SAB 104 - OLASILIK

Olasılık kavramına P.Fermat ile B.Pascal'ın büyük katkıları olmuştur. Pascal hesap makinesini geliştirerek Fermat ile birlikte olasılığın temellerini oluşturmuştur. Daha sonra Rus matematikçi Kolmogorov olasılık aksiyomlarını ileri sürmüşlerdir. Olasılığın gelişmesinde 4 anahtar kelime önemli rol oynamaktadır.

- Deney (Experiment)
- Örneklem (Sample)
- Örneklem uzayı (Sample space)
- Olay (Event)

1.1. Örneklem Uzayı (S)

Deneme, birden fazla sonucun mümkün olduğu süreç veya prosedür. Örneklem uzayı, bir denemenin S ile gösterilen örnek uzayı, olası tüm deney sonuçlarından oluşan bir kümedir. Deney, teorik olarak belirli koşullar altında sonsuz defa tekrarlanabilen, her tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen ve olası sonuçların çok iyi tanımlandığı bir süreçten oluşur. Deneyin sonuçlarından her birine veya belli özellikleri sağlayan deney sonuçlar kümesine de olay denir.

Örnek: Madeni bir paranın üç kez atıldığını göz önüne alalım.

a) Örneklem uzayını belirleyiniz.

b) A olayı, yazıların (Y) turalardan (T) daha fazla olduğu deneyleri göstersin. A olayını tanımlayınız.

Çözüm: Böyle bir deneyde 8 tane farklı sonuç vardır. Bu sonuçlar örneklem uzayını oluşturur. Örneklem uzayında yer alacak sonuçları Y ve T sembolleri ile gösterecek olursak, paranın üç atılışı sonucunda elde edilecek 8 farklı sonuç aşağıda verildiği gibi olacaktır.

$$S = \{(Y,Y,Y)\ (Y,Y,T)\ (Y,T,Y)\ (T,Y,Y)\ (Y,T,T)\ (T,Y,T)\ (T,T,Y)\ (T,T,T)\}$$

Örneklem uzayından, yazıların turalardan daha fazla olduğu örneklem sonuçlarının sayısı 4'tür.

A ={(Y,Y,Y) (Y,Y,T) (Y,T,Y) (T,Y,Y)}

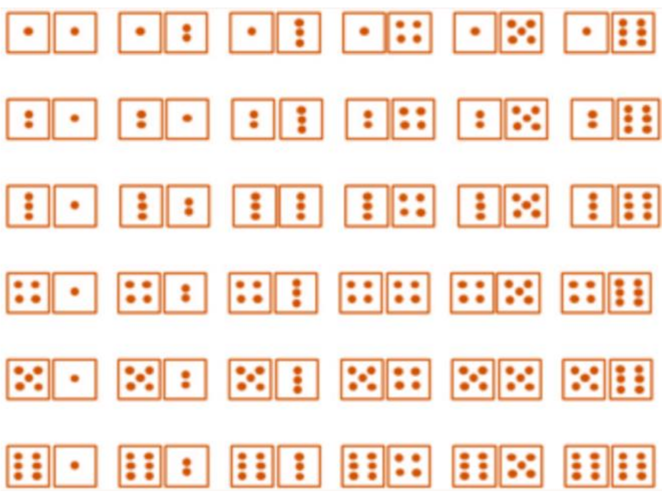
şeklindedir.

Örnek: İki farklı renkteki zarın birlikte atıldığı durumu göz önüne alalım.

a) Örneklem uzayını belirleyiniz.

b) A olayı zarların üzerindeki sayıların toplamının 7 olmasını ve B olayı da iki zarın üzerindeki sayıların aynı olmasını göstersin. Buna göre A ve B olaylarını belirleyen kümeleri yazınız.

Çözüm: Bir zar atılışında zarın 6 farklı yüzü gelebilir ve örneklem uzayı: S ={1,2,3,4,5,6} şeklindedir. Eğer iki zar atılırsa (veya hilesiz zar iki kez atılırsa), örneklem uzayı aşağıdaki gibidir.



(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

A olayı zarların üzerindeki sayıların toplamlarının 7 olması olduğuna göre,

A ={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

kümesidir. B olayı iki zarın üzerindeki sayıların aynı olması olarak tanımlanırsa,

B ={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

kümesidir.

