

# HRT346 Fiziksel Jeodezi

**Dersin Amacı:** Yeryuvarı gravite alanının belirlenmesi için gerekli temel teorik kavramların verilmesi amaçlanmaktadır.

- **Dersin içeriği**

- Çekim kuvveti, çekim ivmesi,
- Çekim potansiyeli ve özellikleri
- Küresel harmonik fonksiyonlar, laplace denklemi
- Yeryuvarı gravite alanı ve özellikleri
- Eşpotansiyelli yüzeyler ve özellikleri
- Normal gravite alanı ve özellikleri
- Bozucu gravite alanı
- Jeoid belirleme yöntemleri
- Yükseklik sistemleri

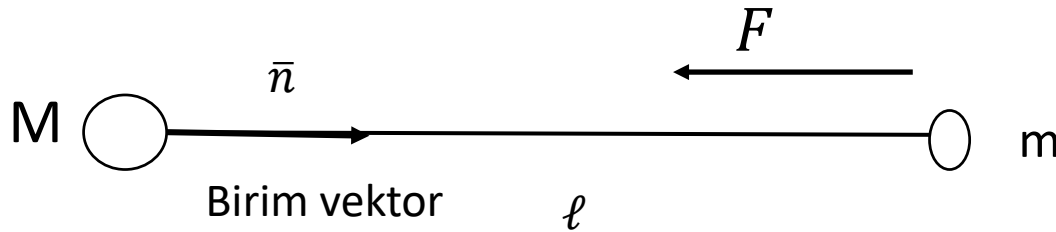
**Kaynaklar:**

Fiziksel Jeodezi, Teori ve Uygulama, Alpay Abbak, 2019, Atlas akademi yayınevi  
Hofmann-Wellenhof, B. ve Moritz, H., (2006). Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien-Newyork.

**Dersin değerlendirilmesi:** 1 vize (%40) 1 Final (%60)

# Çekim kuvveti ve Çekim ivmesi

- Newton'un evrensel çekim yasasına göre, kütleleri  $M$  ve  $m$ , aralarındaki mesafe  $\ell$  olan iki noktasal cisim birbirlerini, kütlelerinin çarpımı ile doğru orantılı, aralarındaki mesafenin karesi ile ters orantılı olacak şekilde, bu iki kütleli birleştiren çizgi doğrultusundaki bir  $F$  kuvveti ile çeker.



- Çekim kuvveti vektörü,  $\underline{F}$

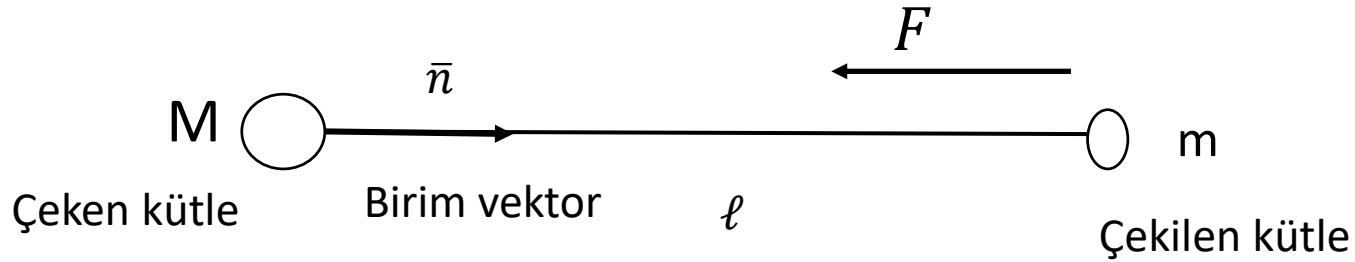
$$\underline{F} = \frac{GMm}{\ell^2} \cdot \bar{n} \quad (1)$$

Burada

$G$ , evrensel çekim sabitidir;  $G = 6.67259 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

# Çekim kuvveti ve Çekim ivmesi

- Kütlelerden ve bu kütlelerin aralarındaki uzaklıktan bağımsız olarak , iki nokta kütle birbirine aynı oranda çekim kuvveti uygular.



- $F$  bu iki nokta kütle arasındaki çekim kuvveti vektörünün büyüklüğü olmak üzere aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$F = \frac{GM m}{\ell^2}$$

# Çekim ivmesi

- Çekim ivmesi bir cismin her bir birim kutlesine uygulanan çekim kuvvetidir.
- Newtonun 2. hareket yasasına göre
- $\underline{F} = m\underline{a}$  (2)
- M kutlesinin m kutlesine uyguladığı çekim kuvveti dışında herhangi bir kuvvet olmaması durumunda, (2) numaralı eşitlik aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

- $\underline{\bar{F}} = m\underline{\bar{g}}$  (3)

- (1) ve (3) numaralı eşitlikler karşılaştırıldığında,

$$\underline{F} = m\underline{\bar{g}} = \frac{GM m}{\ell^2} \cdot \underline{\bar{n}}$$

- çekim ivmesinin vektörel ifadesi elde edilir

$$\underline{g} = \frac{GM}{\ell^2} \underline{n}$$

# Çekim ivmesi

- Çekim ivmesinin birimi,  $m/s^2$  ya da  $cm/s^2$ 'dir. Galileo'nun anısına  $cm/s^2$  birimine "Gal" denir:

$$1 \text{ cm/s}^2 = 1 \text{ Gal}$$

$$1 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ Gal}$$

- Bununla birlikte, ivmedeki küçük değişimleri anlatabilmek için aşağıdaki birimler de oldukça sık kullanılır:

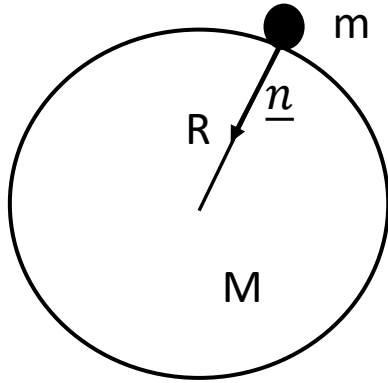
$$1 \text{ Gal} = 1000 \text{ mGal} = 10^6 \mu\text{Gal}$$

Cekim ivmesi vektorunun buyuklugu olan cekim ivmesi asagidaki sekilde ifade edilir

$$g = \frac{GM}{\ell^2}$$

# Çekim ivmesi

- Yeryuvarını homojen yoğunluklu bir küre olarak kabul edersek, küreden kaynaklı çekim kuvveti, kürenin merkezinde bulunan aynı kütleye sahip bir nokta kaynağına ile aynıdır.
- Eger yeryuvarını nokta kütle olarak düşünürsek (M)



R: yeryuvari merkezinden  
nokta cisme olan uzaklik  
M: yeryuvarinin kutlesi

$$\bar{g} = \frac{GM}{R^2} \cdot \bar{n}$$

$$R=6371 \text{ km} \text{ ve } M=5.96 \times 10^{24} \text{ kg}$$

- Yeryuzu uzerinde duran bir cisme etki eden cekim kuvveti

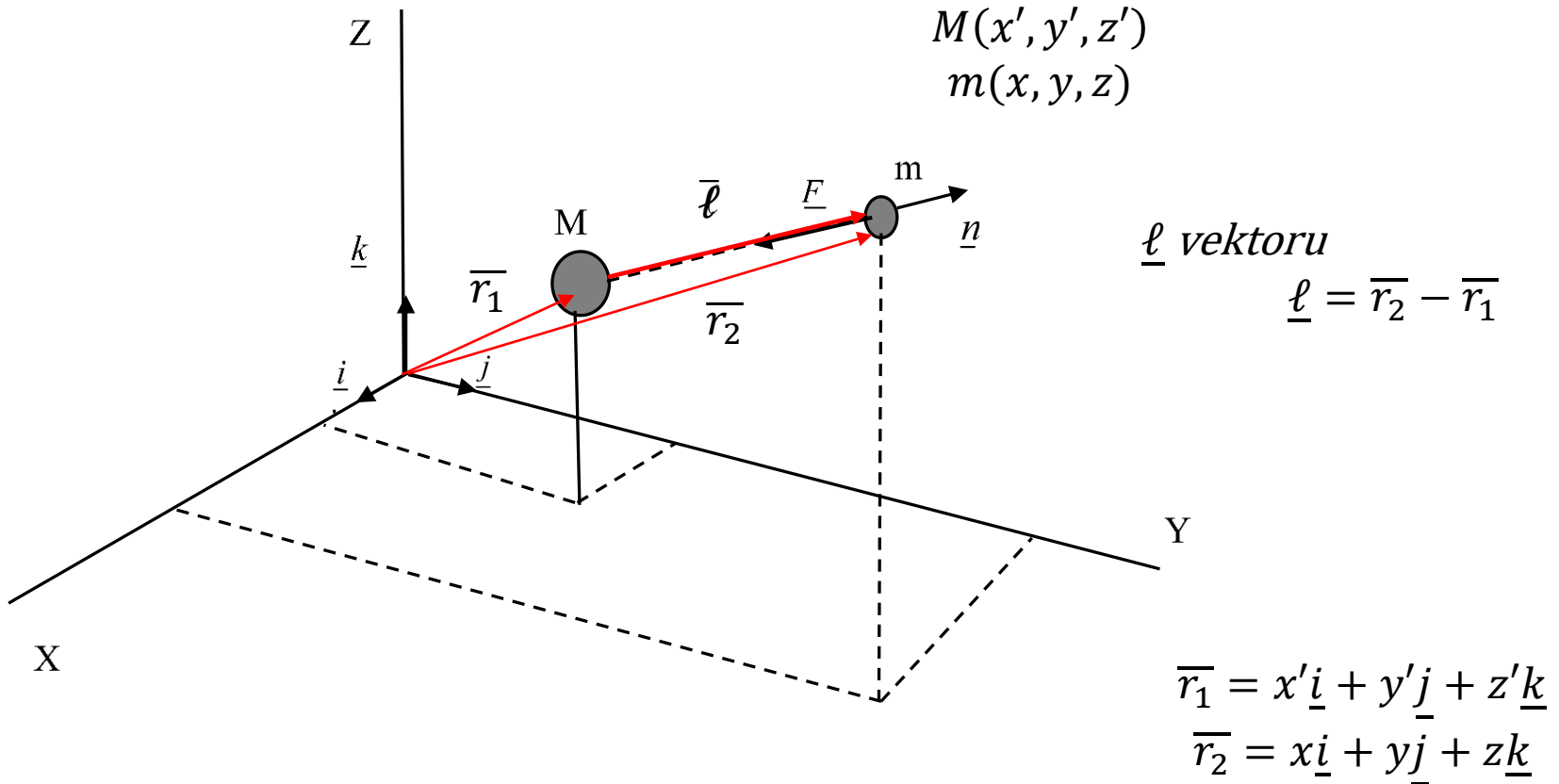
$$\bar{g} \approx 9.8 \text{ m} / \text{s}^2 \cdot \bar{n}$$

- Ya da

$$g \approx 9.8 \text{ m} / \text{s}^2$$

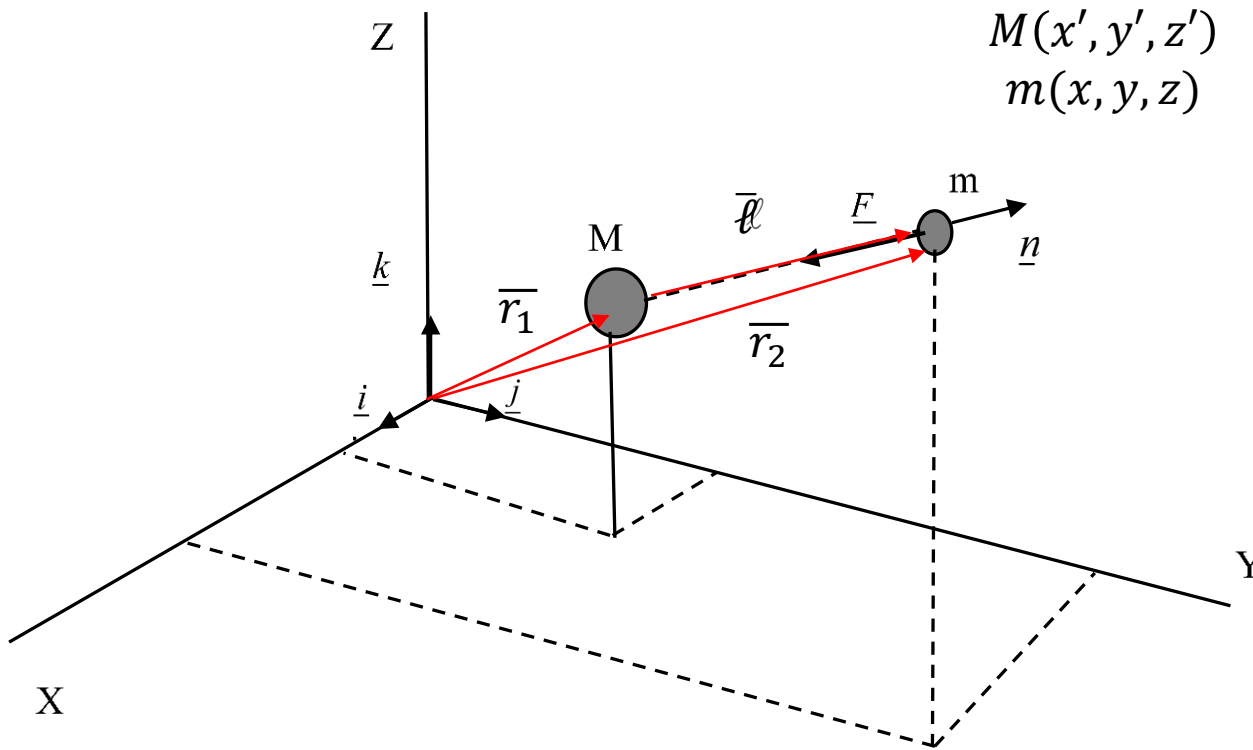
# Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi

