

The image features a light blue grid background. A solid blue line runs horizontally across the upper portion of the page, starting from the left edge and ending near the right edge. Another solid blue line runs horizontally across the lower portion of the page, starting from the left edge and ending near the right edge. A vertical blue line runs down the right side of the page. In the top-left corner, there is a small blue circle with a horizontal line extending to the right and a vertical line extending downwards. In the bottom-right corner, there is a small blue circle with a horizontal line extending to the left and a vertical line extending upwards.

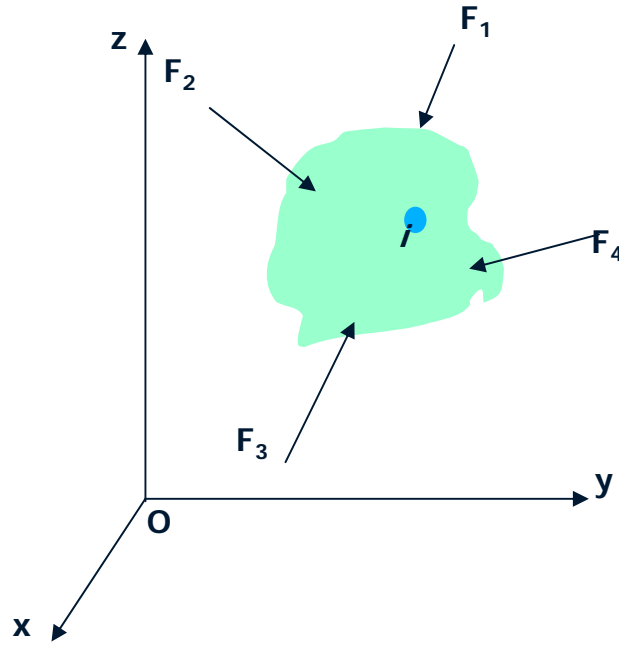
STATİK

BÖLÜM 4

RİJİT CİSİMLERİN DENGESİ

4.1 GİRİŞ VE TANIMLAR

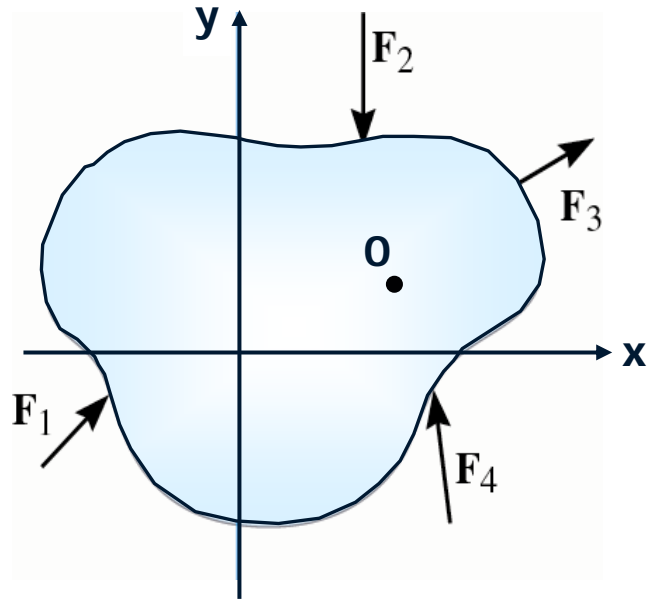
Kuvvet etkisindeki bir konstrüksiyon (yapı), rijit bir cisim gibi hareket etmiyorsa dengededir (Şekil 4.1). Rijit cismin hareketi, ötelenme yada dönmedir veya ikisinin birleşimi şeklinde olabilir. Yapının dengede kalabilmesi için, yapıyı döndürmeye veya ötelemeye sebep olan kuvvet mesnet noktalarındaki tepki kuvvetleri ile dengelenmelidir.



Şekil 4.1 Rijit Cismin Dengesi

İki boyutlu bir yapının herhangi bir yönde hareket etmemesi için gerekli olan şart, o yapının birbirine dik herhangi iki yönde hareket etmemesi şeklinde tanımlanabilir. Normal olarak (şart olmamak koşulu ile) bu yönler yatay ve dikey alınır. Yapıya herhangi bir yönde kuvvet etki etmez ise yapı o yönde harekete zorlanmaz. Bundan dolayı yatay yönde herhangi bir hareket olmaması için o yönde etki eden bütün kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır ($\sum F_x = 0$). Benzer şekilde, dikeyde hareket olmaması için ($\sum F_y = 0$) olmalıdır.

Bir yapının düzlem içinde dönmeme şartı, o yapının bir ekseninde dönmemesi ile belirlenir. Böylece, düzlemin herhangi bir noktasında kuvvetlerin bileşke momentinin olmaması lazım gelir. Bundan dolayı, düzlemde dönme olmaması için herhangi bir noktada momentlerin toplamı sıfır olmalıdır. Yani, sistemin içinde yada dışında noktaya göre alınan moment sıfır ($\Sigma M = 0$) olmalıdır.



Şekil 4.2: Kuvvetlerin Gösterimi

İki boyutlu bir yapının tamamıyla dengede olabilmesi için;

$\Sigma F_x = 0$: bütün yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşit

$\Sigma F_y = 0$: bütün dikey kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşit

$\Sigma M = 0$: bütün kuvvetlerin herhangi bir nokta (eksen) etrafındaki momentlerinin cebirsel toplamı sıfıra eşit demektir.

