

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Doğrusal programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan matematiksel bir tekniktir.(Öztürk, A., 2011).

Doğrusal programlama problemlerinin kullanımı ve çözümü ile ilgili önemli gelişmeler İkinci Dünya Savaşı sonrasında olmuş ve sivil sektörde de yoğun bir şekilde uygulama alanı bulmuştur.(Erdem, İ., 2017).

Doğrusal Programlama (DP), doğrusal karar modelleriyle ilgili kavram ve teknikler bütünüdür. Doğrusal programlama, bütün model parametrelerinin kesin olarak bilindiğini varsayan deterministik bir tekniktir.

Çok sayıda değişkenli ve kısıt denklemlili DP problemleri bilgisayar programları yardımıyla hızlıca çözümlenebildiği için birçok alanda önemli uygulamalardan söz edilebilir. DP'nin bazı uygulama alanları aşağıda verilmiştir:

1. Üretim Planlaması ve Envanter Kontrolü
2. Ulaştırma ve Lojistik Problemleri
3. Atama Problemleri
4. Personel Programlaması
5. Reklam Seçimi Problemleri
6. Sermaye Bütçeleme Problemleri
7. Portföy Seçimi Problemleri
8. Dinamik Yatırım Planlaması
9. Karışım Problemleri
10. Beslenme (Diyet) Problemleri

Doğrusal programlama, değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı olarak amaç fonksiyonunu en uygun(maksimum veya minimum) kılmaya çalışır.

Doğrusal programlama modelinden tutarlı sonuçların elde edilmesi, aşağıdaki varsayımlara bağlıdır.

a) **Doğrusallık Varsayımı:** Bir DP modelinin amaç fonksiyonu ve kısıt denklemleri doğrusal olmalıdır. Bir başka deyişle x_j 'ler birinci dereceden değişkenler olmalıdır. Bir işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişki olduğu varsayılır.

b) **Toplanabilirlik Varsayımı:** Doğrusal programlamada her fonksiyon (amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların sol tarafındaki fonksiyonlar) ilişkin olduğu faaliyetlerin bireysel katkılarının toplamıdır.

Bu varsayımı kısıtlayıcının sol tarafındaki fonksiyon için ele alırsak; değişik üretim faaliyetlerine kaynak olan üretim girdilerinin toplamının, her bir işlem için ayrı ayrı kullanılan girdilerin toplamına eşit olduğunu gösterir. Örneğin, bir ürünün üretimi için üç saate, diğer ürünün üretimi için beş saate gereksinim var ise bu iki ürünü birden üretmek için sekiz saat gereklidir.

c) **Bölünebilirlik Varsayımı:** Bölünebilirlik varsayımı ile karar değişkenlerinin optimal çözüm değerlerinin kesirli değerler alabileceği kabul edilir. Örneğin herhangi bir DP modelinin optimal çözümünde 4.6 adet araba üretileceği gibi bir üretim çıktısı sonucuna ulaşılabilir. Kesirli optimal çözüm değerleri “Tam Sayı Programlama” algoritmalarıyla tamsayılaştırılır.

d) **Kesinlik Varsayımı:** Bir doğrusal programlama modelindeki her bir parametrenin kesin olarak bilindiği ve değişmediği kabul edilir. Yani, birim başına kar ya da maliyetlerin (c_j), her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarlarının (a_{ij}) ve mevcut kaynak miktarlarının (b_i) kesin olarak bilindiği varsayılır.

Bu varsayımın kabul edilmesiyle DP problemlerinin çözümü kolaylaşmaktadır. Ancak, uygulamada bu parametrelerin sık sık değişme eğiliminde olması, DP’de duyarlılık analizi çalışmalarının yürütülmesini gerektirmektedir. Problemin optimum çözümü elde edildikten sonra duyarlılık analizi başlığı altında parametrelerdeki değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkileri incelenebilir.

Bir doğrusal programlama modeli oluşturulurken,

- Öncelikle karar değişkenleri belirlenir.
- Daha sonra amaç kriterine göre amaç fonksiyonu oluşturulur.
- Kısıtlayıcı durumlar dikkate alınarak kısıt denklemleri oluşturulur.
- Pozitiflik şartı ilave edilerek model kurma işlemi tamamlanır.

Doğrusal programlama probleminin matematiksel modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

Amaç Fonksiyonu:

$$\text{Max(veya Min)} Z = f(x) : \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Kısıt Denklemleri:

(1)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Burada,

x_j : Karar değişkenleri ($j = 1, 2, \dots, n$)

Z veya $f(x)$: Amaç fonksiyonu

c_j : Amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayıları olan sabitler ($j = 1, 2, \dots, n$)

a_{ij} : Kısıtların sol tarafında bulunan teknolojik katsayılar ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$)

b_i : Sağ taraf sabitleri ($i = 1, 2, \dots, m$)

anlamındadır.

(1) ile ifade edilen modelin açık gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\text{Max(veya Min)} Z: c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Kısıtlayıcılar(Kısıtlar):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

(1) ile ifade edilen modelin matris notasyonu ile gösterimi ise aşağıdaki biçimdedir:

$$\text{Max(veya Min)} Z : c^T X$$

$$\text{Kısıtlayıcılar(Kısıtlar):} \quad AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Burada,

$$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n) ; X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T ; b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T ; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dir.

Doğrusal programlama problemine ilişkin, yaygın olarak kullanılan tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Uygun Bölge: İşaret kısıtlaması da dahil, tüm kısıtlayıcıları sağlayan karar değişkenlerinin değer kümesidir. Uygun bölge bir bakıma, tüm uygun çözümlerin değer kümesidir.

Köşe noktaları: Uygun bölgenin yapısı gereği, belirli sayıda uygun nokta olacaktır. Bu noktalar, köşe noktaları olarak bilinir.