- Kuvvet, yönü ve büyüklüğü (uzunluğu) olan bir vektördür. Çekim kuvvetinin vektörel ifadesini çıkarmak için çeken ve çekilen noktaları bir xyz dik koordinat sisteminde düşünelim: Çeken ve çekilen noktaların koordinatları aşağıdaki şekilde gösterilirse,



# Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi

- $\underline{\ell}$  vektörü
- $\underline{\ell} = \underline{\overline{r}}_2 - \underline{\overline{r}}_1 = (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) - (x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k})$
- $\underline{\ell} = (x - x')\underline{i} + (y - y')\underline{j} + (z - z')\underline{k}$



$\underline{n}$  birim vektörü

$$\underline{n} = \frac{\underline{\ell}}{\ell}$$

$$\frac{\underline{F}}{F} = -\underline{n}$$

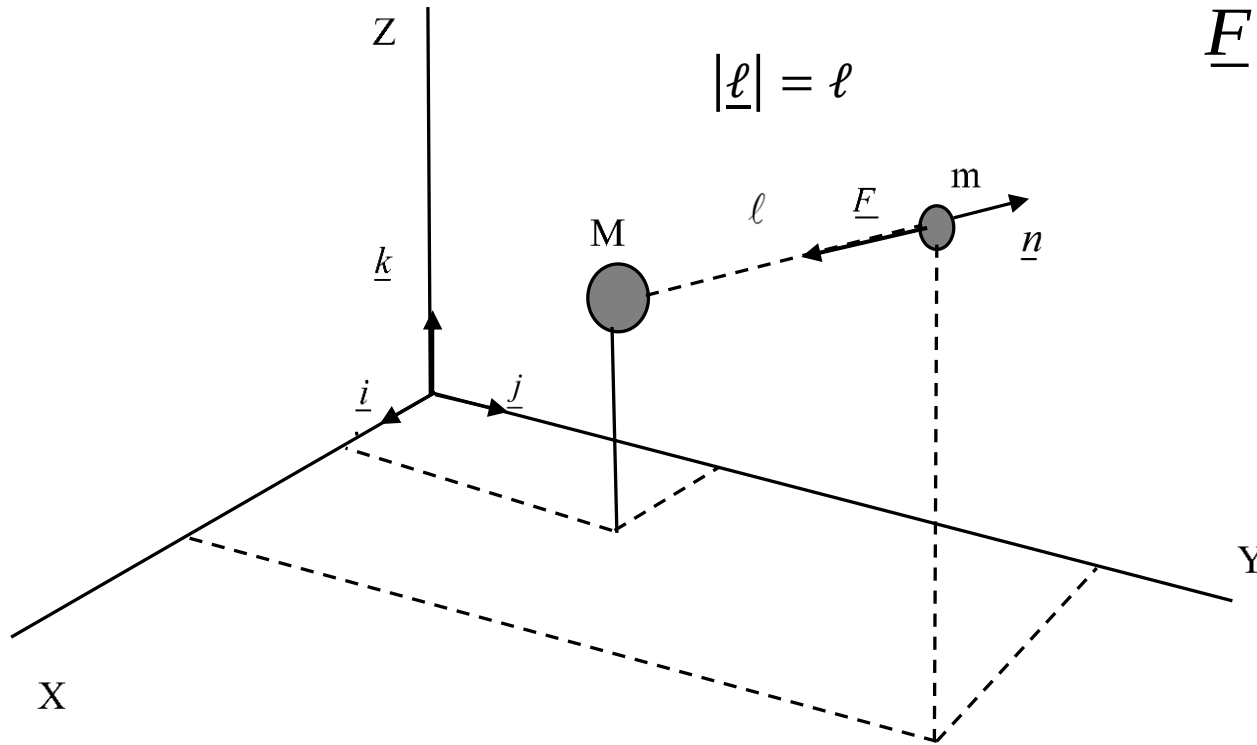
$$\underline{F} = -F\underline{n}$$

# Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi

- M ve m'nin konum vektörü  $\underline{\ell}$  ve çekim kuvveti  $\underline{F}$  birim vektörler cinsinden aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$\underline{F} = -F \frac{\underline{\ell}}{\ell}$$



- M ve m nokta kütleleri arasındaki uzaklık  $\ell$

$$\ell = |\underline{\ell}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

- ise çekim kuvvetinin vektörel ifadesi

- $$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} \quad (4)$$

- Seklinde ifade edilir. Buradan birim vektör

- $$\underline{n} = \frac{\underline{\ell}}{\ell} = \frac{(x - x')\underline{i} + (y' - y)\underline{j} + (z' - z)\underline{k}}{\ell}$$

- İfadesini aşağıda yerine yazarsak

$$\underline{F} = -F\underline{n} = -F \frac{\ell}{\ell} = \left[ \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(x - x')}{\ell} \right) \underline{i} + \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(y - y')}{\ell} \right) \underline{j} + \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(z - z')}{\ell} \right) \underline{k} \right] \quad (5)$$

- (4) ile (5) ifadesi karşılaştırılırsa

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} = \left[ \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(x - x')}{\ell} \right) \underline{i} + \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(y - y')}{\ell} \right) \underline{j} + \left( -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(z - z')}{\ell} \right) \underline{k} \right]$$

# Çekim Kuvvetinin Vektörel İfadesi

- Çekim kuvvetinin bileşenleri

$$F_x = -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(x - x')}{\ell} \quad F_y = -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(y - y')}{\ell} \quad F_z = -\frac{GMm}{\ell^2} \frac{(z - z')}{\ell}$$

- Çekim ivmesinin vektörel ifadesi

$$\underline{g} = \frac{GM}{\ell^2} \underline{n}$$

- Açık şekilde yazılırsa

$$\bar{g} = \left[ \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(x - x')}{\ell} \right) \underline{i} + \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(y - y')}{\ell} \right) \underline{j} + \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(z - z')}{\ell} \right) \underline{k} \right]$$

- Çekim ivmesinin bileşenleri,  $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z)$  olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir

- $$g_x = -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(x - x')}{\ell} \quad g_y = -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(y - y')}{\ell} \quad g_z = -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(z - z')}{\ell}$$

- **Örnek:** Çekim ivmesi bileşenlerini kullanarak,  $g$  çekim kuvveti büyüklüğünü elde ediniz.
- $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z)$  olmak üzere, bu kuvvetin uzunluğu,  $g$  çekim ivmesi büyüklüğünü verir:

$$\bar{g} = \left[ \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(x-x')}{\ell} \right) \underline{i} + \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(y-y')}{\ell} \right) \underline{j} + \left( -\frac{GM}{\ell^2} \frac{(z-z')}{\ell} \right) \underline{k} \right]$$

- Yukarıda verilen çekim ivmesi bileşenleri kullanılarak

$$g = |\bar{g}| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

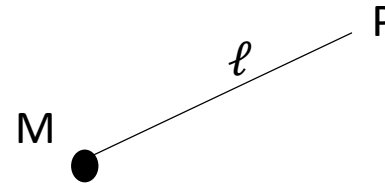
- Çekim ivmesinin büyüklüğü aşağıdaki biçimde elde edilir

$$g = |\bar{g}| = \frac{GM}{\ell^3} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \frac{GM}{\ell^2}$$

# Çekim Potansiyeli

- M kütleli cismin  $\ell$  kadar uzaktaki bir noktada meydana getirdiği çekim potansiyeli,

$$V = \frac{GM}{\ell}$$



- ile tanımlanır. Çekim potansiyeli,
- (1) skaler bir fonksiyondur,
- (2) x,y ve z'ye göre kısmi türevleri çekim ivmesinin bileşenlerini verir,
- Çekim potansiyeli  $\underline{\nabla}V = \underline{\bar{g}}$  eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanır. Burada  $\underline{\nabla}$  nabla ya da gradient operatörü olarak adlandırılır.
- (3) sonsuzda sıfıra gider.
- (4) potansiyelin birimi  $m^2/s^2$

## Çekim kuvveti ile potansiyel arasındaki ilişki

- İkinci özelliği ispat edelim.  $\frac{1}{\ell}$  Fonksiyonunun  $x'$ 'e göre türevi

$$\frac{\partial(1/\ell)}{\partial x} = \frac{\partial(1/\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2})}{\partial x} = \frac{-2(x-x')}{2\ell} \frac{1}{\ell^2} = \frac{-(x-x')}{\ell^3}$$

- Elde edilir. Bu eşitlik  $g_x$  bileşenine aittir.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{GM}{\ell^3}(x-x')$$

- $y$  ve  $z$  için de benzer şekilde türevler alındığında ilgili bileşenler elde edilir. Böylece  $g_y$  ve  $g_z$  bileşenleri

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{GM}{\ell^3}(y-y') \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{GM}{\ell^3}(z-z')$$

- Çekim ivmesinin bileşenleri

- $$g_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad g_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad g_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

# Çekim kuvveti ile potansiyel arasındaki ilişki

- Kartezyen koordinat sisteminde “nabla ya da gradyent” operatorunu

- $gradyent = \underline{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$  ya da birim vektorler cinsinden  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

- seklinde tanımlarsak, çekim ivmesini potansiyelin gradyenti cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\underline{\nabla} V = \underline{g}$$

$$\underline{g} = (g_x, g_y, g_z) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

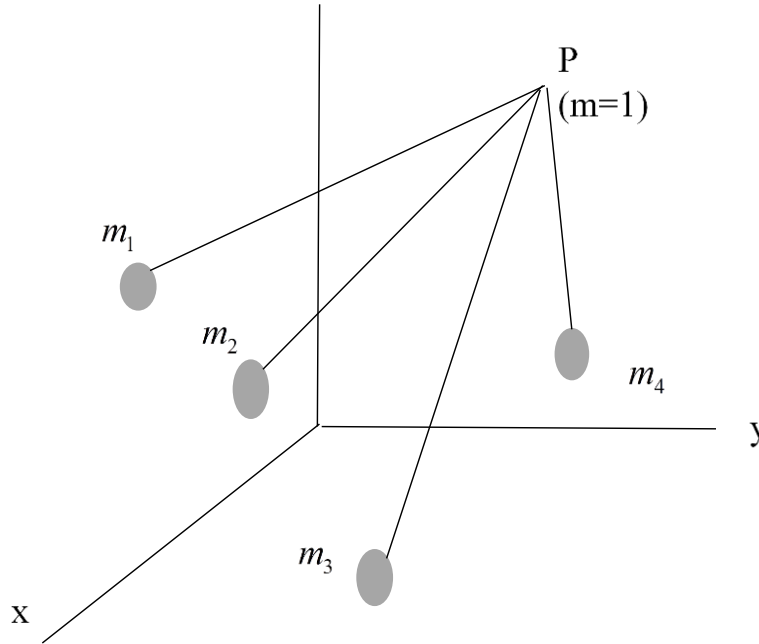
- Potansiyelin gradyenti bize çekim kuvvetini verir.

$$\underline{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{GM}{\ell^3} (x - x') \\ -\frac{GM}{\ell^3} (y - y') \\ -\frac{GM}{\ell^3} (z - z') \end{pmatrix}$$

# Nokta Kümesinin Çekim Potansiyeli

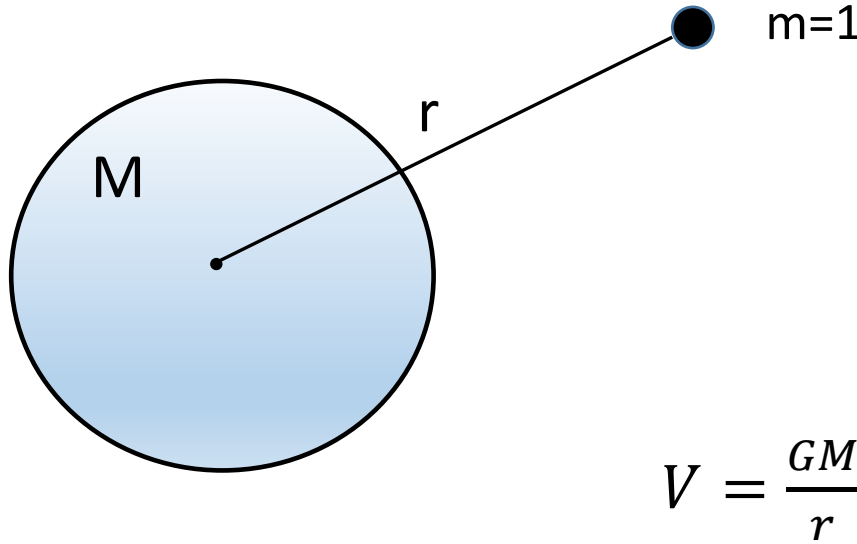
- $m_1, m_2, \dots, m_n$  gibi nokta kitlelerden oluşan bir sistem söz konusu ise; bu sistemin potansiyeli,  $n$  adet nokta kitle nedeniyle  $P$  ( $m=1$ ) noktasındaki çekim potansiyeli, bu nokta kitlelerin potansiyellerinin toplamına esittir.

$$V_P = G \sum_j \frac{m_j}{\ell_j} \Rightarrow V_P = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{Gm_1}{\ell_1} + \frac{Gm_2}{\ell_2} + \dots + \frac{Gm_j}{\ell_j}$$



# Homojen yoğunluklu kürenin çekim potansiyeli

- şekilde gösterilen  $M$  kütleli homojen yoğunluklu bir küre kabuğunun merkezinden  $r$  kadar uzakta yer alan  $m=1$  noktasındaki çekim potansiyeli



$$V = \frac{GM}{r}$$

Yani  $M$  kütleli homojen yoğunluklu bir kürenin çekim potansiyelini verir ve onun da tüm kütlesi merkezde toplanmış bir nokta gibi davranacağını ifade eder.