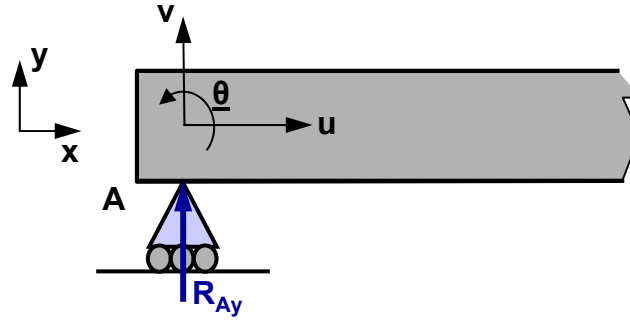
Bunlar iki boyutlu (düzlem) yapıların statik dengesi için 3 denge denklemi olarak bilinir. Yukarıda denklemlerin sağlanabilmesi için yeterli bağların ve bunlara karşılık gelen mesnet reaksiyonların sağlanması lazımdır. Üç ayrı denklem ile üç bilinmeyenin şiddeti belirlenebilir. Eğer yapı sadece yeterli mesnetlerle bağlanmışsa (3'ten fazla olmayan bilinmeyen reaksiyonlar), yapı yukarıdaki eşitliklerle tamamıyla analiz edilebilir ve statik olarak belirlidir (*izostatik*).

Eğer bilinmeyen sayısı üçten fazla ise, sadece yukarıdaki denklemleri kullanarak çözüm mümkün değildir ve yapı statik olarak belirsizdir (**hiperstatik**). Bu tip problemler, elastik cisim mekaniğinde cisimlerin şekil değiştirmelerine bağlı bilinmeyen sayısı kadar yeni denklem yazılabilirse bilinmeyen tepkiler bulunabilir. İki boyutlu yapılarda üçten az mesnet reaksiyonu varsa, **eksik bağlıdır**. Yapı rijit cisim olarak hareket eder. Bir cisim (yapı) üç yada daha çok noktadan bağlı olmasına rağmen yukarıdaki denklemlerden birini sağlamıyorsa böyle sistemlere **yetersiz bağlı** sistemler denir.

4.2 MESNETLER VE MESNET REAKSİYONLARI

4.2.1 Kayıcı Mesnetler

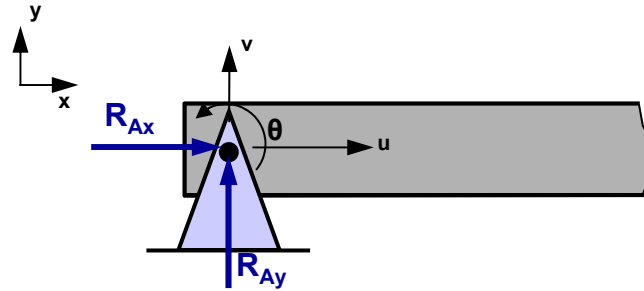
Sadece bilinmeyen bir reaksiyon sağlar ve hareket yönüne pozitif bir açı ile etki eder. Böylece kayıcı mesnetler, bir doğrultuda lineer harekete ve dönmeye müsaade ederler.



Şekil 4.3: Kayıcı Mesnet

Şekil 4.3'den de anlaşılacağı üzere, y yönünde deplasman yoktur yani sıfırdır ama y yönünde bir tepki kuvveti meydana gelir.

4.2.2 Sabit Mesnetler

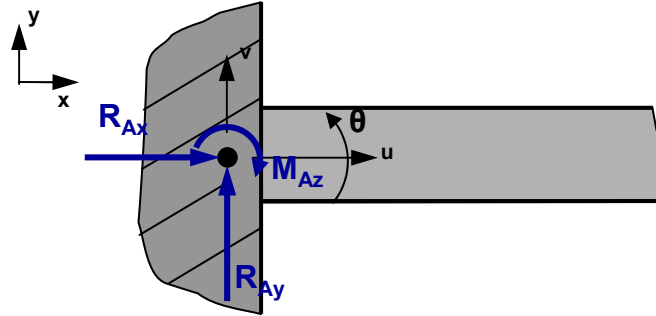


Şekil 4.4: Sabit Mesnet

Tek noktada sabitlenmiş mesnetler yatay ve düşeyde iki reaksiyon verir dolayısıyla iki yönde cismin hareketine engel olur. Fakat dönmeyi sağlar.

x ve y yönünde yer değiştirmeler sıfıra eşitken, x ve y yönünde reaksiyon kuvvetleri R_{Ax} , R_{Ay} meydana gelir. $\theta \neq 0$ olduğunda M_A olmaktadır.

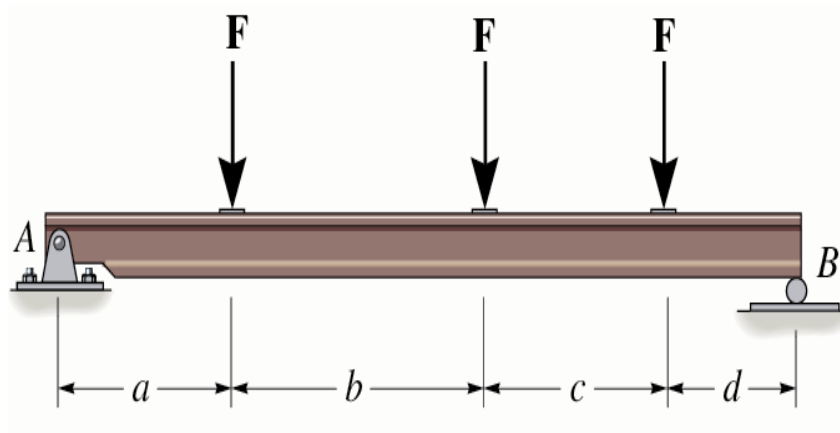
4.2.3 Ankastre (Konsol) Mesnetler



Şekil 4.5: Ankastre Mesnet

Yönü ve şiddeti bilinmeyen iki reaksiyon ve momenti sağlar (toplam üç bilinmeyen). Böyle bir mesnet iki doğrultuda lineer hareketi ve bir eksen etrafında dönmeyi engeller.

