Teorem 1.1.14: R birimli bir halka olsun. Bu durumda

i) $U_R \neq \emptyset$

ii) $0_R \notin U_R$

iii) $\forall u,v \in U_R$ için $u.v \in U_R$ dir.

İspat: i) $1_R . 1_R = 1_R \Rightarrow 1_R \in U_R \Rightarrow U_R \neq \emptyset$

ii) $0_R \in U_R$ olsun. $0_R . v = v . 0_R = 1_R$ olacak şekilde $v \in R$ vardır. Buradan $0_R = 1_R$ çelişkisi elde edilir.

iii) $u, v \in U_R \Longrightarrow u.a = a.u = 1_R$ ve $vb = bv = 1_R$ olacak şekilde $\exists a,b \in R$ vardır.

$(u.v)(ba) = u(vb)a = u.a = 1_R$

$(ba)(uv) = b(a.u)v = b.v = 1_R$ olup $u.v \in U_R$ bulunur.

Tanım 1.1.15 R birimli bir halka olsun. R'nin sıfırdan farklı her elemanı birimsel ise R'ye Bölme Halkası denir.

Tanım 1.1.16 Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya Tamlık Bölgesi (TB) denir.

Örnek 1.1.17 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bir tamlık bölgesidir.

Örnek 1.1.18 p asal tam sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p,\oplus,\odot)$ bir tamlık bölgesidir.

12

Teorem 1.1.19 R bir halka ve $c \in R$ sıfır bölen olmayan bir eleman olsun. $\forall a, b \in R$ için $ac = bc$ (veya $ca = cb$) ise $a = b$ dir.

İspat: $ac = bc \Rightarrow ac - bc = 0_R \Rightarrow (a-b).c = 0_R$ olur. c sıfır bölen olmadığından $a - b = 0_R$ olup $a = b$ bulunur. $ca = cb \Rightarrow a = b$ için benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 1.1.20 R bir tam halka $\Longleftrightarrow$ $\forall\, 0_R \neq c \in R$ ile sağdan ve soldan kısaltma özelliği sağlanır.

Sonuç 1.1.21 R bir tam halka ise $0_R \neq a \in R$ için $ax = b$ olacak şekilde $\exists x \in R$ varsa teklikle belirlidir. Fakat böyle bir x elemanı olmayabilir.

İspat: $ax = b$ olacak şekilde $x \in R$ olsun. tekliğini göstrelim. $ax_1 = b$, $ax_2 = b$ şartını sağlayan $x_1, x_2 \in R$ olsun $ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ bulunur.

Tanım 1.1.22 R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $R-\{0_R\}=R^*$ kümesi ikinci işleme göre bir değişmeli grup ise R'ye cisim denir. Tanım ve sonuç 1.1.21'e göre bir cisimde sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi var ve tektir.

Örnek 1.1.23 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ birer cisimdir.

Tanım 1.1.24 R bir halka $x \in R$ olsun. $x^2 = x$ ise $x \in R$'ye idempotent eleman denir. Bir halkanın sıfırı ve varsa birimi idempotent elemanlardır.

Tanım 1.1.25 Birimli bir R halkasının her elemanı idempotent ise R halkasına Boole Halkası denir.

Örnek 1.1.25 $\mathbb{Z}_2$ bir Boole Halkasıdır.

Tanım 1.1.26 R bir halka olsun. Eğer $\forall a \in R$ için $n.a = 0_R$ olacak şekilde $n > 0$ tam sayısı varsa, böyle $n > 0$ tam sayılarının en küçüğüne R'nin krakteristiği denir. Bu özellikte hiç bir n yoksa R halkasının krakteristiği sıfırdır denir. $\text{krak}R$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.27 $\text{krak}\,\mathbb{Z} = \text{krak}\,\mathbb{Q} = \text{krak}\,\mathbb{R} = 0$ dır.

$\text{krak}\,\mathbb{Z}_6 = 6$ dır.

Teorem 1.1.28 R bir Boole Halkası olsun. Bu durumda R'nin krakteristiği 2 ve R değişmelidir.

İspat: $x \in R$ alalım.

$$x+x = (x+x)^2 = (x+x)(x+x) = x(x+x) + x(x+x)$$
$$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x+x+x+x \Rightarrow 0_R = 2x \text{ olup}$$

x keyfi olduğundan $\operatorname{krak}(R) = 2$ bulunur.

$x, y \in R$ alalım.

$$x+y = (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2$$

$0_R = xy + yx$ bulunur.

$$xy = xy + 0_R = xy + xy + yx = 2xy + yx$$
$$= yx \text{ bulunur.}$$