- **Örnek:** Yeryuvarının a) fiziksel yeryüzündeki bir cismin, b) yerden 500 ve 20000 km uzaktaki iki yapay uydunun her bir birim kütlesine uygulamış olduğu (anlık) çekim kuvvetini yaklaşık olarak Gal ve m/s<sup>2</sup> birimlerinde hesaplayınız. Sonuçları karşılaştırınız. (Yeryuvarı yarıçapını  $R=6371009 \cdot 10^2$  cm alınız.)
- Yeryuvarı küre olarak alındığında, merkezinden r kadar uzaktaki bir cismin her bir birim kütlesi için geçerli çekim kuvveti
- $g = \frac{GM}{r^2}$
- jeosentrik çekim sabiti  $GM=3,986005 \cdot 10^{20} \text{cm}^3/\text{s}^2$
- a) Fiziksel yeryüzündeki bir cisim için  $r=R$  alınabilir. Buna göre, ilgili cismin her bir birim kütlesine uygulanan çekim kuvveti (çekim ivmesi),
- $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{cm}^3/\text{s}^2}{(6371009 \cdot 10^2)^2} = 982 \text{Gal} = 9,82 \text{m/s}^2$

- İlk uydunun yeryuvarı merkezinden uzaklığı  $r=R+500 \text{ km}=6871009*10^2 \text{ cm}$ , ikinci uydunun ise  $r=R+20000 \text{ km}=26371009*10^2 \text{ cm}$ 'dir. Buna göre, ilgili uydulardaki birim kütleye uygulanan çekim kuvvetleri,

- $$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2}{(6871009*10^2)^2} = 844 \text{ Gal} = 8,44 \text{ m/s}^2$$

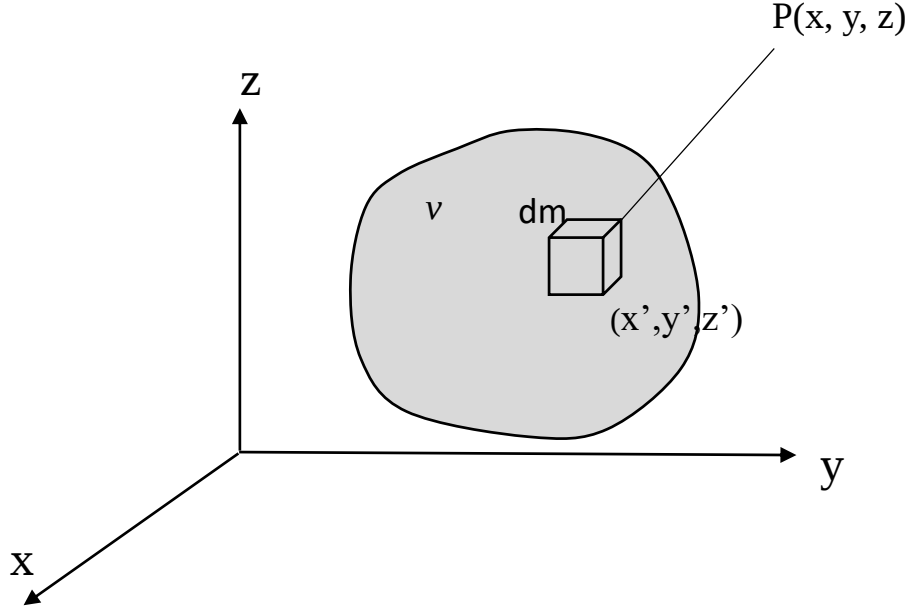
- ve

- $$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{3,986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{s}^2}{(26371009*10^2)^2} = 57 \text{ Gal} = 0,57 \text{ m/s}^2$$

- şeklinde hesaplanır. Kurenin merkezinden uzaklaştıkça yeryuvarının çekim kuvvetinin azaldığı görülmektedir. Bu örnekte ele alınan ilk uydu alçak yörüngeli (LEO) bir uydu, diğeri ise bir GNSS uydusudur. Alçak yörüngeli uydudaki ivme yeryüzündeki ivmenin %86'sına, diğeri ise %6'sına denk gelmektedir.
- Bu nedenle uzaydan yeryuvarındaki ivmenin (veya değişimlerinin) izlenmesinde LEO uyduları kullanılır.

# Dolu Bir Cismin Çekim Potansiyeli

- Diferansiyel anlamda küçük  $dm$  kütleli parçacıklardan oluşan  $v$  hacimli dolu bir cisim nedeniyle  $m=1$  noktasında meydana gelen çekim potansiyelini hesaplamak için parçacıkların her birinin çekim potansiyellerinin toplamını düşünmek gerekir; Ancak bu aynı zamanda sonsuz sayıda kütle çekim potansiyelinin toplamı anlamına gelir. Bu toplam işlemi yapmak mümkün olmadığından, söz konusu dolu cismin potansiyeli üçlü integral ile ifade edilir.



- Şimdi dolu cismin  $\rho$ =sabit yoğunluklu olduğu düşünölsün.
- “KÜTLE=Yoğunluk\*Hacim” ilişkisi nedeniyle her bir  $dm$  kütlesi için

$$dm = \rho * dv$$

yazılır. Burada  $dv$ ,  $dm$  parçacığının hacmidir. Böylece

$$V_P = G \iiint_v \frac{dm}{\ell} = G \iiint_v \frac{\rho}{\ell} dv$$

Jeodezide çeken kitleler yerin kitleleri, çekilen yeryüzünde ve uzaydaki noktalardır.

Buna göre çekilen parçacığın koordinatları  $x, y, z$  ve çeken noktanın koordinatları,  $x', y', z'$  ise dolu bir cismin potansiyeli aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$V_P(x, y, z) = G \iiint_v \frac{\rho}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz'$$

# Laplace Denklemi ve Harmonik Fonksiyon

- $m=1$   $(x,y,z)$  noktasının çeken cismin dışında olması durumunda  $V$  potansiyelinin ikinci türevleri ile aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

- Burada  $\Delta$  Laplace operatörü olarak adlandırılır.
- Buna **Laplace denklemi** denir. Bir fonksiyon Laplace denklemini sağlıyorsa o fonksiyona **harmonik fonksiyon** denir
- Çekilen noktanın cismin içinde olması durumunda Poisson denklemini sağlar

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G \rho$$

# Laplace Denklemi ve Harmonik Fonksiyon

- Laplace denkleminin çözümlerine matematikte Harmonik fonksiyonlar denir. Yani bu denklemi sağlayan  $V$  nin bulunması ancak harmonik fonksiyonlar yardımıyla olur.
- Bir fonksiyon harmonikse,
- Süreklidir; her mertebeden türevi vardır.
- Taylor serisine açılabilir. Bir başka deyişle, fonksiyon **analitik** olup, bağımsız terimlerin toplamı biçiminde yazılabilir.
- Harmonik fonksiyona en basit örnek  $1/\ell$  fonksiyonudur.
- $\Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) = 0$
- oldugunu ispatlayalım. Burada  $\ell = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

- $1/\ell$  fonksiyona Laplace denklemi uygulanırsa
- Fonksiyonunun  $x'$ e göre türevi

$$\frac{\partial(1/\ell)}{\partial x} = \frac{\partial(1/\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2})}{\partial x} = \frac{-2(x-x')}{2\ell} \frac{1}{\ell^2} = \frac{-(x-x')}{\ell^3}$$

- $x'$ e göre bir kez daha türev alınırsa,

$$\frac{\partial^2(1/\ell)}{\partial x^2} = \frac{1}{\ell^3} - \frac{3(x-x')^2}{\ell^5}$$

- Aynı şekilde  $y$  ve  $z'$ ye göre ikinci kısmi türevler elde edilir. Kısmi türevler Laplace denkleminde yerine yazılırsa

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

- Laplace denklemini sağladığı görülür

$$\Delta\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{3}{\ell^3} - \frac{3[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{\ell^5} = 0$$

- Nokta kitle potansiyeline  $V = \frac{GM}{\ell}$  Laplace denklemi uygulanırsa
- $\Delta V = \Delta\left(\frac{GM}{\ell}\right) = GM \Delta\left(\frac{1}{\ell}\right) = GM(0) = 0$  olduğu görülür
- Dolu cismin potansiyel fonksiyonunun paydasında  $1/\ell$  olduğu için

$$\Delta V = G \Delta \iiint_V \frac{\rho dv}{\ell} = G \iiint_V \rho \Delta\left(\frac{1}{\ell}\right) dv = 0$$

- bunun da Laplace denklemini sağladığı görülür.

# Sınır Değer Problemleri

Amaç; sınır değerlerin bir fonksiyonu olarak verilen  $S$  yüzeyinin içindeki veya dışındaki bir alanda, harmonik potansiyel fonksiyonunu ( $V$ ) tespit etmektir

- **Dirichlet problemi (birinci sınır değeri problemi)**: Bir  $S$  kapalı yüzeyi üzerinde kendi sınır değerleri verilen  $V$  harmonik fonksiyonunun hesaplanmasına dirichlet problemi veya potansiyel teorisinin birinci sınır değeri problemi denir.
- **İkinci sınır değeri problemi**: Bir  $S$  yüzeyi üzerinde kendisinin normal doğrultusundaki türevi  $\frac{\partial V}{\partial n}$  verilen harmonik fonksiyonun kendisinin ( $V(x,y,z)=?$ ) bulunmasıdır.
- **Üçüncü sınır değeri problemi**: Bir  $S$  yüzeyi üzerinde kendi değeri ile normal türevinin lineer kombinasyonu  $V + \frac{\partial V}{\partial n}$  verilen harmonik fonksiyonun kendisinin ( $V(x,y,z)=?$ ) bulunmasıdır.

# Laplace denkleminin küresel koordinatlarla ifadesi ve Küresel Harmonik Açınım

- Laplace diferansiyel denkleminin küresel koordinatlar cinsinden

$$\Delta V = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

- Yukarıdaki Laplace diferansiyel denkleminin çözümünden V'nin küresel harmonik açılımı çeken kütlenin dışında*

- $$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (6)$$

- Elde edilir. Burada
- $P_{nm}(\cos \theta)$  Legendre fonksiyonu,
- nmax: maksimum açınım derecesi,
- n: küresel harmonik modelin derecesi,
- m küresel harmonik modelin sırası,
- $a_{nm}, b_{nm}$  küresel harmonik modelin katsayılarıdır.

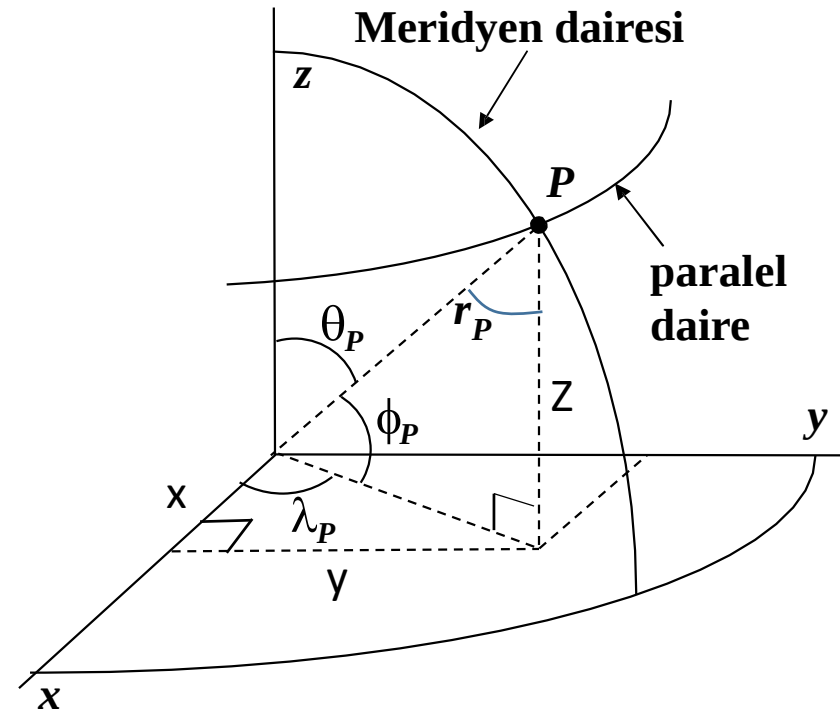


# Küresel ve dik koordinat sistemi arasındaki ilişki

- $(r_P, \phi_P, \lambda_P)$ : P noktasının küresel koordinatları

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \lambda \\ r \sin \theta \sin \lambda \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$$



# Çekim Potansiyelinin küresel harmonik açılımı

(6) numaralı esitlik kuresel harmonik katsayilar birimsiz olacak sekilde R ekvatorial yarıcapli bir kurenin yarıcapı ile ölceklendirilirse asagidaki esitlik elde edilir