Bir deneyle bağlantılı olarak S örneklem uzayında tanımlanan olaylarla ilgili bir sonuç ile değil, birkaç sonuçla ilgilenilebilir. Bu durumda kümeler cebrinden yararlanılır.

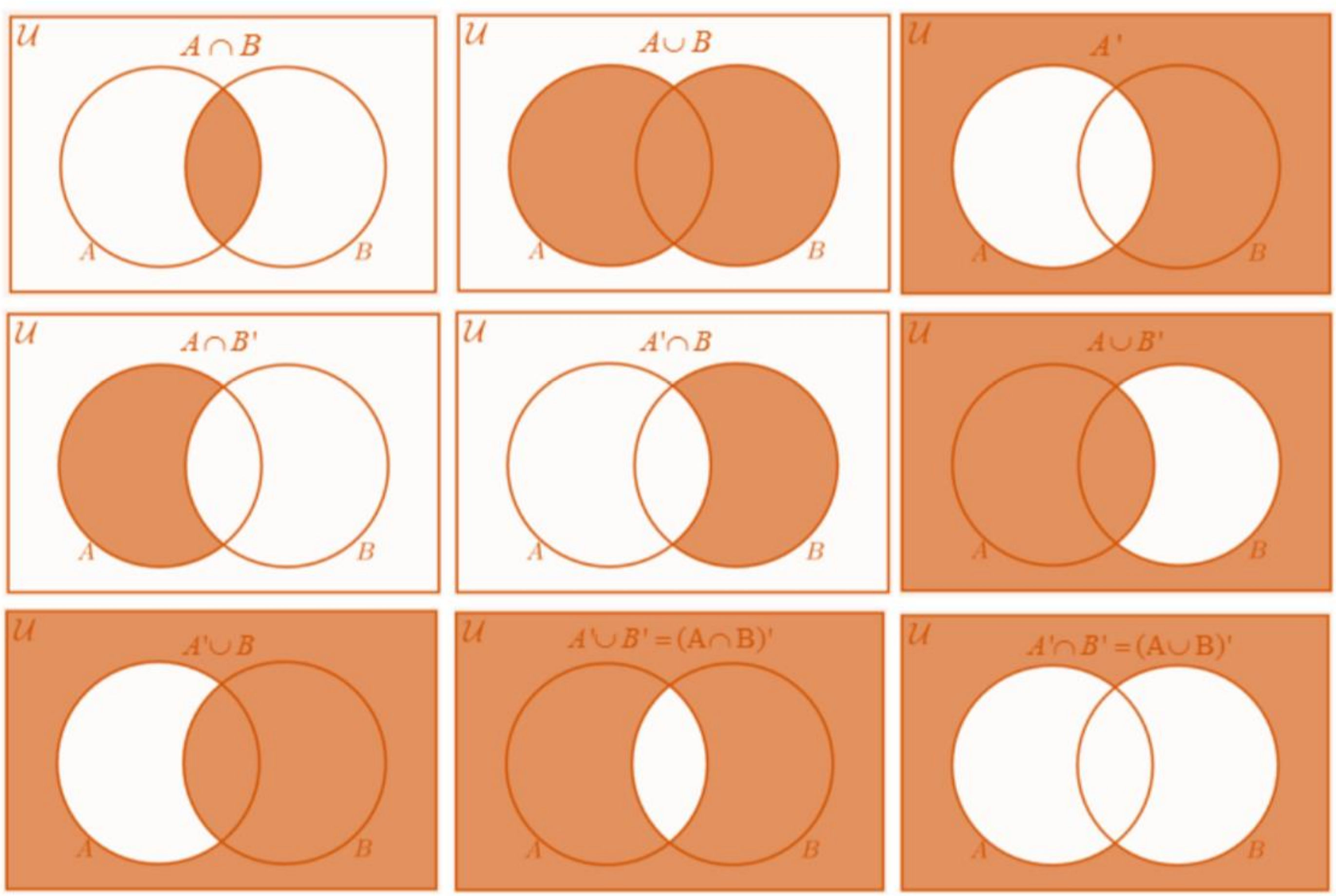
1.2. Kümelerin Birleşimi ve Kesişimi

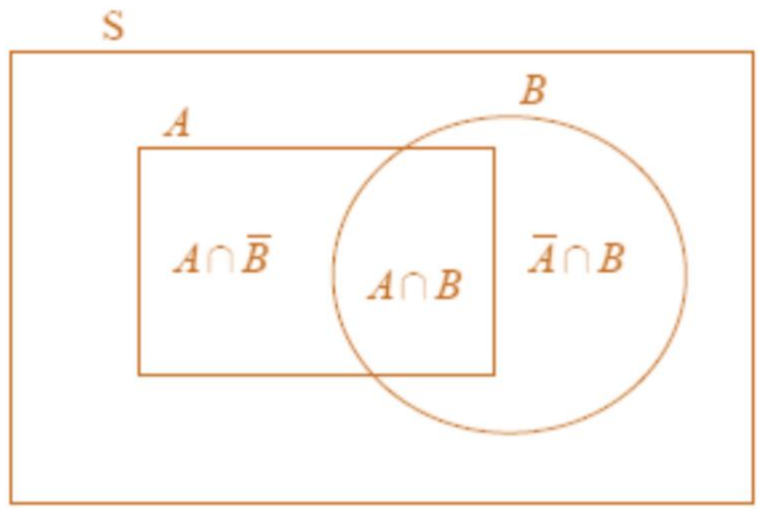
A ve B, aynı S örneklem uzayında tanımlanmış iki olay olmak üzere, A ve B olaylarının birleşimi $A \cup B$ olarak gösterilir. A ve B olaylarının kesişimi $A \cap B$ olarak gösterilir.

Ayrık olaylar: Aynı örneklem uzayında tanımlanmış ve A ve B olaylarının hiçbir ortak sonucu yok ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir. $A \cap B = \emptyset$'dir.