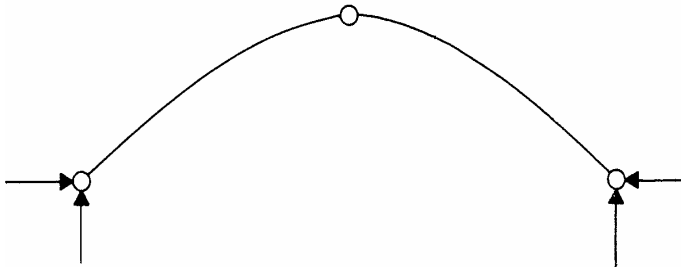
Burada ise $x=y=\theta=0$ ' dir ve $R_{Ax} \neq R_{Ay} \neq M_A$ olmaktadır. Bu mesnetlerin birlikte uygulanmasını şekil 4.6'deki gibi görebiliriz.



Şekil 4.6: Kayar ve Sabit Mesnet'in Birlikte Uygulanması

4.3 ÜÇ YERDEN PUNTALANMIŞ DÜZLEM YAPILAR

Eğer yapı üç noktadan sabitlenmiş ise (menteşe gibi) (şekil 4.7), öyle ki yapının bir parçası diğer parçanın dönmesinden bağımsız olarak pim etrafında dönebiliyor, böylece özel bir çeşit denge eşitliği daha yazılabilir, çünkü pim etrafındaki bütün kuvvetlerin momentleri toplamı sıfır olmalıdır. Bu mesnet reaksiyonunun bilinmeyen bir bileşeninin belirlenmesini sağlar.



Şekil 4.7: Üç yerden puntalanmış kavisli yapı

4.4 UZAY YAPILAR

Üç boyutlu bir yapı, uzay yapıdır. Karşılıklı dik yönler, bir uzay yapı için kuvvetlerinin toplamı, sıfır olmalı ve üç tane karşılıklı dikey eksen (x,y ve z) etrafındaki kuvvetlerin momentleri toplamı da sıfır olmalıdır. Bundan dolayı,

$\Sigma F_x = 0$: *X yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.*

$\Sigma F_y = 0$: *Y yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.*

$\Sigma F_z = 0$: *Z yönündeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir.*

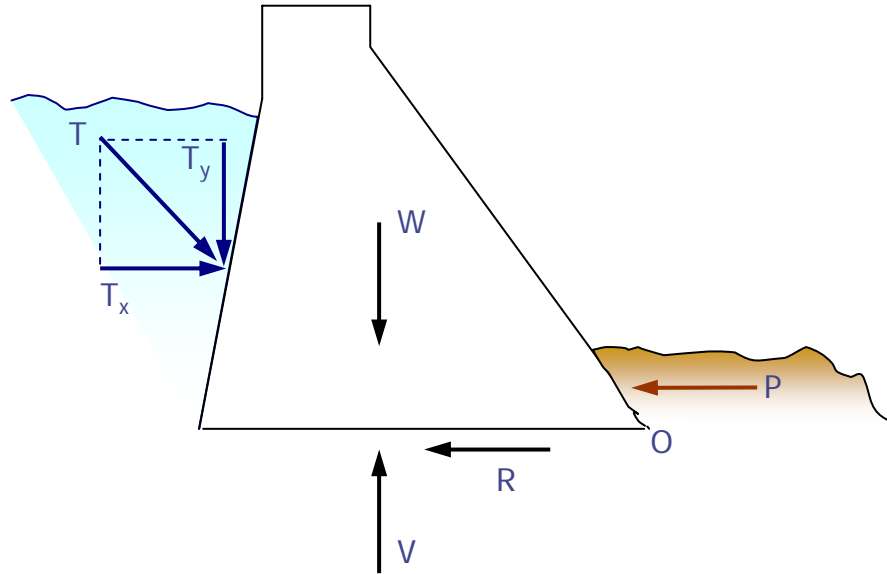
$\Sigma M_x = 0$: *X eksenine etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.*

$\Sigma M_y = 0$: *Y eksenine etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.*

$\Sigma M_z = 0$: *Z eksenine etrafındaki momentlerin toplamı sıfıra eşittir.*

4.4.1 Büyük Yapılar

Yapının, Şekil 4.8'de barajda görüldüğü gibi dengeyi sağlaması kendi ağırlığına bağlıdır. Böylece, denge için,