- $V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{nmax} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \quad (7)$
- (7) numaralı eşitlik, a yarıçaplı bir küre için ifade edilirse (R=a)
- $V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{nmax} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (C_{nm}^{(a)} \cos m\lambda + S_{nm}^{(a)} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)$
- Burada  $C_{nm}^{(a)}, S_{nm}^{(a)}$ : birimsiz kuresel harmonik katsayilar ile  $C_{nm}, S_{nm}$  katsayilari arasında asagidaki sekilde iliskilendirilir.
- $C_{nm}^{(a)} = \frac{a}{GM} \left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} C_{nm} \quad ; \quad S_{nm}^{(a)} = \frac{a}{GM} \left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} S_{nm}$

# Küresel yüzey harmonikleri

(7) Nolu esitlikte yüzey harmonik fonksiyonu

$$\bullet V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \underbrace{\sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)}_{Y_n(\theta, \lambda)}$$

- $Y_n(\theta, \lambda)$  asagidaki bicimde ifade edilir
- $Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$
- Yukaridaki eşitligi asagidaki bicimde de ifade edilebilir
- $Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n C_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + S_{nm} K_{nm}(\theta, \lambda)$
- Bu esitlikte  $R_{nm}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta)$
- $K_{nm}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda P_{nm}(\cos \theta)$
- $R_{nm}(\theta, \lambda)$  ve  $K_{nm}(\theta, \lambda)$  n. derece ve m. siradan yüzey harmonikleri olarak adlandırilir

# Küresel yüzey harmonikleri

Örneğin; 0. derece yüzey harmonik fonksiyonu

- $Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)$
- $Y_0(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{00} \cos 0\lambda + S_{00} \sin 0\lambda) P_{00}(\cos\theta)$
- $Y_0(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (C_{00} \cos 0\lambda + S_{00} \sin 0\lambda) P_{00}(\cos\theta)$
- Yada 0. derece ve 0. sıradan yüzey harmonikleri
- $R_{00}(\theta, \lambda) = \cos 0\lambda P_{00}(\cos\theta)$
- $K_{00}(\theta, \lambda) = \sin 0\lambda P_{00}(\cos\theta)$
- 1. dereceden yüzey harmonikleri
- $Y_1(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^1 (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)$
- $Y_1(\theta, \lambda) = (C_{10} \cos 0\lambda + S_{10} \sin 0\lambda) P_{10}(\cos\theta) + (C_{11} \cos 1\lambda + S_{11} \sin 1\lambda) P_{11}(\cos\theta)$
- Ya da 1. derece 1. sıradan yüzey harmonikleri
- $R_{11}(\theta, \lambda) = \cos 1\lambda P_{11}(\cos\theta); K_{11}(\theta, \lambda) = \sin 1\lambda P_{11}(\cos\theta)$

# Legendre fonksiyonlarının hesabi

Bütünleşik Legendre fonksiyonları,  $P_{nm}(t)$  ya da Legendre polinomları  $P_n(t)$  asagidaki ifade ile hesaplanabilir.

$$P_{nm}(t) = 2^{-n}(1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-m-2k)!} t^{n-m-2k}$$

$$r = \frac{n-m}{2} \text{ eger } n-m \text{ çift ise}$$

$$r = \frac{n-m-1}{2} \text{ eger } n-m \text{ tek ise}$$

$m=0$  olması durumunda bütünleşik Legendre fonksiyonu Legendre polinomu olarak adlandırılır ve  $P_n(t)$  ile gösterilir. Örneğin 0. ve 1.derece Legendre polinomu

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t = \cos\theta \quad \text{burada } t = \cos\theta$$

$$P_{1,1}(t) = \sin\theta = \sqrt{1-t^2}$$

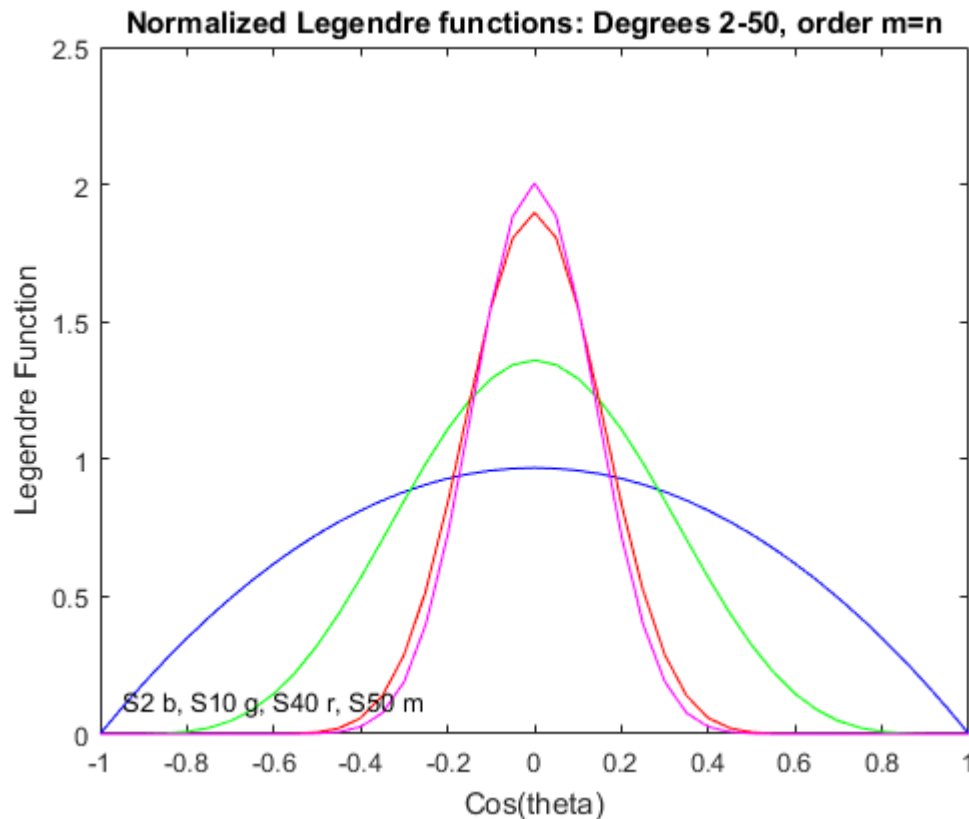
Hesap kolaylığı açısından, Legendre fonksiyonlarının hesabi için yinelemeli bağıntılar

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) \quad n \geq 2, m = 0$$

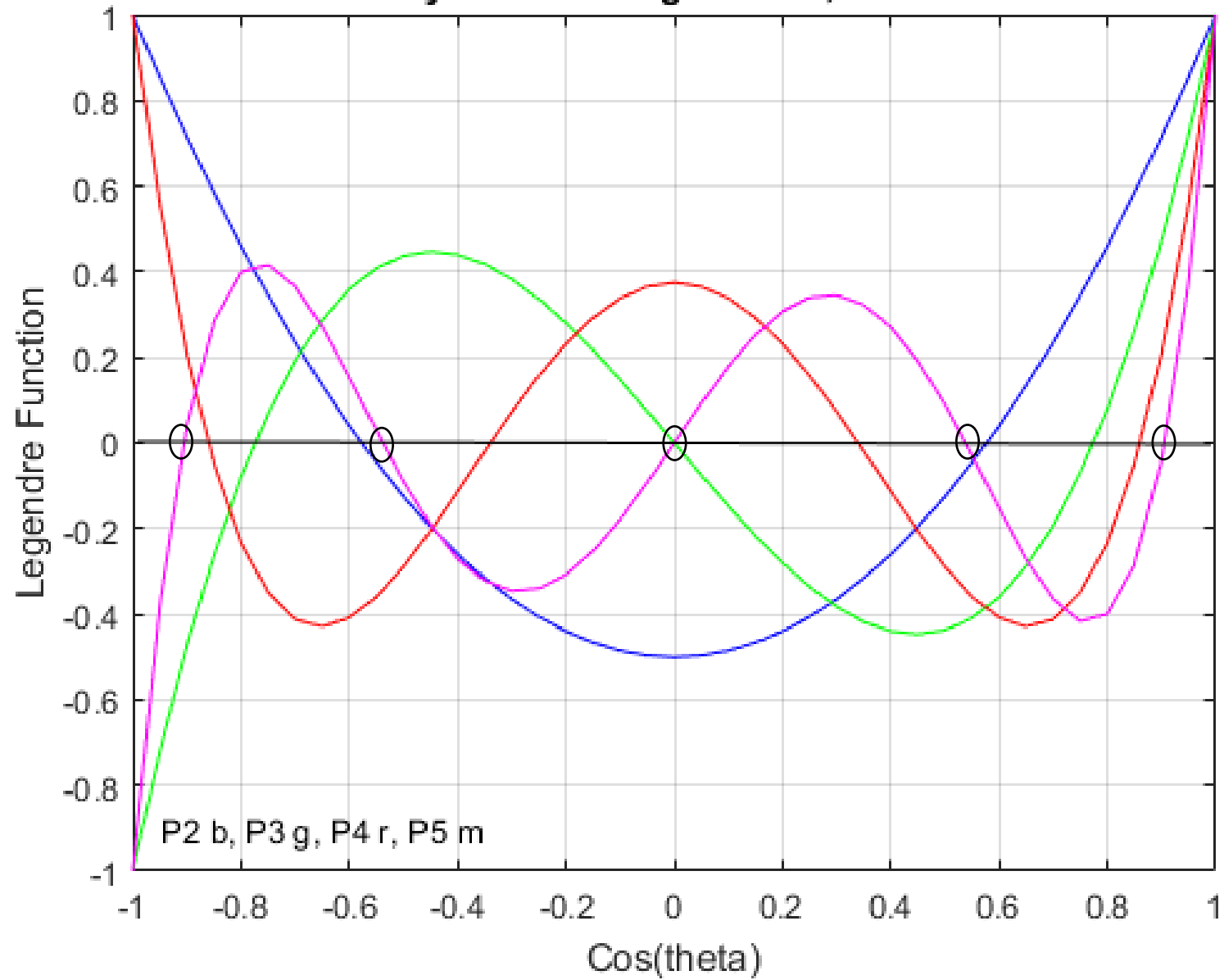
$$P_{nm}(t) = P_{(n-2)m}(t) + (2n-1)\sqrt{1-t^2} P_{(n-1)(m-1)}(t) \quad n \geq 2, m \geq 1$$

# Bütünleşik Legendre Polinomunun özellikleri

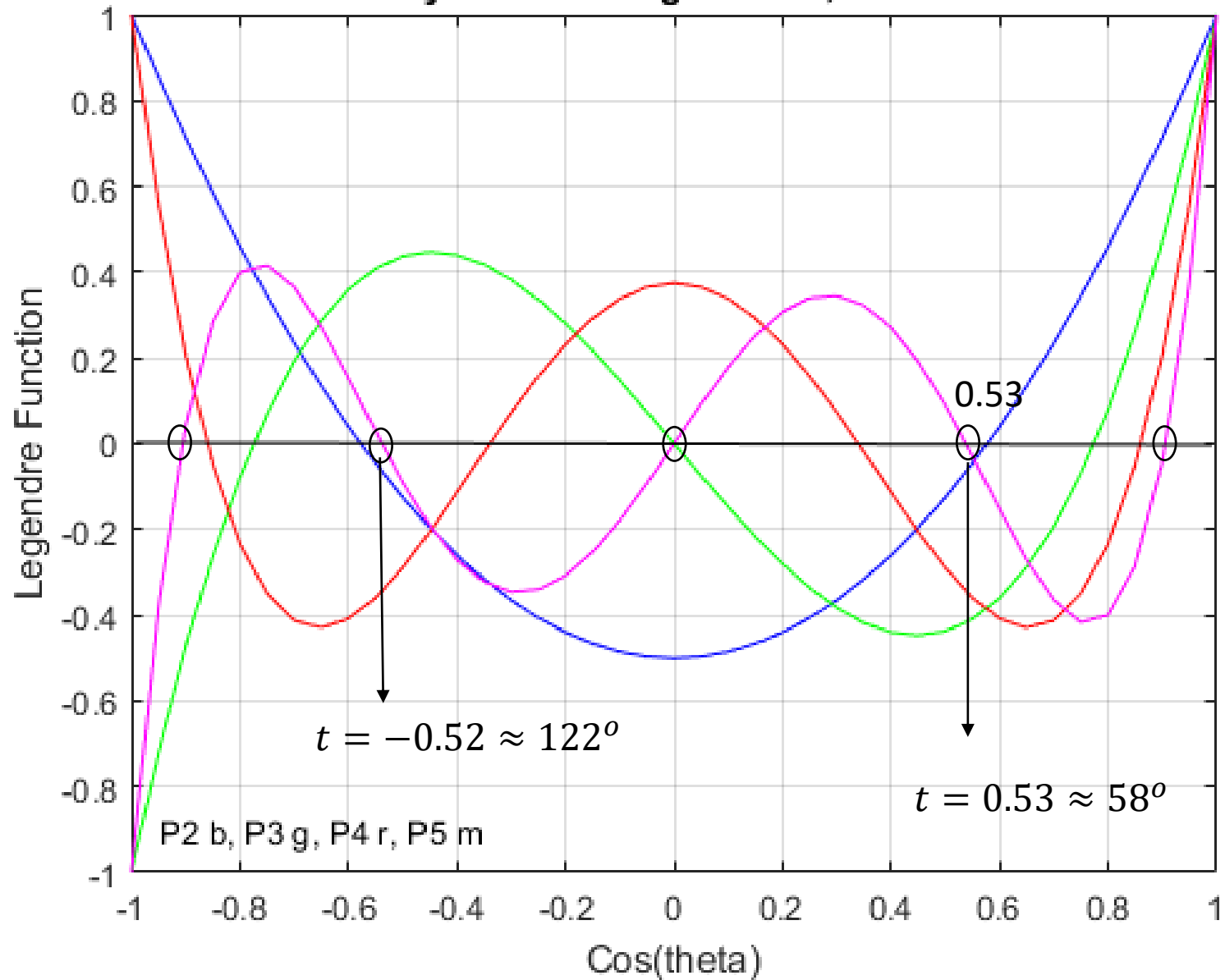
- $P_{nm}(t) = 2^{-n}(1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}$
- $r = \frac{n-m}{2}$  eger  $n-m$  çift ise ;  $r = \frac{n-m-1}{2}$  eger  $n-m$  tek ise
- Burada  $(1-t^2)^{m/2} = \sin^m \theta$
- $m=n$  olması durumunda
- $P_{nn}(t) = 2^{-n}(1-t^2)^{n/2} \frac{2n!}{n!} = \frac{2n!}{2^n n!} \sin^n \theta \geq 0$



