Tanım 5.17 R bir tamlık bölgesi olsun. $d: R \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa R'ye Eulid Bölgesi denir ve kısaca EB ile gösterilir.

i) $\forall x \in R$ için $d(x) \geq 0$

ii) $d(x) = 0 \iff x = 0_R$

iii) $\forall x, y \in R$ için $d(x.y) = d(x).d(y)$

iv) $\forall x, y \in R, y \neq 0_R$ için $x = qy + r$, $0 \leq d(r) < d(y)$ olacak şekilde $\exists q, r \in R$ bulunabilir.

Tanım 5.18 d fonksiyonu i-ii-iii sağlarsa çarpımsal norm, (iv) özelliğine de bölme algoritması veya Euclid algoritması denir.

Örnek 5.19 $\mathbb{Z}$ bir ÖEB dir. $d: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \in \mathbb{Z}$ için $d(a) = |a|$ fonksiyonu alınırsa

$\forall a \in \mathbb{Z}$ için $d(a) = |a| \geq 0$, $d(a) = |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için $d(ab) = |a.b| = |a|.|b| = d(a)d(b)$ ve

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ olmak üzere $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$ yani $0 \leq d(r) < d(b)$ olacak şekilde $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ bulunabilir

Örnek 5.20 F cisim ise $F[x]$ Ö.B dir. F cisim olduğundan T.B dir. F TB ise $F[x]$ T.B dir.

$$d: F[x] \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad d(f) = \begin{cases} 2^{d^0 f}, & f \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & f = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu i-ii-iii-iv şartlarını sağlar (gösteriniz)

Teorem 5.21 R bir ÖEB ise TİB dir.

İspat: R bir ÖEB ve I R'nin bir ideali olsun.
$I=(0)$ ise I temel idealdir. $I\neq(0)$ olsun I idealinde sıfırdan farklı $d(a)$ en küçük tam sayı olacak şekilde bir $a\in I$ alalım. $(a)\subset I$ dir. Tersine $\forall x\in I$ için R ÖEB olduğundan $x=qa+r$, $0\leq d(r)<d(a)$ olacak şekilde $\exists q,r\in R$ vardır. $r\neq 0$ ise $r=x-qa\in I$ olacağından $d(r)<d(a)$ olması a'nın seçimi ile çelişir. $r=0$ olup $x=qa\in(a)$ bulunur. $I\subset(a)$ olur. Buradan $I=(a)$ olup I temel idealdir.

Sonuç 5.22 R ÖEB ise TAÇ dır.

Tanım 5.23 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ TB'ne Gauss Tam Sayılar Bölgesi denir.

Teorem 5.24 $\mathbb{Z}[i]$ Bölgesi EB dir.

İspat: $d: \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}$ $d(a+ib)=|a+bi|^2=a^2+b^2$ ile tanımlayalım.

i) $\forall a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, $d(a+ib)=a^2+b^2 \geq 0$ dır.

ii) $d(a+bi)=0 \iff a^2+b^2=0 \iff a=b=0$ dır.

iii) $\forall a+ib, c+id \in \mathbb{Z}[i]$ için $d[(a+ib)(c+id)]=d[(ac-bd)+i(ad+bc)]$

$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ $= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

$= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

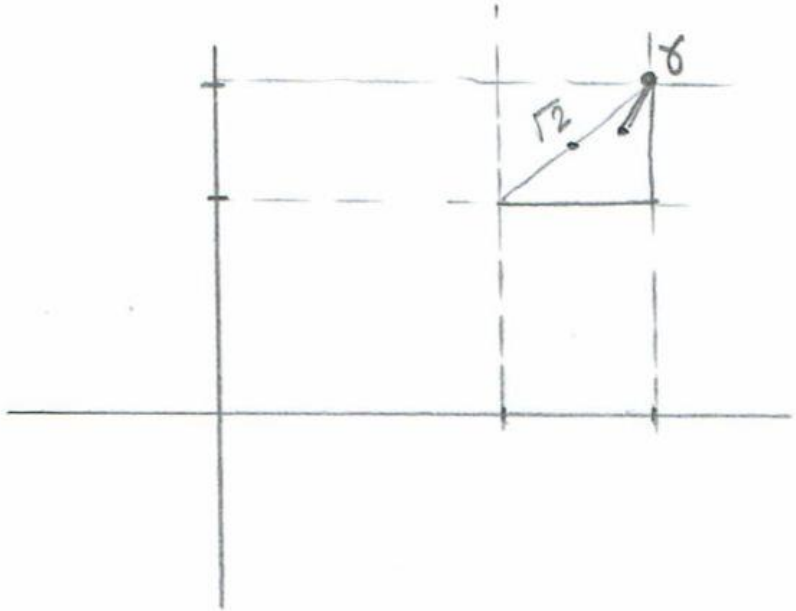
$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$= d(a+ib)\,d(c+id)$ bulunur.

iv) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\beta \neq 0$ olsun. $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}$ olup düzlemde bir noktaya karşılık gelir. Bu noktanın kenarına veya içine düştüğü birim kareyi düşünelim. $\frac{\alpha}{\beta}$ ya en yakın olan köşe $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ olsun.