Tümleyen olay: A, bir örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir olay olsun. A'nın tümleyeni, A olayında içerilen sonuçlar hariç S örneklem uzayındaki tüm sonuçları içeren bir olaydır. A olayının tümleyeni $\bar{A}$ veya A^c ile gösterilir.

Karmaşık olayların anlaşılmasında kolaylık sağlayan grafiksel gösterime Venn şeması denir.





$$S = A \cup \overline{A}$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$
$$A \cap B = A \setminus (A \cap \overline{B})$$
$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

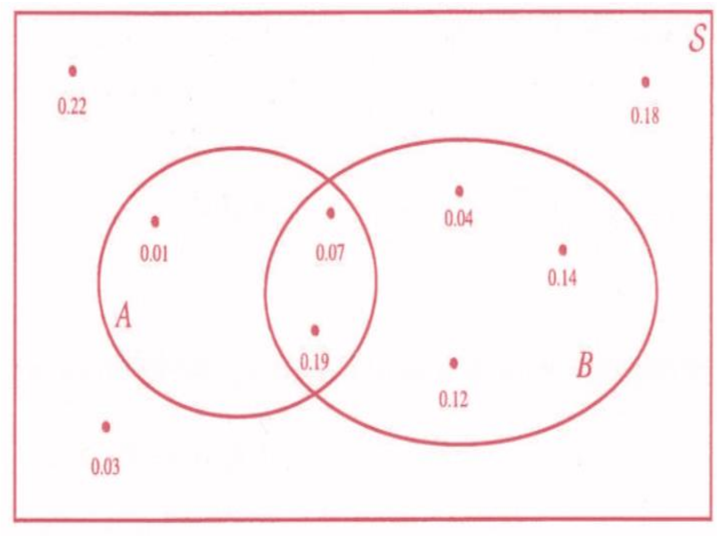
$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= B \cup (\overline{B} \cap A) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) \end{aligned}$$