Şekil 4.8 : Baraj duvarı

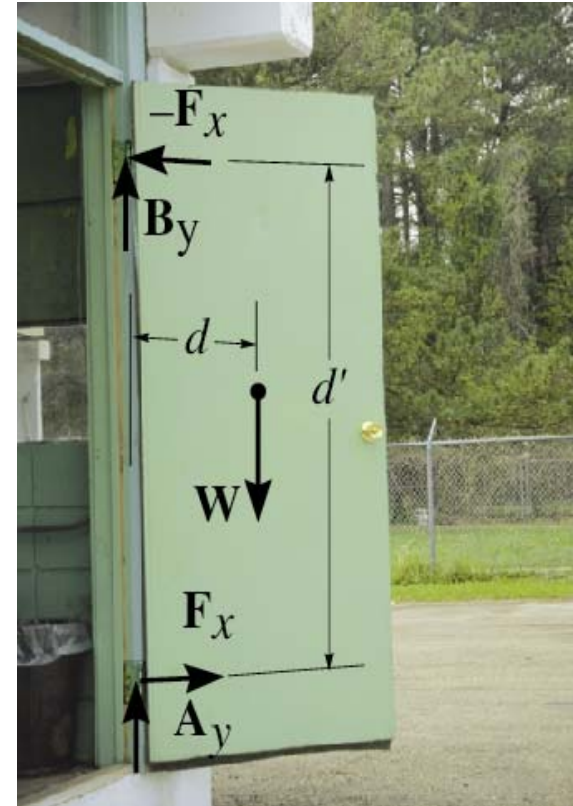
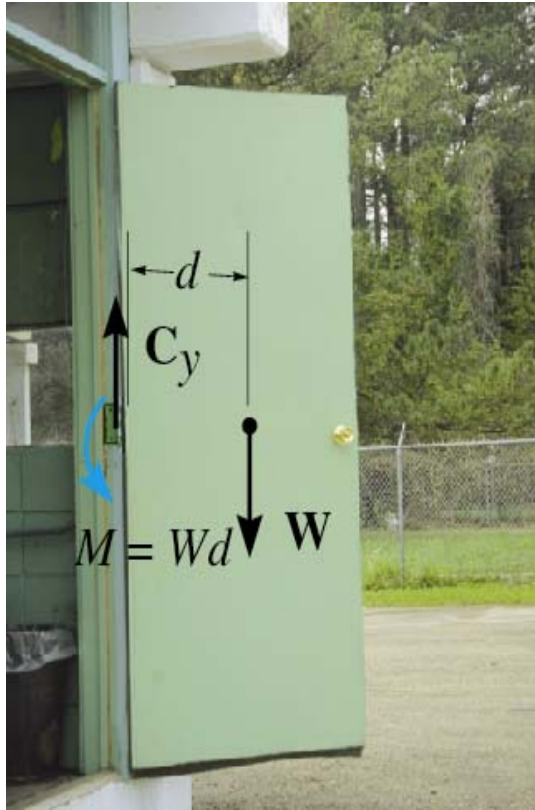
$\Sigma F_y = 0$: Yapının ağırlığının (W) ve yükün (T) dikey bileşenleri (T_y) yapının altındaki dikey yukarı yöndeki yer tepkisi (V) ile dengelenmelidir.

$\Sigma F_x = 0$: Yükün (T) yatay bileşeninden (T_x) kaynaklanan doğrusal yöndeki kayma eğilimi, yükün arkasındaki tepki kuvveti (P) ve/veya yer ile yapı arasındaki sürtünme kuvveti (R) tarafından engellenmelidir.

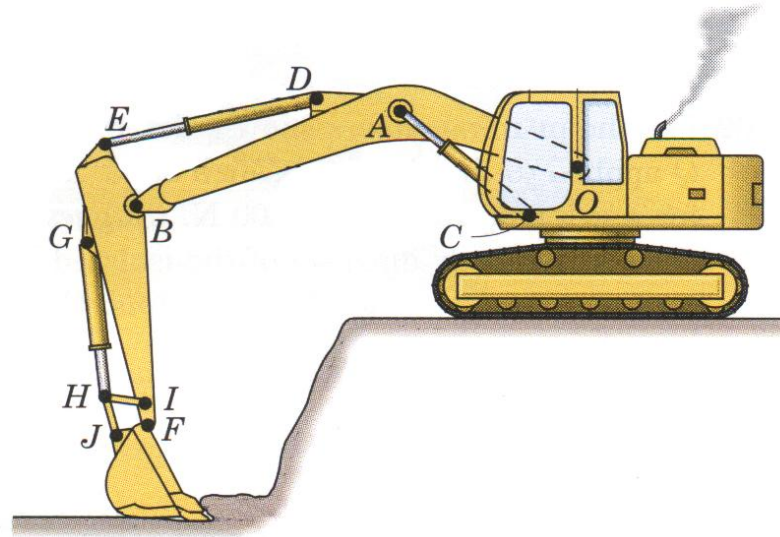
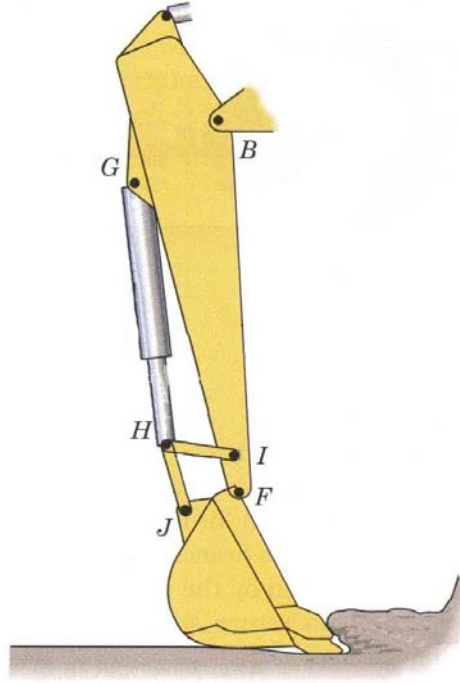
$\Sigma M_o = 0$: Dönme merkezi (O) etrafında yükten kaynaklanan döndürme momenti aynı noktada kendi ağırlığından kaynaklanan yenilenme momenti tarafından dengelenmelidir.

Kütle yapısı döndürmeye karşı güvenlik faktörünü sağlamak için ağırlığı denge için minimum gerekli ağırlıktan daha büyük olacak şekilde dizayn edilmiştir.