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right|^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\alpha - \beta\gamma|^2 \leq \frac{1}{2}|\beta|^2 < |\beta|^2$$

olup $d(\alpha - \beta\gamma) < d(\beta)$ olur. $\alpha - \beta\gamma = \delta \in \mathbb{Z}[i]$ dersek $\alpha = \beta\gamma + \delta$ ve $d(\delta) < d(\beta)$ olacak şekilde $\exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}[i]$ vardır.



Sonuç 5.25 $\mathbb{Z}[i]$ ÖB olduğundan TİB ve TAÇ dır.

Teorem 5.26 $\mathbb{Z}[i]$ de $a+bi \mid c+di \Rightarrow \mathbb{Z}$ de $d(a+bi) \mid d(c+di)$ dir.

İspat: $a+bi \mid c+di \Rightarrow c+di = (a+bi)(e+fi)$, $e+fi \in \mathbb{Z}[i]$

Buradan $d(c+di) = d[(a+bi)(e+fi)] = d(a+bi)\,d(e+fi)$ olup $d(a+bi) \mid d(c+di)$ bulunur.

Teorem 5.27 $d(a+bi)$, $\mathbb{Z}$'de asalsa $a+bi$, $\mathbb{Z}[i]$'de asaldır.

İspat: $a+bi$ asal olmasa $a+bi = (r+si)(u+vi)$ ($r+si, u+vi \in \mathbb{Z}[i]$) şeklinde asikar olmayan bir çarpanlara ayrılır. $r+si$, $u+vi \neq 1, \mp i$ aritmetik birimlerinden farklıdır. O halde $d(a+bi) = d(r+si)\,d(u+vi)$ olup $d(r+si) > 1$, $d(u+vi) > 1$ olup $d(a+bi)$ sayısının asal olmasıyla çelişir. Şu halde $a+bi$, $\mathbb{Z}[i]$'de asal olmak zorundadır.

Örnek 5.28 $5 \in \mathbb{Z}[i]$-yi asal çarpanlarını bulalım.

$a+bi \mid 5$ olsun $d(a+bi) = a^2+b^2 \mid 25$ $a^2+b^2 \to 1, 5, 25$ olabilir.

$a^2+b^2 = 1 \vee 25$ ise $a+bi$, 5'in aşikar bölenidir.

$a^2+b^2 = 5 \Rightarrow a^2=4, b^2=1 \Rightarrow a=\mp 2, b=\mp 1$

$a^2=1, b^2=4 \Rightarrow a=\mp 1, b=\mp 2$

$a+bi$ için $\mp(2+i)$, $\mp(2-i)$, $\mp(1+2i)$, $\mp(1-2i)$ sayıları söz konusu olur. $5=(2+i)(2-i)$

$d(2\mp i)=5$ asal olduğundan $2\mp i$, $\mathbb{Z}[i]$ de asaldır.

$\mp(1+2i)$ ve $\mp(1-2i)$ $2+i$ ile ilgilidir.

Örnek 5.29 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+bi\sqrt{5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ T.B-i TAÇ değildir.

$\forall \alpha = a+bi\sqrt{5}$ elemanı için $d(\alpha) = a^2+5b^2$ ile $d: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir çarpımsal normdur (Gösteriniz)

$9 = 3^2 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ olduğundan 3, $2+\sqrt{-5}$, $2-\sqrt{-5}$ elemanları $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ indirgenemezdir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ için $\alpha.\beta = 3 \Rightarrow d(\alpha)d(\beta) = 9$, $d(\alpha) = 1,3,9$ olabilir. $d(\alpha) = 1 \vee 9$ ise aşikar bölendir.

$d(\alpha) = 3 = a^2+5b^2$, olacak şekilde $a,b \in \mathbb{Z}$ yoktur.

3 indirgenemezdir. Benzer şekilde $2+\sqrt{-5}$ ve $2-\sqrt{-5}$'inde indirgenemez olduğu gösterilebilir.

Örnek 5.30 $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ halkasında 3 asal değildir.

$3 \mid (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}) = 6 \Rightarrow 3 \mid 1+i\sqrt{5} \vee 3 \mid 1-i\sqrt{5}$ olmalı

$3 \mid 1+i\sqrt{5}$ olsun $1+i\sqrt{5} = 3(a+bi\sqrt{5}) \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow$

$a = \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ çelişkisi elde edilir. $3 \nmid 1+i\sqrt{5}$ dir.

Benzer şekilde $3 \nmid 1-i\sqrt{5}$ olduğuda gösterilebilir.

O halde $3 = 3+0i\sqrt{5}$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ de asal değildir.