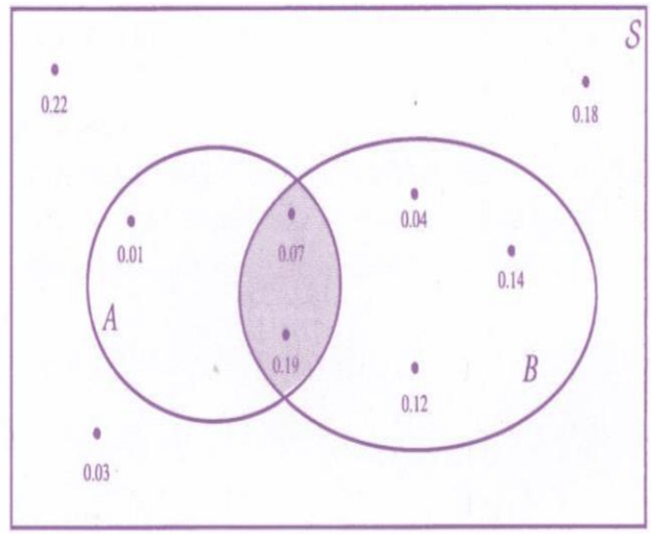
olmak üzere, son eşitlikte iki kümenin birleşimi üç farklı şekilde ayrık kümelerin birleşimi olarak yazılmıştır. Sayılabilir sonsuz tane kümenin birleşimi ayrık kümeler cinsinden

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek: S örneklem uzayı, 9 sonuçtan oluşsun:

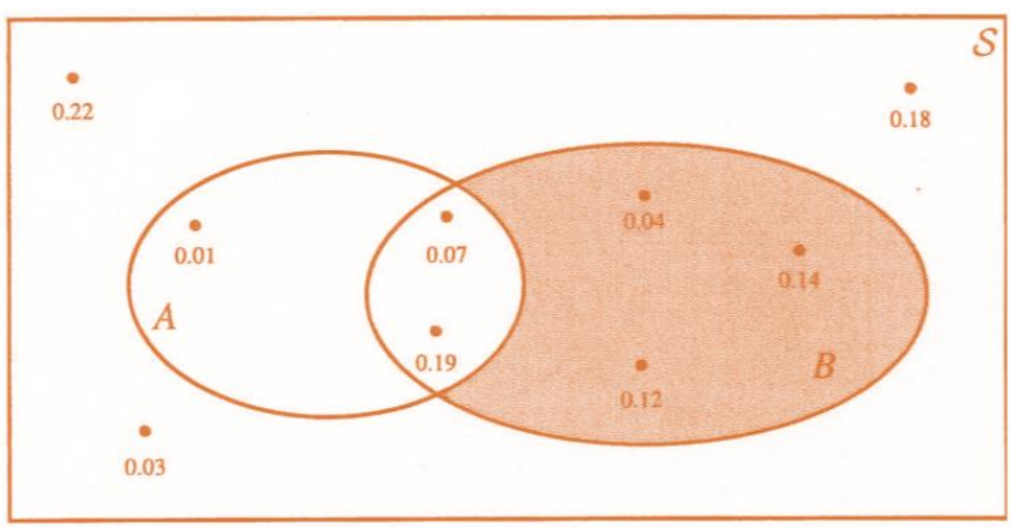


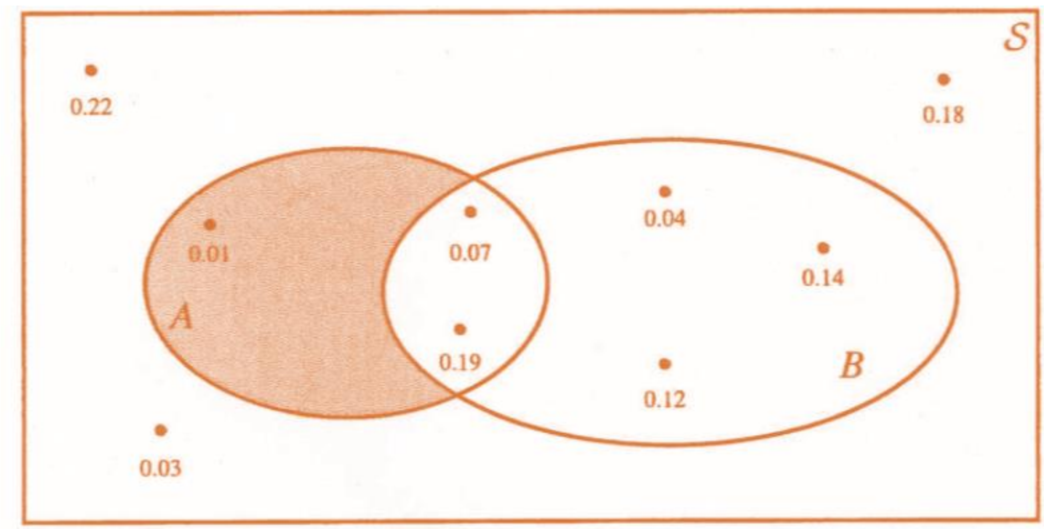


$P(A) = 0.01 + 0.07 + 0.19 = 0.27$;