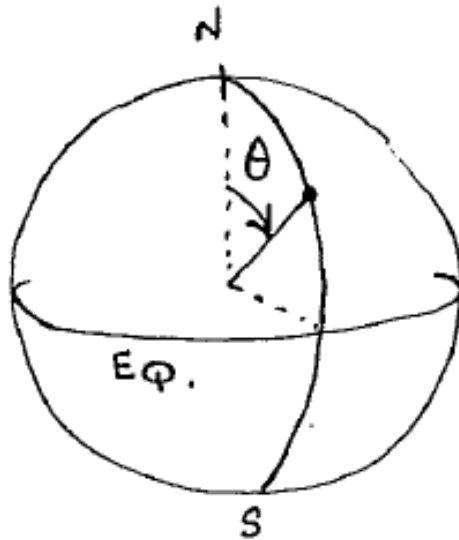
Polynomials: Degrees 2-5; Order 0



# Polynomials: Degrees 2-5; Order 0



- 5. derece Legendre polinomunun sıfır aldığı değerler yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir.
- $\theta = 155.5, 122.0, 90, 58, 24.5$  derece



$$0 \leq \theta \leq 180$$

|                    |   |   |
|--------------------|---|---|
| $\theta = 0^\circ$ | } | + |
| 24.5               |   |   |
| 58                 | } | - |
| 90                 |   |   |
| 122                | } | + |
| 155.5              |   |   |
| $\theta = 180$     | } | - |

# Legendre fonksiyonlarının hesabı

**Normalize edilmiş** Legendre fonksiyonlarının hesabı

$$\bar{P}_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(t), & 0 < m \leq n \\ \sqrt{2n+1} P_{n0}(t), & m = 0 \end{cases}$$

$$n=0, m=0 \text{ için, } \bar{P}_0(t) = 1$$

$$n=1, m=0 \text{ için, } \bar{P}_1(t) = \sqrt{3}t$$

# Legendre fonksiyonlarının hesabi

$$t = \cos\theta$$

| n | m | $P_{nm}(t)$                 | $\overline{P_{nm}}(t)$                              |
|---|---|-----------------------------|-----------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 1                           | 1                                                   |
| 1 | 0 | t                           | $\sqrt{3}t$                                         |
| 1 | 1 | $\sqrt{1-t^2}$              | $\sqrt{3}\sin\theta$                                |
| 2 | 0 | $(3t^2 - 1)/2$              | $\sqrt{5}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$ |
| 2 | 1 | $3t\sqrt{1-t^2}$            | $\sqrt{\frac{5}{3}}\sin\theta\cos\theta$            |
| 2 | 2 | $3(1-t^2)$                  | $\sqrt{\frac{5}{12}}\sin^2\theta$                   |
| 3 | 0 | $(5t^3 - 3t)/2$             | $\sqrt{7}(5t^3 - 3t)/2$                             |
| 3 | 1 | $3/2(5t^2 - 1)\sqrt{1-t^2}$ | $\sqrt{\frac{7}{6}}P_{nm}(t)$                       |

# Legendre fonksiyonlarının hesabı

$$t = \cos\theta$$

| n | m | $P_{nm}(t)$                                                                 | $\overline{P_{nm}}(t)$           |
|---|---|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 3 | 2 | $15t - 15t^3$                                                               | $\sqrt{\frac{7}{60}} P_{nm}(t)$  |
| 3 | 3 | $15\sqrt{1-t^2}$                                                            | $\sqrt{\frac{7}{360}} P_{nm}(t)$ |
| 4 | 0 | $\frac{35t^4}{8} - \frac{30t^2}{8} + \frac{3}{8}$                           | $\sqrt{9} P_{nm}(t)$             |
| 5 | 0 | $\frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t$                         | $\sqrt{11} P_{50}$               |
| 6 | 0 | $\frac{693}{48}t^6 - \frac{945}{48}t^4 + \frac{315t^2}{48} - \frac{15}{48}$ | $\sqrt{13} P_{60}$               |
|   |   |                                                                             |                                  |
|   |   |                                                                             |                                  |
|   |   |                                                                             |                                  |

# Normalize edilmiş Küresel yüzey harmonikleri

Normalize edilmiş Legendre fonksiyonu ve normalize edilmiş küresel harmonik katsayılar ile, çekim potansiyelinin harmonik açılımı aşağıdaki şekilde ifade edilir. Normalize edilmiş küresel yüzey harmonik ya da yüzey harmonik fonksiyonu

$$\bullet V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \underbrace{\sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\cos\theta)}_{\overline{Y_n}(\theta, \lambda)}$$

•  $\overline{Y_n}(\theta, \lambda)$  aşağıdaki biçimde ifade edilir

$$\bullet \overline{Y_n}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\cos\theta) \quad (10)$$

• (10) eşitliği aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir

$$\bullet \overline{Y_n}(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n \overline{C_{nm}} \overline{R_{nm}}(\theta, \lambda) + \overline{S_{nm}} \overline{K_{nm}}(\theta, \lambda)$$

• Bu eşitlikte  $\overline{R_{nm}}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$

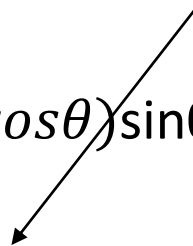
•  $\overline{K_{nm}}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$

•  $\overline{R_{nm}}(\theta, \lambda)$  ve  $\overline{K_{nm}}(\theta, \lambda)$  normalize edilmiş n. derece ve m. sıradan yüzey harmonikleri olarak adlandırılır

- *Ornegin*
- $\overline{R_{nm}}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$  ve  $\overline{K_{nm}}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$
- n=0 ve m=0 için
- $\overline{R_{00}}(\theta, \lambda) = \overline{P_0}(\cos\theta)$
- n=1 ve m=1 için
- $\overline{R_{11}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{11}}(\cos\theta)\cos\lambda$  ve  $\overline{K_{11}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{11}}(\cos\theta)\sin\lambda$
- n=1 ve m=0 için
- $\overline{R_{10}}(\theta, \lambda) = \overline{P_1}(\cos\theta)$
- n=5 ve m=2 için
- $\overline{R_{52}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{52}}(\cos\theta)\cos 2\lambda$  ve  $\overline{K_{52}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{52}}(\cos\theta)\sin 2\lambda$

# Yüzey harmoniklerinin sınıflandırılması

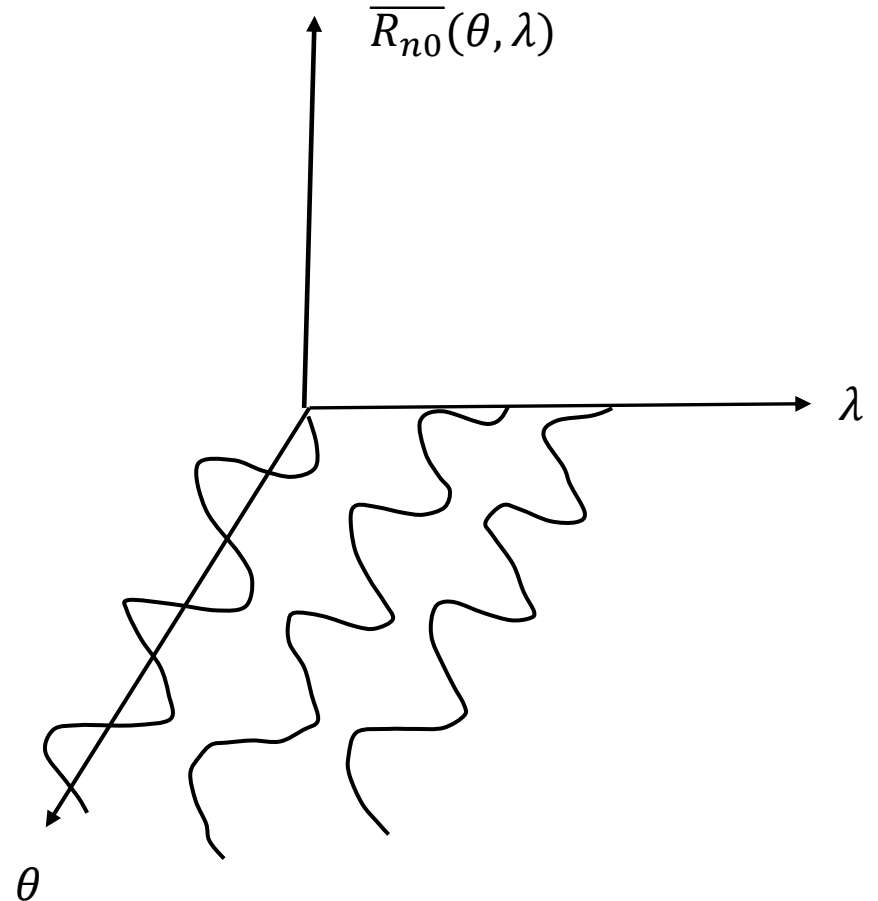
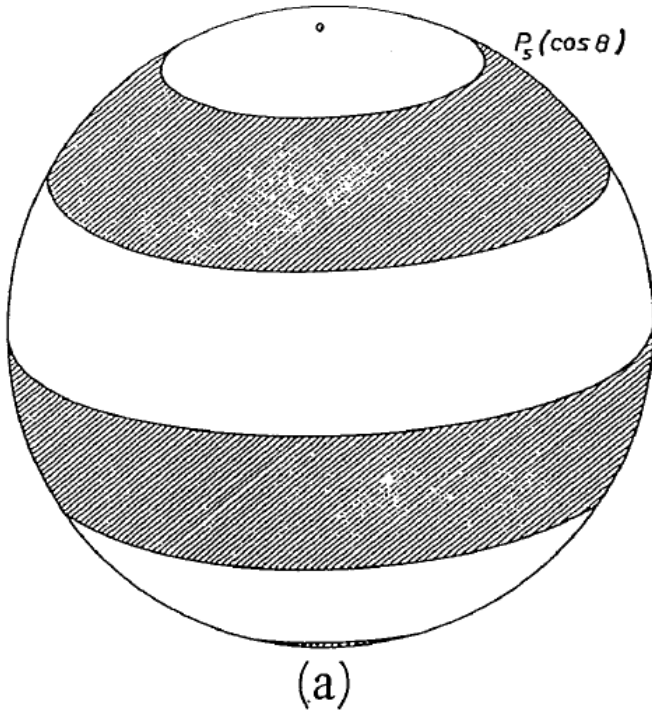
- **1. Zonal harmonics (kusak harmonikleri):**  $m=0$  olması durumunda yüzey harmonikleri kusak harmonikleri olarak adlandırılır. Kusak harmonikleri  $\lambda$  boylamina bağlı değildir.
- $n$ . derece ve  $m$ . dereceden yüzey harmonikleri
- $\overline{R_{nm}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{nm}}(\cos\theta)\cos\lambda$  ve  $\overline{K_{nm}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{nm}}(\cos\theta)\sin\lambda$
- $m=0$  için yüzey harmonikleri
- $\overline{R_{n0}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{n0}}(\cos\theta)\cos 0 \cdot \lambda$  ve  $\overline{K_{n0}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{n0}}(\cos\theta)\sin 0 \cdot \lambda$
- $\overline{R_{n0}}(\theta, \lambda) = \overline{P_{n0}}(\cos\theta)$
- Kusak harmonikleri kutup acisi  $\theta'$ 'ya bağlıdır.



0

# Yüzey harmoniklerinin sınıflandırılması

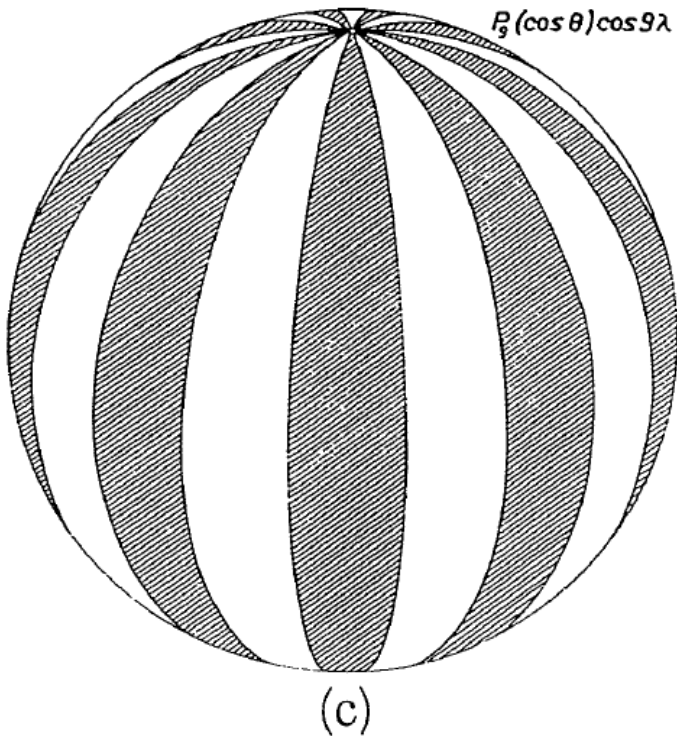
- **1. Kuşak harmonikleri (Zonal harmonics):**  $m=0$  olması durumunda yüzey harmonikleri kuşak harmonikleri olarak adlandırılır. Kuşak harmonikleri  $\lambda$  boylamına bağlı değildir.