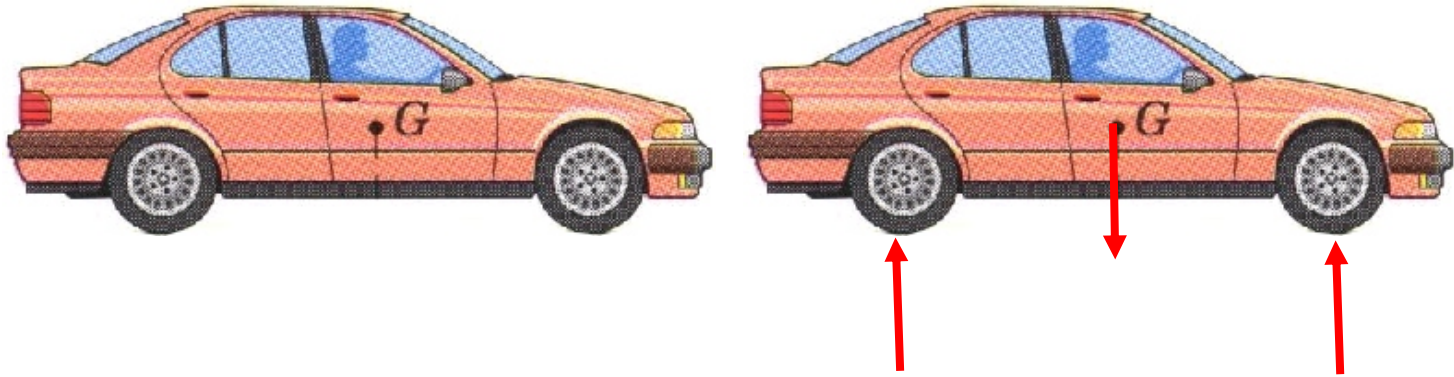
ÖRNEKLER



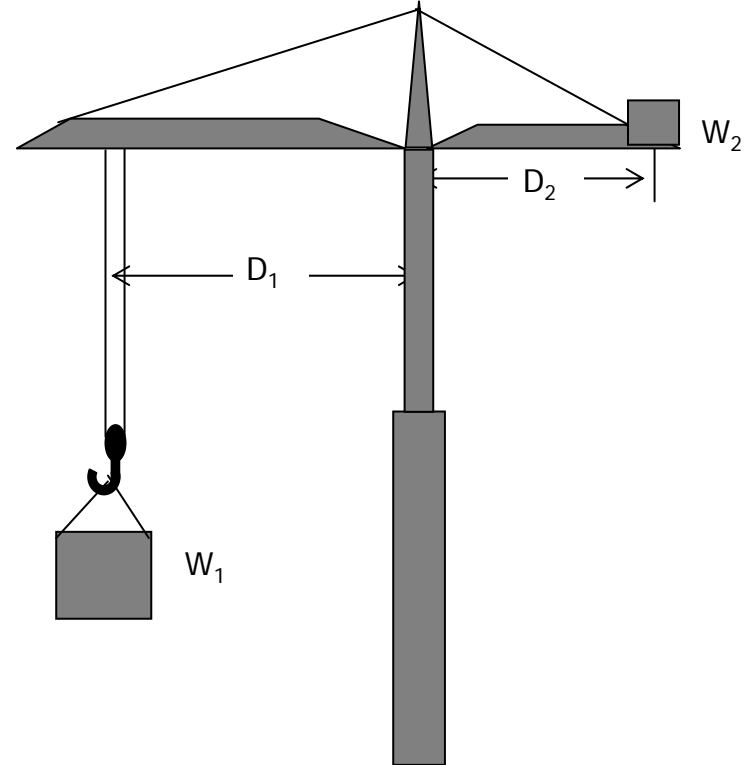
Şekil 4.9: Bir kapıda; a) Tek menteşe olması durumunda gelen kuvvetler b) Çift menteşe olması durumunda meydana gelen kuvvetler



Şekil 4.10: Bir kepçenin çalışması esnasında meydana gelen tepki kuvvetleri



Şekil 4.11: Arabanın dengesi



Şekil 4.12: Vinç'te denge sistemi

TABLÖLAR

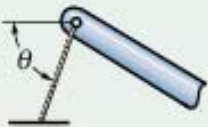
Tablo 4.1 İki Boyutlu Cisimler için Mesnet ve Bağ Tepkileri

Bağlantı Tipi

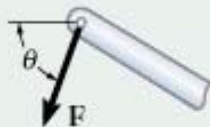
Reaksiyon

Bilinmeyen Sayısı

(1)

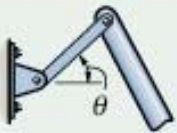


Kablo

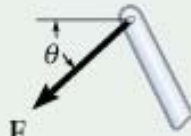


Bir bilinmeyen. Reaksiyon kuvveti çekme kuvvetidir ve bu kuvvet bağlı bulunduğu elemandan itibaren kablo doğrultusundadır.

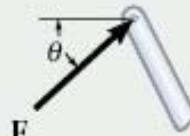
(2)



Ağırlıksız bağlantı çubuğu

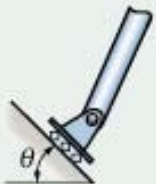


veya

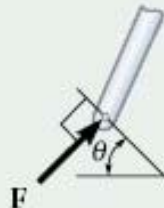


Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet bağlantı çubuğu boyunca etki eder.

(3)



Kayıcı Mafsal

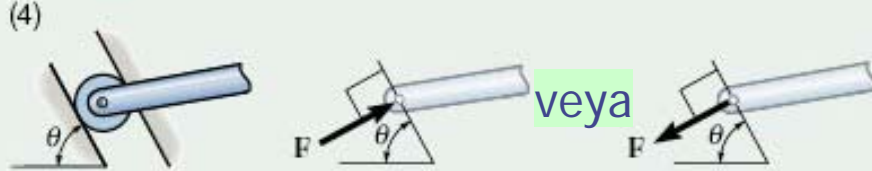


Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.