$P(B) = 0.07 + 0.19 + 0.04 + 0.14 + 0.12 = 0.56$;

$P(A \cap B) = 0.07 + 0.19 = 0.26$ şeklinde hesaplanır.





$P(A' \cap B) = 0.04 + 0.14 + 0.12 = 0.30$

$P\,(A \cap B') = 0.01$

$P(\,A \cap B) + P(\,A \cap B') = 0.26 + 0.01 = 0.27 = P(\,A)$ $P(A \cap B) + P(A' \cap B) = 0.26 + 0.30 = 0.56 = P(B)$

Not:

$P(\,A \cap B) + P(\,A \cap B') = P(\,A)$

$P\,(\,A \cap B\,) + P\,(\,A' \cap B\,) = P\,(\,B\,)$

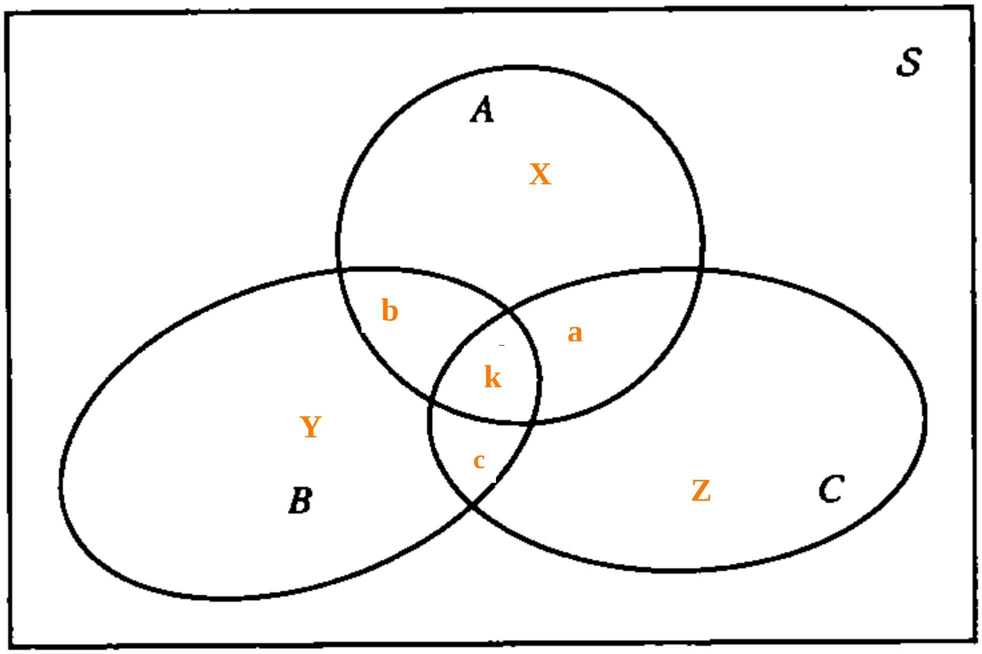
Örnek: Okul kantininde 100 öğrenci üzerinden bir araştırma yapılmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Çocuklardan 74'ü dondurmadan, 53'ü şekerden, 78'i tatlılardan, 57'si hem tatlı hem de dondurmadan hoşlanmaktadır. 46 çocuk tatlı ve şekerden hoşlanırken, sadece 31'i üçünden de hoşlanmaktadır. Hem dondurma hem de şekerlerden hoşlanan kaç çocuk vardır?

$A = \{\text{dondurmadan hoşlanan çocuklar}\}$,

$B = \{\text{şekerden hoşlanan çocuklar}\}$,

$C = \{\text{tatlıdan hoşlanan çocuklar}\}$ kümesi olsun.