- **2. Dilim harmonikleri(sectorial harmonics):**  $m=n$  olması durumunda küre artı ve eksi dilimlere bölünür. Bu harmoniklere dilim harmonikleri olarak adlandırılır.

- $\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \overline{P}_{nm}(\cos\theta) m \cos\lambda$  ve  $\overline{K}_{nm}(\theta, \lambda) = \overline{P}_{nm}(\cos\theta) m \sin\lambda$

- 



$$\downarrow$$

$$\overline{P}_{nn}(\cos\theta) \geq 0$$

$$\overline{R}_{nn}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda \overline{P}_{nn}(\cos\theta) \text{ ve}$$

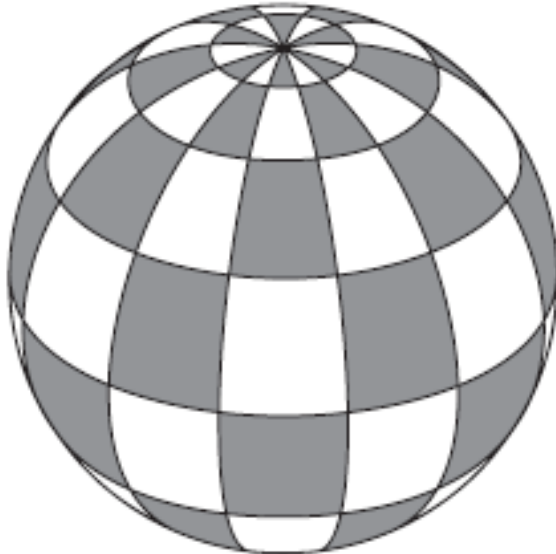
$$\overline{K}_{nn}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda \overline{P}_{nn}(\cos\theta)$$

- **3. Bölme harmonikleri:**  $m \neq n$  durumlarda yüzey harmonikleri küre yüzeyini bölmelere ayırır.  $0 < m < n$

- $\overline{R_{nm}}(\theta, \lambda) = \cos m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$  ve  $\overline{K_{nm}}(\theta, \lambda) = \sin m\lambda \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$

$$R_{12,6}(\theta, \lambda) = P_{12,6}(\cos\theta) \cos 6\lambda$$

$$P_{12,6}(\cos\vartheta) \cos 6\lambda$$



(b)

# Çekim Potansiyelinin küresel harmonik açılımı

- Çekim potansiyelinin küresel harmonik açılımını hatırlayalım
- $$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)$$
- Burada küresel harmonik katsayılar yüzey harmonikleri ile ilişkili olarak isimlendirilebilir. Örneğin
- Kuşak harmonik katsayıları,  $C_{10}, C_{20}, S_{20}$
- Dilim harmonik katsayıları,  $C_{11}, C_{22}, S_{55}$
- Bölme harmonik katsayıları,  $C_{21}, C_{32}, S_{52}$
- *2. derece kuşak harmonik katsayıları  $C_{20}$*

# Çekim potansiyelinin küresel harmonik katsayıları

| Derece (n) | Sıra (m) | $C_{nm}^{(a)}$ | $S_{nm}^{(a)}$ |
|------------|----------|----------------|----------------|
| 0          | 0        | 1              | 0              |
| 1          | 0        | 0              | 0              |
| 1          | 1        | 0              | 0              |
| 2          | 0        | -4.8471E-04    | 0              |
| 2          | 1        | -2.39832E-10   | 1.42489E-09    |
| 2          | 2        | 2.43932E-06    | -1.40028E-06   |
| 3          | 0        | 9.57189E-07    | 0.0            |
| 3          | 1        | 2.03048E-06    | 2.48172E-07    |
| 3          | 2        | 9.04802E-07    | -6.19006E-07   |
| 3          | 3        | 7.21294E-07    | 1.41437E-06    |
| 4          | 0        | 5.39992E-07    | 0.00           |

$$C_{nm}^{(a)} = \frac{a}{GM} \left( \frac{R}{a} \right)^{n+1} C_{nm} \quad C_{00}^{(a)} = \frac{a}{GM} \left( \frac{R}{a} \right)^{0+1} C_{00} = \frac{a}{GM} \left( \frac{R}{a} \right)^1 \frac{GM}{R} = 1$$

# Global Gravite Alanı modelleri

- Tüm yeryüzüne ait gravite bilgilerinden faydalanarak oluşturulmuş modellerdir.
- $$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{nmax} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$$
- G evrensel çekim sabiti, M yeryuvarının kutlesi, R yeryuvarının ekvatorial yarıçapı, nmax maksimum açınım derecesi, m küresel harmonik modelin sırası,  $\overline{C_{nm}}$ ,  $\overline{S_{nm}}$  küresel harmonik modelin katsayılarıdır.
- Yeryuvarıda toplanan tüm gravite bilgisi bir araya getirilerek en küçük kareler yöntemiyle dengelenerek  $\overline{C_{nm}}$ ,  $\overline{S_{nm}}$  katsayıları kestirilir. Böylelikle bu modeller yardımıyla yeryüzünde bir noktada çekim potansiyeli ve ondan türetilen büyüklükler jeoit yüksekliği, çekül sapması, gravite anomalisi, yükseklik anomalisi gibi büyüklükler kolayca hesaplanabilir.
- Global gravite alanı modellerinin konumsal ve açısal çözünürlükleri aşağıdaki şekilde tanımlanır
- Açısal çözünürlük =  $\frac{180^\circ}{nmax}$
- Konumsal çözünürlük =  $20\ 000\ km/nmax$
- Örneğin maksimum açınım derecesi nmax=360 olan bir model için açısal çözünürlük 30' ve konumsal çözünürlük 55.556 km olarak belirlenir. Hesaplanan konumsal çözünürlük meridyen yönünde geçerlidir. Ancak paralel daire yönünde sadece ekvator daire yönünde geçerlidir. Kutuplara doğru yaklaştıkça uzaklık değeri (55.556 km) azalır, konumsal çözünürlük değeri artar.

# Global Gravite Alanı modelleri

- Harmonik açınımda ilk seri toplamı  $n \rightarrow \infty$  için geçerlidir. Ancak sonsuz sayıda (veya çok miktarda) katsayı belirlemek imkansızdır. Bu nedenle seri toplamı belli bir yerde durdurulur; buna kesme (**truncation**) denir. Seri toplamının bu şekilde kesilmesinden dolayı, yukarıdaki biçimde oluşturulan bir potansiyel model gerçeği ancak belli oranda yansıtır; buna da modelin **çözünürlüğü** adı verilir.
- Orneğin EGM08 (Earth Gravitational Model 2008) modelinin ekvatordaki çözünürlüğü
- Konumsal çözünürlük  $= \frac{20\,000\text{ km}}{n_{max}} = \frac{20\,000}{2190} = 9\text{ km}$
- Açısal çözünürlük  $= \frac{180^\circ}{n_{max}} = \frac{180^\circ}{2190} * 60 = 5'$
- Örneğin
- $n_{max} = 1080$
- Konumsal çözünürlük  $= \frac{20\,000\text{ km}}{1080} = 18.5\text{ km}$

- Dünyada farklı araştırma merkezlerince geliştirilen pek çok global gravite alanı modelleri mevcut olup bunlar bir internet sayfasında derlenir ve kullanıcılara ücretsiz olarak yayınlanır. İlgilenen araştırmacılar ücretsiz şekilde modelleri indirebilir ve jeodezik ürünleri (çekül sapması, jeoit yüksekliği, gravite anomalisi) hesaplayabilir.



# I C G E M



## International Centre for Global Earth Models (ICGEM)

**We kindly ask the authors of the models to check the links to the original websites of the models from time to time. Please let us know if something has changed.**

The table can be interactively re-sorted by clicking on the column header fields (Nr, Model, Year, Degree, Data, Reference).

In the data column, the datasets used in the development of the models are summarized, where **A** is for altimetry, **S** is for satellite (e.g., GRACE, GOCE, LAGEOS), **G** for ground data (e.g., terrestrial, shipborne and airborne measurements) and **T** is for topography.

The links [calculate](#) and [show](#) in the last columns of the table directly invoke the *Calculation Service* and *Visualization page* for the selected model. For models with a registered **doi** ("digital object identifier") the last column contains the symbol ✓, which directly opens the page on "http://dx.doi.org/". If you click on the reference, the complete list of references can be seen.

| Nr ▲ | Model       | Year | Degree | Data                      | References                                   | Download                | Calculate                 | Show                 | DOI |
|------|-------------|------|--------|---------------------------|----------------------------------------------|-------------------------|---------------------------|----------------------|-----|
| 1    | SE1         | 1966 | 15     | S                         | Lundquist, C.A. et al, 1966                  | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 2    | WGS66       | 1966 | 24     | G                         | WGS Committee, 1966                          | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 3    | OSU68       | 1968 | 14     | G, S                      | Rapp, Richard H., 1968                       | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 4    | SE2         | 1969 | 22     | G, S                      | Gaposchkin, E.M. Lambeck, K., 1970           | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 5    | KOCH70      | 1970 | 8      | G, S                      | Koch, Karl-Rudolf and Morrison, Foster, 1970 | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 103  | ITG-Grace03 | 2007 | 180    | S(Grace)                  | Mayer-Gürr, T. et al, 2007                   | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 104  | EGM2008     | 2008 | 2190   | A, G, S(Grace)            | Pavlis, N.K. et al, 2008                     | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 105  | EIGEN-5C    | 2008 | 360    | A, G, S(Grace), S(Lageos) | Förste, C. et al, 2008                       | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |
| 106  | EIGEN-5S    | 2008 | 150    | S(Grace), S(Lageos)       | Förste, C. et al, 2008                       | <a href="#">gfc zip</a> | <a href="#">Calculate</a> | <a href="#">Show</a> |     |

## Örnek

Kutup uzakligi  $52^\circ$ , jeosantrik boylami  $32^\circ$  ve radial bileseni 6370000 m olan noktadaki yercekimi potansiyelini EGM08 modeli kuresel harmonic katsayilarini kullanarak hesaplayiniz. Maksimum acinim derecesini 2 aliniz. (EGM08 modeli icin ortalama yeryuvari yaricapi  $R= 6378137.00$  m yermerkezli cekim sabiti  $GM=3986004.418E+8 \text{ m}^3/\text{s}^2$

Cozum: Kuresel koordinatlari verilen bir noktanin cekim potansiyeli

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{nmax} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\cos\theta)$$

Esitligi ile hesaplanir.

# Örnek

| n | m | $P_{nm}(t)$ | $\overline{P_{nm}}(t)$ | $\overline{C_{nm}}$ | $\overline{S_{nm}}$ |
|---|---|-------------|------------------------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 1.000000    | 1.00000                | 1.0000              | 0.0000              |
| 1 | 0 | 0.615661475 | 1.066356956            | 0.00000             | 0.00000             |
| 1 | 1 | 0.788010753 | 1.364874661            | 0.00000             | 0.00000             |
| 2 | 0 | 0.068558578 | 0.153301640            | -0.000484165        | 0.00000             |
| 2 | 1 | 1.455443589 | 1.878969594            | 0.00000000          | 0.000000001         |
| 2 | 2 | 1.862882843 | 1.202485705            | 0.000002439         | -0.000001400        |

| n | m | $P_{nm}(t)$      | $\overline{P_{nm}}(t)$                              |
|---|---|------------------|-----------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 1                | 1                                                   |
| 1 | 0 | t                | $\sqrt{3}t$                                         |
| 1 | 1 | $\sqrt{1-t^2}$   | $\sqrt{3}\sin\theta$                                |
| 2 | 0 | $(3t^2 - 1)/2$   | $\sqrt{5}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$ |
| 2 | 1 | $3t\sqrt{1-t^2}$ | $\sqrt{5/3}\sin\theta\cos\theta$                    |

# Örnek

| n | m | $\overline{C_{nm}}$ | $\overline{S_{nm}}$ | $\overline{Y_{nm}}$ | $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ | Carpim       |
|---|---|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|--------------|
| 0 | 0 | 1.000000            | 0.0000000           | 1.00000             | 1.001277394                      | 1.001277394  |
| 1 | 0 | 0.000000            | 0.0000000           | 0.000000            | 1.002556420                      | 0.0000000    |
| 1 | 1 | 0.000000            | 0.0000000           | 0.000000            | 1.002556420                      | 0.00000000   |
| 2 | 0 | -0.000484165        | 0.0000000           | -0.000074223        | 1.003837079                      | -0.000074508 |
| 2 | 1 | 0.00000000          | 0.000000001         | 0.000000000         | 1.003837079                      | 0.000000001  |
| 2 | 2 | 0.000001069         | -0.000001258        | -0.000000227        | 1.003837079                      | -0.000000228 |

$$\overline{Y_{nm}} = (\overline{C_{nm}}\cos m\lambda + \overline{S_{nm}}\sin m\lambda)\overline{P_{nm}}(\cos\theta)$$

Cekim Potansiyeli

$$V = \frac{GM}{R} * 1.001202659 = 62569967.07 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Olarak elde edilir.