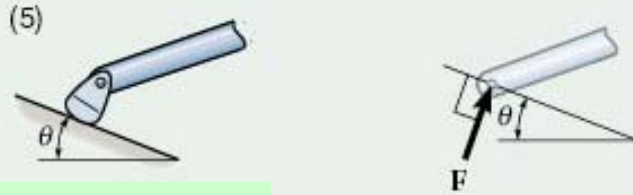
Bağlantı Tipi

Reaksiyon

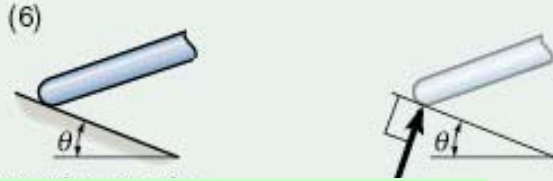
Bilinmeyen Sayısı



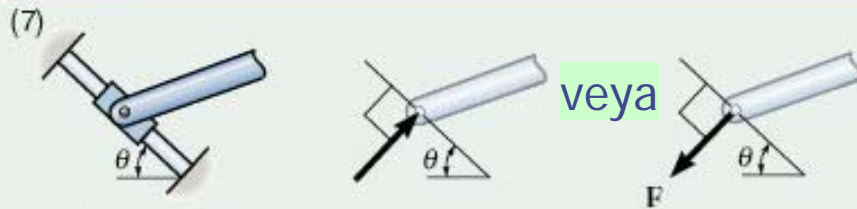
Kayıcı Mafsal



Kayıcı Mafsal



Pürüzsüz Temas Yüzeyi



Düz çubuk üzerindeki bileziğe bağlı mafsal

Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet yarığa dik olarak etki eder.

Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.

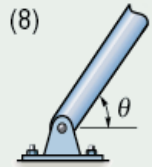
Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet temas noktasındaki yüzeye dik olarak etki eder.

Bir bilinmeyen. Reaksiyon, kuvvettir ve bu kuvvet çubuğa dik olarak etki eder.

Bağlantı Tipi

Reaksiyon

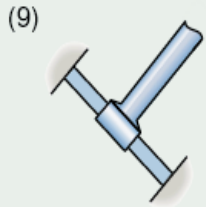
Bilinmeyen Sayısı



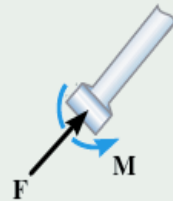
Mafsal



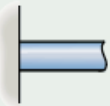
veya



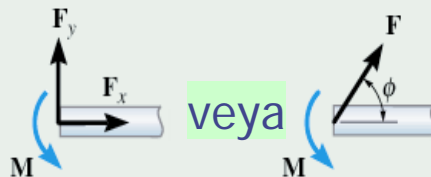
Düz bir çubuk üzerinde bileziğe ankastre bağlantı



(10)



Ankastre mesnet



veya

İki bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet bileşeni veya ϕ doğrultusundaki bir bileşke kuvvettir. (ϕ ve θ açısı 2. bağlantı tipindeki gibi olmadıkça birbirine eşit olmak zorunda değildir.

İki bilinmeyen. Reaksiyonlar, kuvvet ve momenttir, ve çubuğa dik olarak etki eder.

Üç bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet bileşeni ve momenttir. Veya ϕ doğrultusunda bir bileşke kuvvet ve momenttir.

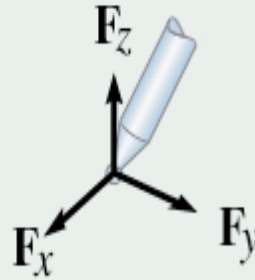
Tablo 4.2 Üç Boyutlu Cisimler için Mesnet ve Bağ Tepkileri

Bağlantı Tipi	Reaksiyon	Bilinmeyen Sayısı
---------------	-----------	-------------------

(1)

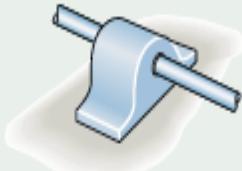


Küresel Mafsal

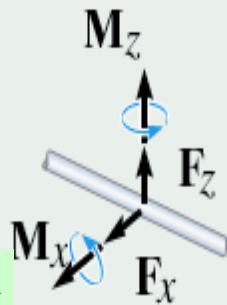


Üç bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet bileşenidir.

(2)



Radyal Yük taşıyan Yatak



Dört bilinmeyen. Reaksiyonlar, iki kuvvet ve iki de momenttir.

Bağlantı Tipi

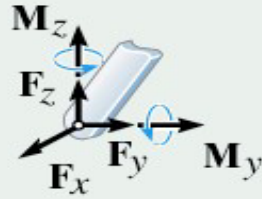
Reaksiyon

Bilinmeyen Sayısı

(3)



Döner mafsallı

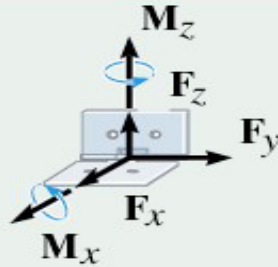


Beş bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve iki de momenttir.

(4)



Menteşe

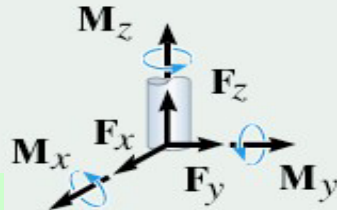


Beş bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve iki de momenttir.

(5)



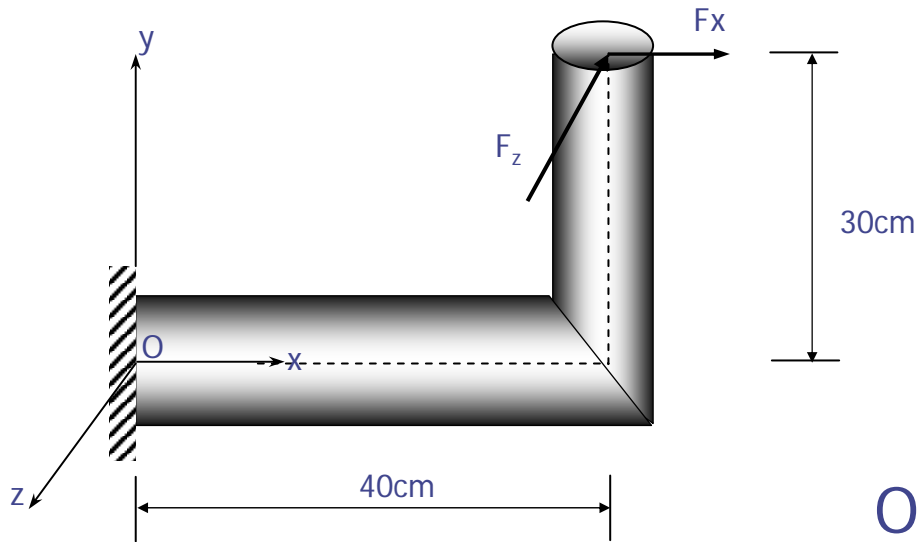
Ankastre mesnet



Altı bilinmeyen. Reaksiyonlar, üç kuvvet ve üç de momenttir.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1:



O' da doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

$$F_x = 500 \text{ N}$$

$$F_z = 600 \text{ N}$$

Çözüm :

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 30 & 0 \\ 500 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$M_o = i(-18000 - 0) - j(-24000 - 0) + k(0 - 15000)$$

$$M_o = -18000i + 24000j - 15000k \Rightarrow$$

$$M_{ox} = -18000 \text{ Ncm}$$

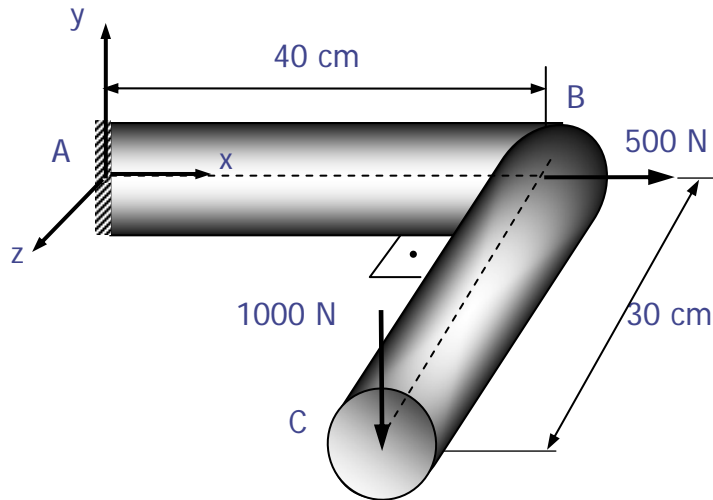
$$M_{oy} = 24000 \text{ Ncm}$$

$$M_{oz} = -15000 \text{ Ncm}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow O_x = 500 \text{ N}$$

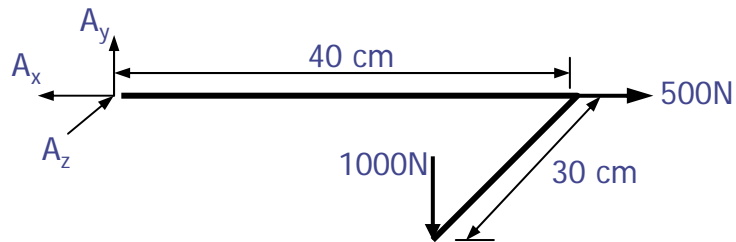
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow O_z = 600 \text{ N}$$

Problem 2:



A'da doğacak mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız.

Çözüm :



$$\sum F_x = 0$$

$$-A_x + 500 = 0$$

$$A_x = 500\text{N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 1000 = 0$$

$$A_y = 1000\text{N}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$A_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

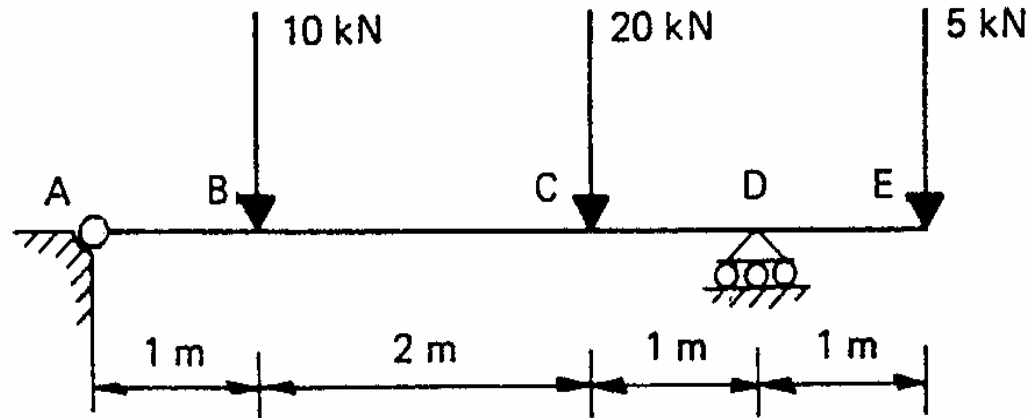
$$M_x = 1000 \cdot 30 = 30000 \text{ Ncm}$$

$$\sum M_z = 0$$

$$M_z = 1000 \cdot 40 = -40000 \text{ Ncm}$$

Problem 3:

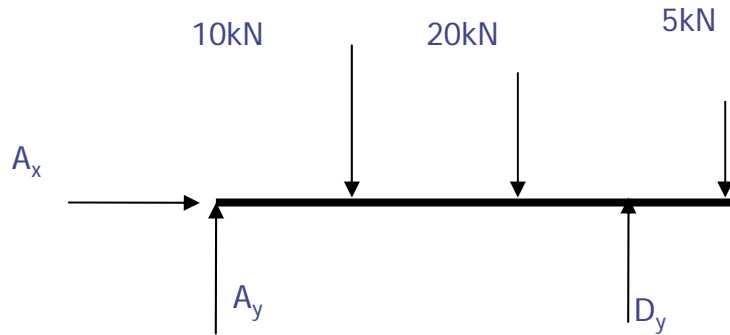
ABCDE kirişini A noktasından sabit bir mesnet ve D noktasında kayıcı bir mesnetle Şekil 4.13'de görüldüğü gibi mesnetlenmiştir. Üç noktadan kuvvetler etki etmektedir. Reaksiyon kuvvetlerini belirleyiniz.



