0_R.a = 0_R$ olduğu gösterilir.

ii) $\forall a,b \in R$ için $0_R = a.0_R = a.(b+(-b)) = ab + a(-b)$ dir. $a.(-b) = -(ab)$ elde edilir. Benzer şekilde $(-a)b = -(ab)$ olduğu gösterilebilir.

iii) ii kullanılarak $\forall a,b \in R$ için $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$ bulunur.

Sonuç 1.1.6: R birimli bir halka ise, $\forall a \in R$ için

i) $(-1_R)a = -a$

ii) $(-1_R).(-1_R) = 1_R$ dir.

İspat: Teorem 1.1.5

Örnek 1.1.7: $R = \{0\}$ tek elemanlı bir halkadır. Buna aşikar halka denir. Genel olarak halkayı aşikar halkadan farklı kabul edeceğiz.

Teorem 1.1.8: R birimli bir halka olsun. Bu durumda $R \neq \{0\} \Longleftrightarrow 0_R$ ve 1_R farklıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $R \neq \{0\} \Longrightarrow \exists a \in R$ ve $a \neq 0$ dır.

$1_R = 0_R \Longrightarrow a = a 1_R = a.0_R = 0_R$ çelişkisi bulunur.

$(\Leftarrow)$ $1_R \neq 0_R$ ise $R \neq \{0\}$ dır.

Tanım 1.1.9: R bir halka olsun. $0_R \neq a \in R$ için
$a.b = 0_R$ veya $b.a = 0_R$ olacak şekilde $\exists\, 0_R \neq b \in R$
varsa a'ya halkanın sıfır bölen elemanı denir.
Halkada bütün elemanlar için böyle bir b elemanı
yoksa halkaya sıfır bölensiz halka denir.

Örnek 1.1.10 $m > 0$ bir tam sayı olmak üzere
mod m'ye göre kalan sınıfları kümesi $\mathbb{Z}/m$
olmak üzere $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ bir halkadır.
$m = p$ (p asal) ise $\mathbb{Z}_p$ sıfır bölensiz halka,
$m \neq p$ ise $\mathbb{Z}_m$ sıfır bölenli bir halkadır.

Tanım 1.1.11: R birimli bir halka olsun. $u \in R$ için $u.v = v.u = 1_R$ olacak şekilde $v \in R$ elemanı varsa $u \in R$'ye birimsel eleman denir. R halkasının tüm birimsel elemanlarının kümesi U_R ise gösterilir.

Örnek 1.1.12: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasının birimselleri
$U_{\mathbb{Z}} = \{1, -1\}$

Örnek 1.1.13: $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \odot)$ halkasının birimselleri
$U_{\mathbb{Z}_7} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dir.