# EGM08 modelinin küresel harmonik katsayıları

Pavlis, N.K., S.A. Holmes, S.C. Kenyon, and J.K. Factor:  
An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008,  
presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union,  
Vienna, Austria, April 13-18, 2008.

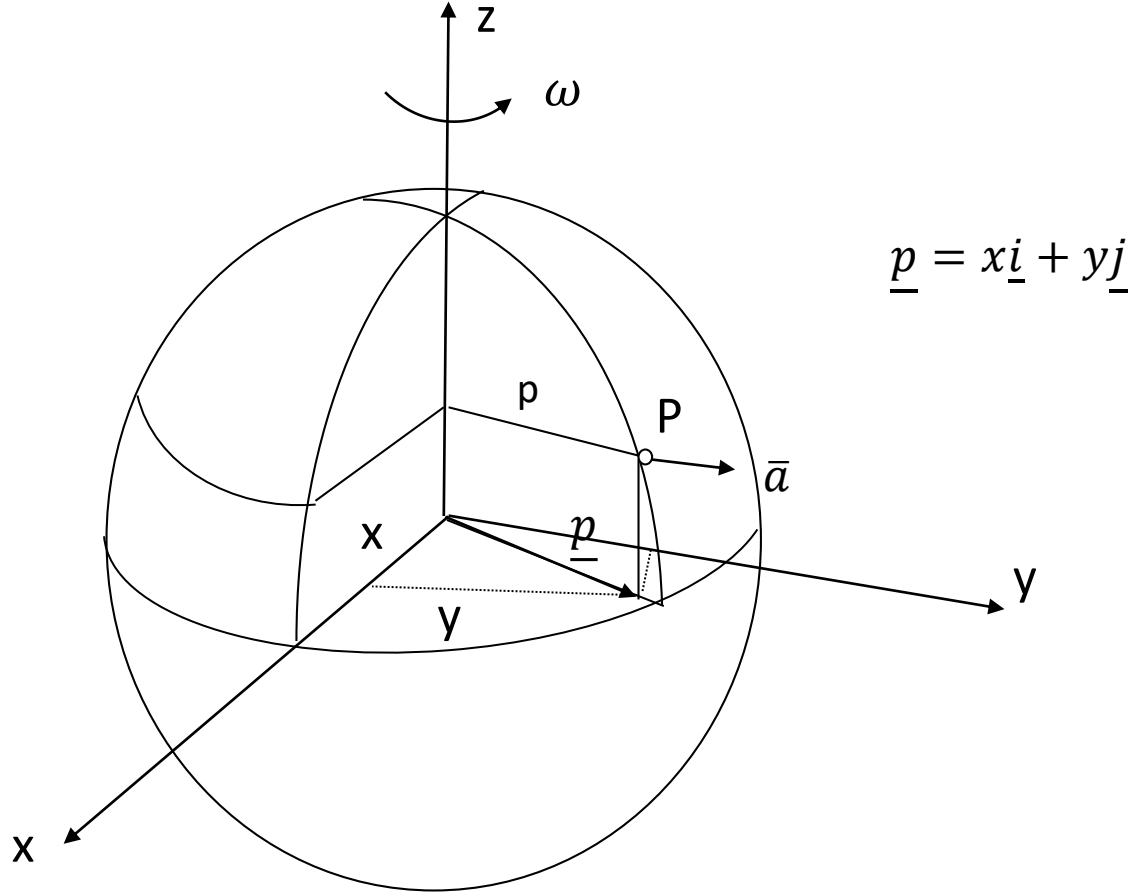
product\_type gravity\_field  
modelname EGM2008  
earth\_gravity\_constant 0.3986004415E+15  
radius 0.63781363E+07  
max\_degree 2190  
errors calibrated  
norm fully\_normalized  
tide\_system tide\_free  
  
url <http://earth-info.nima.mil/GandG/>

| key         | L     | M | C                      | S                      | sigma C          | sigma S          |
|-------------|-------|---|------------------------|------------------------|------------------|------------------|
| end_of_head | ===== |   |                        |                        |                  |                  |
| gfc         | 0     | 0 | 1.0d0                  | 0.0d0                  | 0.0d0            | 0.0d0            |
| gfc         | 2     | 0 | -0.484165143790815e-03 | 0.000000000000000e+00  | 0.7481239490e-11 | 0.0000000000e+00 |
| gfc         | 2     | 1 | -0.206615509074176e-09 | 0.138441389137979e-08  | 0.7063781502e-11 | 0.7348347201e-11 |
| gfc         | 2     | 2 | 0.243938357328313e-05  | -0.140027370385934e-05 | 0.7230231722e-11 | 0.7425816951e-11 |
| gfc         | 3     | 0 | 0.957161207093473e-06  | 0.000000000000000e+00  | 0.5731430751e-11 | 0.0000000000e+00 |
| gfc         | 3     | 1 | 0.203046201047864e-05  | 0.248200415856872e-06  | 0.5726633183e-11 | 0.5976692146e-11 |
| gfc         | 3     | 2 | 0.904787894809528e-06  | -0.619005475177618e-06 | 0.6374776928e-11 | 0.6401837794e-11 |
| gfc         | 3     | 3 | 0.721321757121568e-06  | 0.141434926192941e-05  | 0.6029131793e-11 | 0.6028311182e-11 |
| gfc         | 4     | 0 | 0.539965866638991e-06  | 0.000000000000000e+00  | 0.4431111968e-11 | 0.0000000000e+00 |
| gfc         | 4     | 1 | -0.536157389388867e-06 | -0.473567346518086e-06 | 0.4568074333e-11 | 0.4684043490e-11 |
| gfc         | 4     | 2 | 0.350501623962649e-06  | 0.662480026275829e-06  | 0.5307840320e-11 | 0.5186098530e-11 |
| gfc         | 4     | 3 | 0.990856766672321e-06  | -0.200956723567452e-06 | 0.5631952953e-11 | 0.5620296098e-11 |
| gfc         | 4     | 4 | -0.188519633023033e-06 | 0.308803882149194e-06  | 0.5372877167e-11 | 0.5383247677e-11 |
| gfc         | 5     | 0 | 0.686702913736681e-07  | 0.000000000000000e+00  | 0.2910198425e-11 | 0.0000000000e+00 |
| gfc         | 5     | 1 | -0.629211923042529e-07 | -0.943698073395769e-07 | 0.2989077566e-11 | 0.3143313186e-11 |
| gfc         | 5     | 2 | 0.652078043176164e-06  | -0.323353192540522e-06 | 0.3822796143e-11 | 0.3642768431e-11 |
| gfc         | 5     | 3 | -0.451847152328843e-06 | -0.214955408306046e-06 | 0.4725934077e-11 | 0.4688985442e-11 |
| gfc         | 5     | 4 | -0.295328761175629e-06 | 0.498070550102351e-07  | 0.5332198489e-11 | 0.5302621028e-11 |

<http://icgem.gfz-potsdam.de/home>

# Merkezkaç kuvveti ve Potansiyeli

- Yeryüzünde duran bir cisme etki eden ikinci büyük kuvvet yerin kendi eksenini etrafında dönmesinden kaynaklanan merkezkaç kuvvetidir

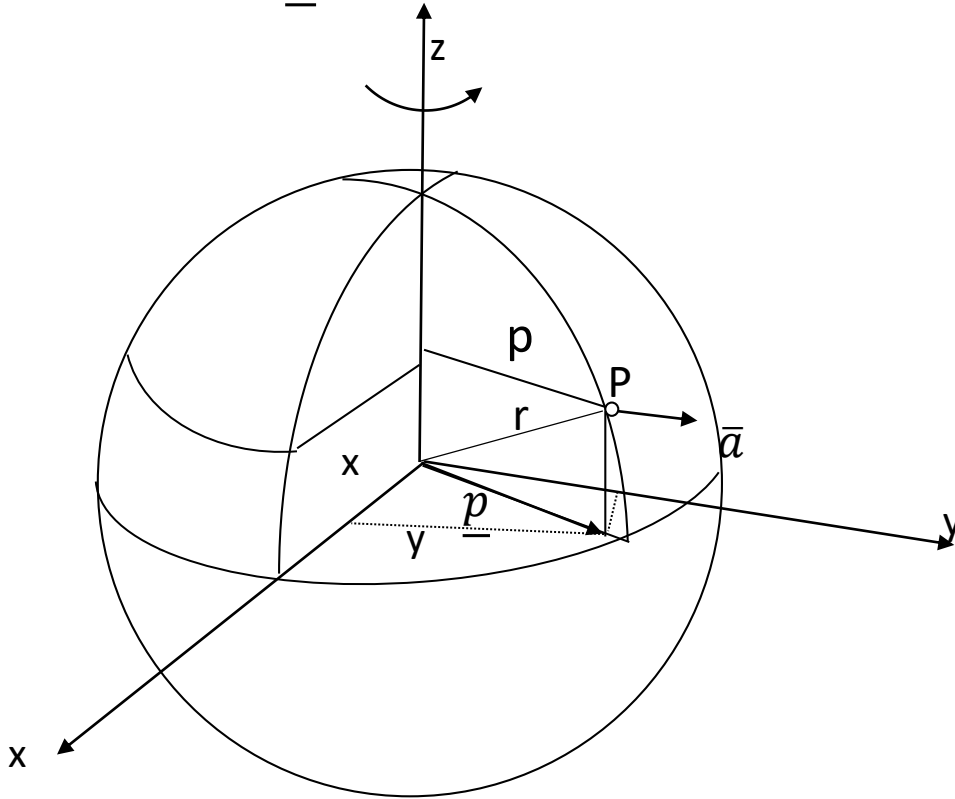


P noktasının Z eksenine uzaklığı  $p = \sqrt{x^2 + y^2}$  ve  
 $\omega$  : yerin açısal dönme hızı olmak üzere

# Merkezkaç kuvveti ve Potansiyeli

- Merkezkaç kuvveti ve Merkezkaç potansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\underline{a} = \omega^2 \underline{p} = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j}$$



Merkezkaç potansiyeli ( $\varphi$ ) skaler bir büyüklüktür ve gradyenti merkezkaç ivmesi(kuvvetini verir).

$$\underline{a} = \nabla \varphi$$

Buradan merkezkaç potansiyeli

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

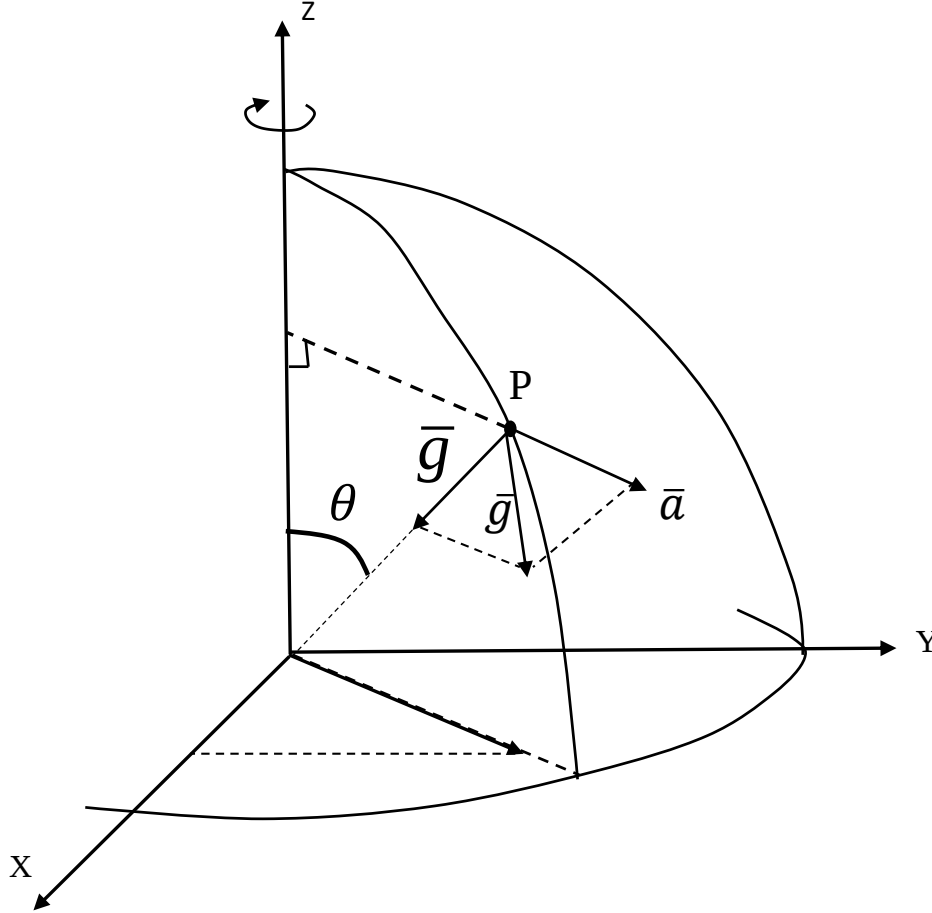
Merkezkaç potansiyeli harmonik bir fonksiyon değildir. Merkezkaç potansiyelinin 1. turevleri

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \omega^2 x \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \omega^2 y \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\omega^2 \neq 0 \quad \text{Laplace esitligini saglamaz}$$

# Yeryuvarı Gravite Alanı

- Yeryüzünde duran bir cisme etki eden en önemli iki kuvvet; kitle çekim kuvveti ve yerin dönmesinden kaynaklanan merkezkaç kuvvetidir. Bu iki kuvvetin bileşkesi **gravite vektörünü**  $\bar{g}$  oluşturur



# Yeryuvarı Gravite Alanı

- Yeryüzünde bir P noktasındaki dikkate alınacak kuvvetler;
- $\bar{g}$  : Çekim kuvveti
- $\bar{a}$ : Merkezkaç kuvveti
- Bunların bileşkesine  $\bar{g}$  **gravite vektörü** denir

$$\bar{g} = \bar{g} + \bar{a}$$

- Her kuvvet ( $\bar{g}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{g}$ ) kendine ait bir potansiyele sahiptir.
- Çekim Potansiyeli (V)
- Merkezkaç Potansiyeli ( $\varphi$ )
- Gravite Potansiyeli (W)
- Kuvvetlerin bileşkesine (toplamına) karşılık, çekim ve merkezkaç potansiyelin toplamı ( $W=V+\varphi$ ) **gerçek gravite potansiyelini** verir.