Şekil 4.13: Çıkmalı kiriş yük diyagramı

Çözüm :

A da ve gibi iki reaksiyon kuvveti ve D de dikey olarak etkiyen sadece tek bir reaksiyon kuvveti vardır. Bu reaksiyonlar serbest kuvvet diyagramında gösterilmiştir (Şekil 4.14). Sadece üç bilinmeyen vardır; burdan sistem statik olarak belirlidir ve bilinmeyenler belirlenebilir.



Şekil 4.14: Serbest kuvvet diyagramı

Yatay yük yoktur; bundan dolayı, $\sum F_x = 0$ ise $A_x = 0$

1.) D_y 'yi belirlemek için A etrafında momentler alınır:

$$(\sum M_A = 0)$$

$$-(10 \times 1) - (20 \times 3) - (5 \times 5) + (D_y \times 4) = 0$$

$$\mathbf{D_y = +23.75 \text{ kN}}$$

2.) A_y 'yi belirlemek için

$$(\sum F_y = 0)$$

$$+A_y + D_y - 10 - 20 - 5 = 0$$

$$+A_y + (23.75) - 35 = 0$$

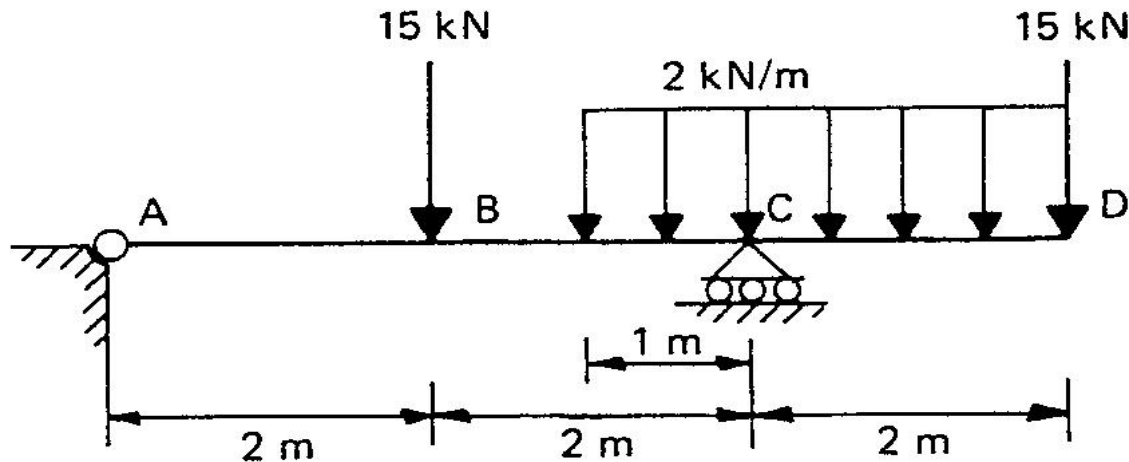
$$\mathbf{A_y = +11.25 \text{ kN}}$$

3.) D etrafında alınan momentler kontrol edilir:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= +(A_y \times 4) - (10 \times 3) - (20 \times 1) + (5 \times 1) \\ &= +(+11.25 \times 4) - 45 = 45 - 45 = 0\end{aligned}$$

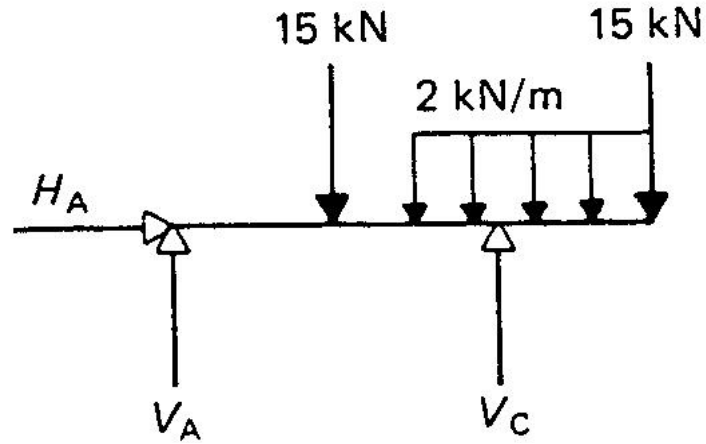
Problem 4:

ABCD kirişı A'da sabit bir mesnede ve C'de kayıcı bir mesnede sahiptir. Şekil 4.15'de gösterildiği gibi, kiriş, herbiri 15 kN olan iki tekil yük ve 2 kN/m lineer yayılı olan yüke maruzdur. Reaksiyonları belirleyiniz.



Şekil 4.15: Çıkmalı kiriş yük diyagramı

Çözüm :



Şekil 4.16 Serbest kuvvet diyagramı

$\sum F_x = 0$ ise $A_x = 0$ Yatayda yük yoktur.

C_y 'yi belirleyelim;

A etrafındaki momentleri alalım: *yayılı yükün moment*,

$(2 \times 3 = 6 \text{ kN}) \times (4.5 \text{ m})$ dir.

$$(\sum M_A = 0)$$

$$(15 \times 2) + (C_y \times 4) - (2 \times 3 \times 4.5) - (15 \times 6) = 0$$

$$\mathbf{C_y = +36.75 \text{ kN}}$$

A_y 'yi belirleyelim;

$$(\sum F_y = 0)$$

$$+ A_y - 15 + C_y - (2 \times 3) - 15 = 0$$

$$+ A_y - 15 + (+36.75) - 6 - 15 = 0$$

$$\mathbf{A_y = -0.75 \text{ kN}}$$