$N(S) = 100, N(A \cap C) = 57, N(A) = 74, N(B \cap C) = 46, N(B) = 53, N(A \cap B \cap C) = 31, N(C) = 78$ ise $N(A \cap B) = ?$



$x + y + z + a + b + c + k = 100$

$a + k = 57$

$x + a + k + b = 74$

$k + c = 46$

$y + b + c + k = 53$

$k = 31; a + k + c + z = 78$

Denklemler çözüldüğünde;

$k = 31, a = 26, b = 2, c = 15, x = 15, y = 5, z = 6$ olarak bulunur. Soruda istenen $\mathrm{N}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$,

yani $b + k = 2 + 31 = 33$ kişi hem dondurma hem de şekerden hoşlanmaktadır.

1.3. Olasılık Teorisi

Olasılık teorisi, rastlantı ya da kesin olmayan olaylarla ilgilenir. Rastlantı olayı gerçekleşmesi şansa bağlı olan önceden kesinlikle bilinmeyen olaylardır. Olasılığın çeşitli tanımları vardır.

- **Klasik Olasılık:** Bir deneyin ya da bir oyunun n tane olası sonucu olduğu ve bu sonuçların her birinin eşit olasılıklı olarak ortaya çıktığı kabul edilsin. Eğer A olarak tanımlanan bir olay, toplam n eşit olasılıklı durumdan m tanesinde gerçekleşiyorsa o zaman A olayının olasılığı $P(A) = \frac{m}{n}$ olarak ifade edilir. Olasılığın, klasik tanımına bağlı hesaplanmasında bazı kısıtlamalar vardır. Örneğin, sonuçlar sayısının belli olmadığı durumlar olabilir. Bu tür sorunların üstesinden gelebilmek için olasılığın daha genel ve deneysel bir tanımına ihtiyaç vardır.
- **Deneysel Olasılık:** S bir örneklem uzayı ve A bu örneklem uzayından tanımlanmış bir olay olsun. Deney aynı koşullarda n defa tekrar edilsin. Toplam n tekrar içinde A'nın oluş sayısı m ise ve n sonsuz derecede büyük bir sayı ise, m/n oranının n sonsuza giderken aldığı değere A olayının deneysel olasılığı denir. $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$ olarak ifade edilir. Bu tanımın da bazı sakıncaları vardır. Örneğin n tane deneyin aynı fiziksel koşullar altında çok büyük sayıda gerçekleşmesi her zaman mümkün değildir.
- **Çağdaş Olasılık:** Olasılığın diğer tanımlarındaki zorlukları gören matematikçiler olasılığı bir fonksiyon olarak ifade etmişlerdir. Rus matematikçi Kolmogorov (1933) dört aksiyomla olasılık fonksiyonunu tanımlamıştır.

1. **Aksiyom**

S örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir olay A olmak üzere bu olayın olasılığı negatif değer olmayan reel bir sayıdır. Yani, $P(A) \geq 0$

2. **Aksiyom**

$P(S) = 1$

3. **Aksiyom**

A ve B, aynı S örneklem uzayı üzerinde tanımlanmış iki ayrık olay olmak üzere, yani $A \cap B = \emptyset$ olduğunda $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 'dir.

4. **Aksiyom**

$A_1, A_2, \ldots$ olayları S örneklem uzayında tanımlanmış ayrık olaylar olsun. Yani, her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ *ise* $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 'dir.

Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n ler\ U'da\ ayrık\ kümeler \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $0 \leq P(A) \leq 1$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *ya da genel olarak* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$
7. $P\left(\bigcup_{n=1}^{n} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ *ve* $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
8. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ *ve*
9. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Örnek: Bir hazır giyim firması işçi alımında bir model oluşturmak istiyor. Bunun için şirket yöneticileri, gelecek beş yıl içinde yeni işçilerin %80'inin kadın ve %30'unun da bekar olmasını istiyor. Her yeni beş işçiden birinin de evli erkek olmasını planlıyor. Yöneticilerin bekar bir kadını işe alma olasılığı nedir?