# Yeryuvarı Gravite Alanı

- **Gravite potansiyeli (W)**

$$W = V + \varphi = G \iiint_V \frac{\rho}{\ell} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

- Seklinde ifade edilir. Potansiyel ile kuvvet ilişkisinden (potansiyelin türevi kuvvet vektörünün bileşenlerini veriyordu. Buna göre;

- $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z) = \text{grad}W = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)$

- $g_x = \frac{\partial W}{\partial x} ; g_y = \frac{\partial W}{\partial y} ; g_z = \frac{\partial W}{\partial z}$

- $\bar{g} = \text{grad}W = \frac{\partial W}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \bar{k}$

- Gravite potansiyeli harmonik bir fonksiyon değildir. Laplace denklemini sağlamaz

- $\Delta W = 2\omega^2 \neq 0$

# Yeryuvarı Gravite Alanı

- $\bar{g}$  gravite vektörü vektörel bir büyüklük olduğundan, büyüklüğü ve doğrultusu vardır.
- Bu vektörün büyüklüğü
- $g = |\bar{g}| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$
- Olup bu aynı zamanda vektörün düşey bileşenine ve  $W$  potansiyelinin düşey doğrultudaki türevine eşittir.
- $g_n = g = -\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial H}$
- Gravite vektörünün büyüklüğünün birimi **Gal=(cm/sn<sup>2</sup>)** olup enleme göre değişir.

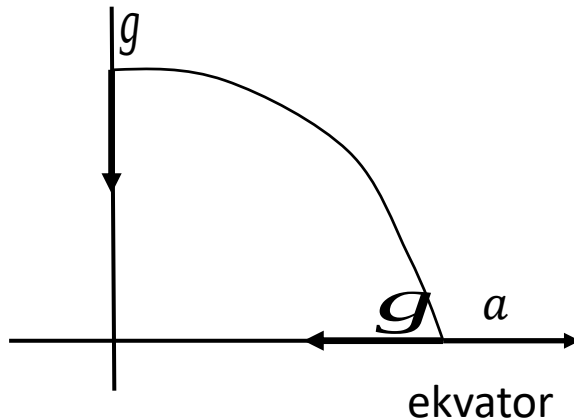
# Yeryuvarı Gravite Alanı

- Gravite vektörünün *doğrultusuna çekül doğrultusu* veya **düşey doğrultu** denir. Gravite vektörü doğrultusu=**çekül doğrultusu=Düşey doğrultu**
- Gravite vektörünün doğrultusunun **Jeodezideki önemi** : Bütün jeodezik aletler buna göre düzeçlenip ayarlanır. **Düşey** ve **yatay** tanımlarına temel oluşturur.
- Gravite kutuplarda ekvatorda olduğundan daha büyüktür.

$$g_K > g_E$$

$$g_K = 983 \text{ Gal}$$

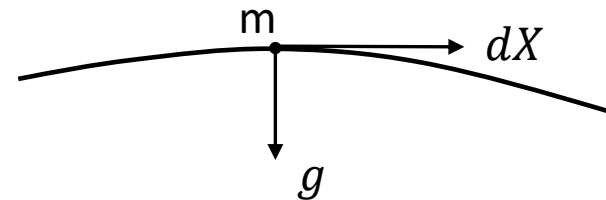
$$g_E = 978 \text{ Gal}$$



# Eş potansiyelli yüzey

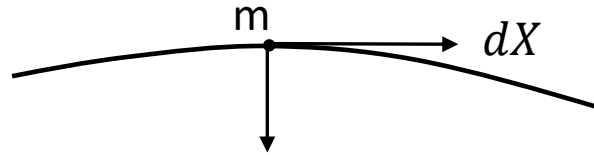
- Uzerinde gravite potansiyeli ( $W$ ) sabit olan yuzeye es potansiyelli yuzey, seviye yuzeyleri, ya da nivo yuzeyleri denir. Gravite potansiyeli esit olan noktalar birlestirdigimizde elde ettigimiz bir nivo yuzeyinin kapali ifadesi
- $W = W(x, y, z) = \text{sabit}$
- Bir espotansiyelli yuzey uzerinde  $m=1$  kutleli bir  $(x, y, z)$  noktasi diferansiyel anlamda  $dX$  kadar yer degistirildiginde, gravite potansiyelindeki degisim miktarı

- $$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$



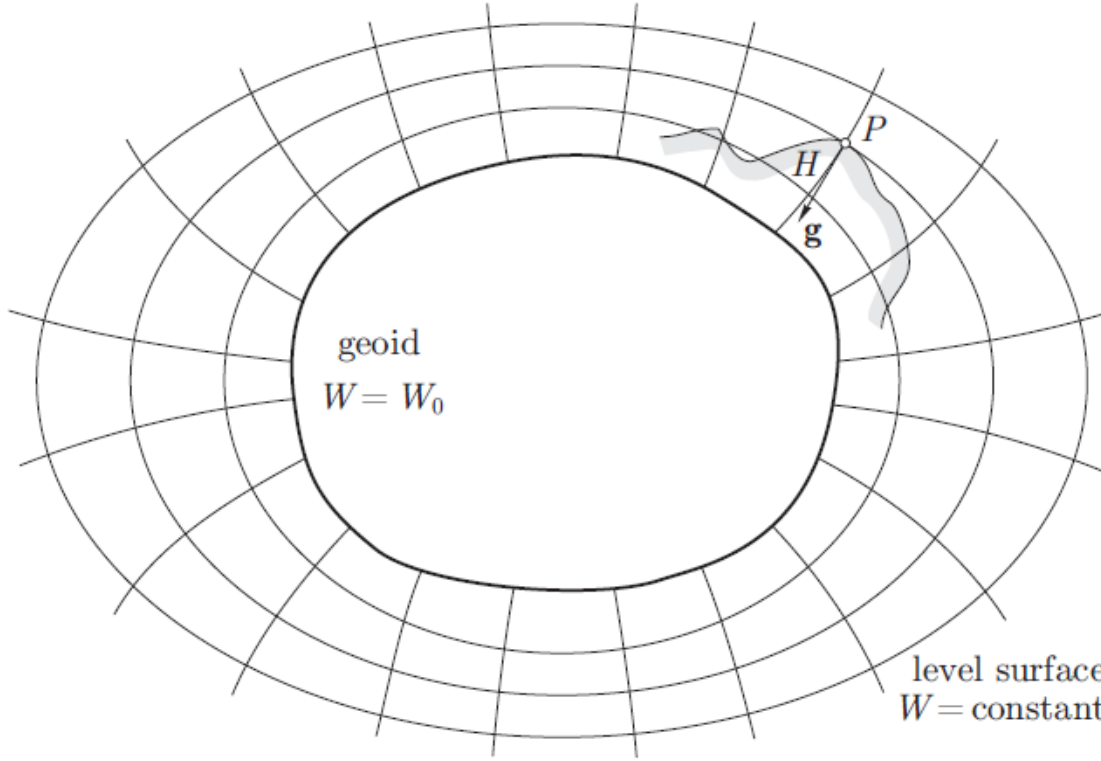
- olduguna gore, vektorel olarak bu degisim asagidaki sekilde yazilabilir;
- $dW = g \cdot dX = \text{grad}W \cdot dX$
- Burada  $dX = [dx, dy, dz]$

# Eş potansiyelli yüzey



- Bu  $dX$  vektörü eş potansiyelli yüzey boyunca hareket ettirilirse  $W = \text{sabit}$  olduğundan  $dW = 0$  olur. Bundan dolayı
- $dW = g \cdot dX$  eşitliğinden
- $0 = g \cdot dX$
- Olur. İki vektörün çarpımı sıfır ise bu iki vektör birbirine diktir. Buradan eş potansiyelli yüzey üzerindeki bir noktadaki gravite vektörünün doğrultusu eş potansiyelli yüzeye diktir.
- Bir noktadaki gravite vektörü, o noktadan geçen eşpotansiyelli yüzeyin normali doğrultusundadır. Her noktada Çekül doğrultusuna dik olan Eşpotansiyelli yüzeyler (seviye yüzeyleri) de her yerde yatay olup, yatayın fiziksel tanımlanmasına yardım ederler.

# Çekül eğrisi



Tüm eşpotansiyelli yüzeyleri dik olarak kesen çizgileri birleştirdiğimizde elde ettiğimiz eğrilere çekül eğrisi (plumb line) denir.

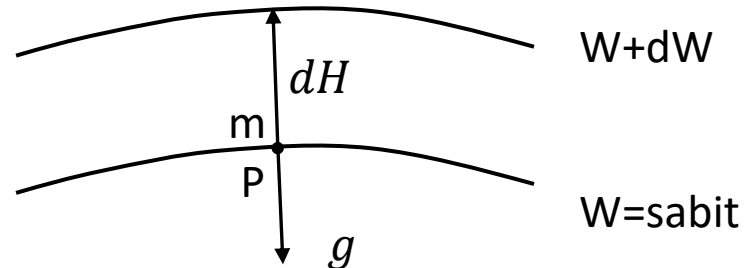
Çekül eğrileri her noktada eşpotansiyelli yüzeyleri dik olarak keserler.

Bir noktadaki  $g$  gravite vektörünün doğrultusu bu noktadaki çekül eğrisine teğettir

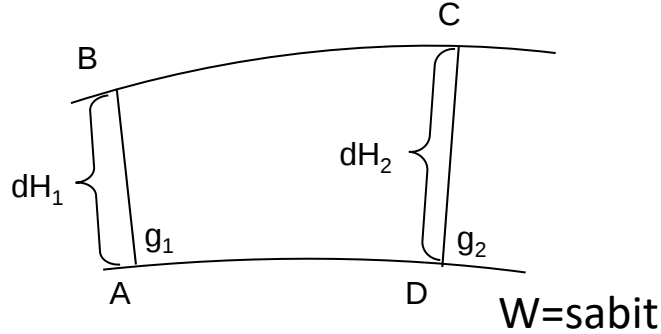
Çekül doğrultuları bulundukları noktadan geçen çekül eğrilerinin teğetleri ile çakışır. Jeoidden itibaren olan ortometrik yükseklik ( $H$ ) çekül eğrisi boyunca jeoidden  $P$  noktasına kadar olan mesafedir.

# Çekül eğrisi

- **Jeoid (geoid):** üzerinde gravite potansiyeli sabit olan ve ortalama deniz yüzeyi ile çakışık olan yüzey jeoid olarak adlandırılır ve
- $W = W_0 = \text{sabit}$
- Olarak tanımlanır.
- Koordinatları  $x, y, z$  olan bir P noktası çekül eğrisi boyunca yukarı doğru  $dH = |dX|$  diferansiyel mesafesi kadar taşınırsın. Buna göre P noktasındaki gravite potansiyeli
- $dW = g \cdot dX = |g||dX| \cos(g, dH) = -gdH$
- kadar değişir. Bu eşitlik yükseklik (H) ile gravite potansiyeli (W) arasındaki ilişkiyi gösterir ve aşağıdaki biçimde de gösterilebilir
- $g = -\frac{dW}{dH}$
- Bu eşitlik gravitenin, gravite potansiyelinin dikey yöndeki gradyentinin ters işaretlisi olduğunu ifade eder



- Bir  $W=\text{sabit}$  es potansiyelli yuzeyde iki nokta dusunelim.



Bu noktalardaki gravite kuvvetleri  $g_1$  ve  $g_2$  olsun. Gravite kuvveti her noktada farkli oldugu icin  $g_1 \neq g_2$

Bu iki noktayi  $dH_1$  ve  $dH_2$  kadar cekul egrisi boyunca yukariya dogru tasiyalim.

Gravite potansiyelindeki degisim miktarı

$$dW = -g_1 dH_1 = -g_2 dH_2$$

Olur.  $g_1 \neq g_2$  oldugu icin yukaridaki esitligin saglanmasi icin  $dH_1$  ve  $dH_2$  nin birbirinden farkli olmasi gerekir. Buradan es potansiyelli yuzeyler parallel degildir sonucu ortaya cikar.

# Eşpotansiyelli yüzeylerinin özellikleri

- Birbirine paralel olmayan iç içe kapalı eşpotansiyelli yüzeylerdir.
- Yerin temel şekli olan **Jeoit**, eşpotansiyelli yüzeylerden ortalama okyanus yüzeyi ile çakışanıdır
- Bu yüzeyler kesişmezler.
- Jeopotansiyel yüzeyler her yerde **yatayı** oluştururlar.
- Eşpotansiyelli yüzeyin **teğet** düzlemine **yatay düzlem** denir.
- Gravite vektörünün doğrultusu, düşey doğrultu veya çekül doğrultusudur.
- Ardışık eşpotansiyelli yüzeyleri dik kesen eğrilere **çekül eğrileri** denir.
- Bir noktadaki gravite vektörü bu noktadan geçen **çekül eğrisinin teğetidir**.