Çözüm:

Burada 4 temel olay vardır. Bunlar sırasıyla;

$A = \{Bekar\ olması\}$, $B = \{Evli\ olması\}$, $C = \{Kadın\ olması\}$ ve $D = \{Erkek\ olması\}$

$P(C) = 0.80, P(A) = 0.30, P(B) = 0.70, P(D) = 0.20\ ve\ P(B \cap D) = 020$

	Evli	Bekar	Toplam
Kadın	0.50	0.30	0.80
Erkek	0.20		0.20
Toplam	0.70	0.30	1.00

$P(A \cap C) = P(C) - PB \cap C)$

$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap D)$

$0.70 = P(B \cap D) + 0.20$

$P(B \cap C) = 0.50$

$P(A \cap C) = P(C) - P(B \cap C)$

$= 0.80 - 0.50$

$= 0.30$ olur.

Örnek: Bir tane 5 kuruşluk, bir tane 10 kuruşluk iki madeni para birlikte atılıp üste gelen yüzlerinin ne gösterdiği gözlemlenecektir. Örneklem uzayındaki birinci harf 5 kuruşluk ile ilgili sonucu ve ikinci harf 10 kuruşluk ile ilgili sonucu göstersin. Sonuçlar Y ve T harfleri ile gösterilmek üzere;

A : En az bir T gelmesi;

B : İki T gelmesi

C: İki Y gelmesi olsun.

a) A ve B ayrık olaylar mıdır?
b) A ve C ayrık olaylar mıdır?
c) A ya da B'nini gerçekleşmesi olasılığı nedir?
d) B ya da C'nin gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

Önce örneklem uzayını tanımlayalım. $S = \{(Y,Y), (Y,T), (T,Y), (T,T)\}$

$P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{4}$ olarak sorudan yazılabilir. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ayrık olaylardır.

a) $(A \cap B) = (T, T) \neq \emptyset$ olduğu için A ve B ayrık olay değildir.

b) $(A \cap C) = \emptyset$ olduğu için A ve B ayrık olaydır.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.75 + 0.25 - 0.25$

= 0.75 bulunur.

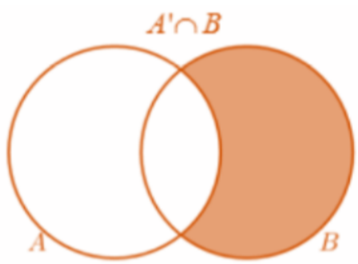
d) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.25 + 0.25 - 0 = 0.50$ olarak bulunur.

Örnek: A ve B olaylarına ilişkin olasılıklar $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = 1/4$ olsun. $P(\bar{A} \cup B)\ ve\ P(A \cap \bar{B})$ olasılıklarını hesaplayalım.

Çözüm:

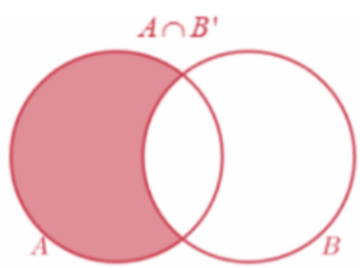
$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{11}{12}$ bulunur.



$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ bulunur.

Örnek: Bir kutuda 8 kırmızı, 5 mavi bilye vardır. Bu kutudan bir defada 5 bilye rastgele seçiliyor. A olayı çekilen 5 bilyenin tümünün mavi olması ve B olayı da çekilen bilyelerin 2 kırmızı ve 3 mavi bilye olması olsun. $P(A)\ ve\ P(B)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm:

$$P(A) = \frac{\ddot{O}rneklem\ uzayında\ istenen\ şartı\ sağlayanlar}{\ddot{O}rneklem\ uzayındaki\ elemanların\ sayısı}$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{5}\binom{8}{0}}{\binom{13}{5}} = \frac{1}{1287}$$

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}\binom{5}{3}}{\binom{13}{5}} = \frac{280}{1287}$$

olarak hesaplanır.

Kaynaklar:

- Erdem, İ. (2012). Matematiksel İstatistik Problemler ve Çözümleri. *Ankara: Seçkin Yayıncılık San ve Tic. AŞ*.
- Prof.Dr.Fatih Tank Olasılık Ders Notları, Ankara Üniversitesi.
- DeGroot, M. H., & Schervish, M. J. (2012). *Probability and statistics*. Pearson Education.