Uygun Çözüm: Karar değişkenleri değerlerinin özel bir kümesinin, tüm kısıtlayıcıları sağlayan çözümüne uygun çözüm denir. Uygun çözüm, uygun bölgede tek noktada olabilir.

Optimal Çözüm: Amaç fonksiyonunu maksimum veya minimum yapan uygun çözüme optimal çözüm denir.

Bir maksimizasyon problemi için optimal çözüm, uygun çözüm alanında en büyük amaç fonksiyonu değerini veren noktadır. Bir minimizasyon problemi için optimal çözüm, uygun çözüm alanında en küçük amaç fonksiyonu değerini veren noktadır.

Optimal Değer: Optimal çözüme bağlı olarak, amaç fonksiyonun aldığı değer “optimal değer” olarak adlandırılır.

Doğrusal Programlama model kurma örnekleri

Örnek: Dumanlı Dağlar(D.D.) şirketinin üst yönetimi, gelecek dönemde iki farklı üründen kaçar adet üretmeleri gerektiğini belirlemek istemektedir. Aşağıdaki tablo bu ürünlerin üretiminin gerçekleştiği üç ayrı atölyedeki iş gücünün mevcut durumunu, bir birimlik ürün üretiminde atölyelerdeki iş gücünün ne kadarının kullanıldığını ve ürünlerin her birinin getireceği net karı göstermektedir.(Erdem, İ., 2017).

Atölye	Ürün 1	Ürün 2	Mevcut iş gücü
A1	1 saat	0.35 saat	100 saat
A2	0.3 saat	0.20 saat	36 saat
A3	0.2 saat	0.50 saat	50 saat
Kar/Birim	30 TL	15 TL	

Şirket karını maksimum yapmak istediğine göre, “her bir üründen kaçar adet üretmelidir?” sorusuna cevap verebileceğimiz modeli kurunuz.

Karar değişkenlerini,

x_1 : Ürün 1'den üretilecek miktar

x_2 : Ürün 2'den üretilecek miktar

biçiminde tanımlarsak model aşağıdaki gibi olur:

$$\text{Max } Z : 30x_1 + 15x_2$$

$$\text{Kısıtlar : } 1x_1 + 0.35x_2 \leq 100 \quad (\text{A1'deki mevcut işgücü kısıtı})$$

$$0.30x_1 + 0.20x_2 \leq 36 \quad (\text{A2'deki mevcut işgücü kısıtı})$$

$$0.20x_1 + 0.50x_2 \leq 50 \quad (\text{A3'teki mevcut işgücü kısıtı})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek: Bir kişi sadece et, süt ve yumurta yiyerek perhiz yapmaktadır. Bu kişinin günde en az 1 mg A vitamini, 30 mg C vitamini ve 10 mg D vitamini alması gerekmektedir. Buna karşılık besinlerle aldığı kolesterol 80 birim/günü geçmemelidir. Aşağıdaki tabloda, gıda maddelerinin besin içerikleri ve fiyatları verilmiştir. Kişinin amacı, bu perhizi en ucuz yolla gerçekleştirmektir. Amaca uygun doğrusal programlama modelini kurunuz.(Erdem, İ., 2017).

Gıda maddesi	A Vitamini (mg)	C Vitamini (mg)	D Vitamini (mg)	Kolesterol (br)	Fiyat/br.
Et (kg)	1	10	100	50	26 pb
Süt (lt)	1	-	100	70	2.25 pb
Yumurta(adet)	10	10	10	120	0.21 pb
Gereksinimler	≥ 1	≥ 30	≥ 10	≤ 80	

Karar değişkenlerini,

x_1 : Bir günde tüketilecek Et miktarı (kg)

x_2 : Bir günde tüketilecek Süt miktarı (lt)

x_3 : Bir günde tüketilecek Yumurta miktarı (adet)

biçiminde tanımlarsak model aşağıdaki gibi olur:

$$\text{Min } Z : 26x_1 + 2.25x_2 + 0.21x_3$$

$$\text{Kısıtlar : } 1x_1 + 1x_2 + 10x_3 \geq 1 \quad (A \text{ vitamini kısıtı})$$

$$10x_1 + 0x_2 + 10x_3 \geq 30 \quad (C \text{ vitamini kısıtı})$$

$$100x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \quad (D \text{ vitamini kısıtı})$$

$$50x_1 + 70x_2 + 120x_3 \leq 80 \quad (Kolesterol kısıtı)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Grafik Çözüm Yöntemi

Doğrusal Programlama modelinin çözüm yöntemlerinden en basit olanı iki veya üç değişkenli modeller için grafik yöntemidir. Bu yöntemde ilk önce kısıtlayıcıların belirlediği uygun çözüm bölgesi belirlenir. Bu bölgenin konveks bir bölge olduğu ispatlanmıştır. Konveks bölgenin amaç fonksiyonunu maksimum veya minimum yapan noktaları ekstrem noktaları olduğu gerçeğinden yola çıkarak bu bölgedeki tüm ekstrem noktalar için amaç fonksiyonunun aldığı değeri belirleyerek bunlardan amaca uygun olanı seçilir ve optimal çözüme ulaşılmış olur.

İki değişkenli doğrusal programlama problemlerinin grafik yöntemle çözümünde yapılacak işlemler:

- Kısıtlayıcıların grafiğini çizmek
- Uygun bölgeyi belirlemek
- Köşe noktaları incelenerek optimal çözümün bulunması

biçiminde özetlenebilir.

Örnek: (Öztürk, A. S:83). Aşağıdaki problemi grafik yöntem ile çözelim.

$$\text{Min } Z : 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{Kısıtlar: } 2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

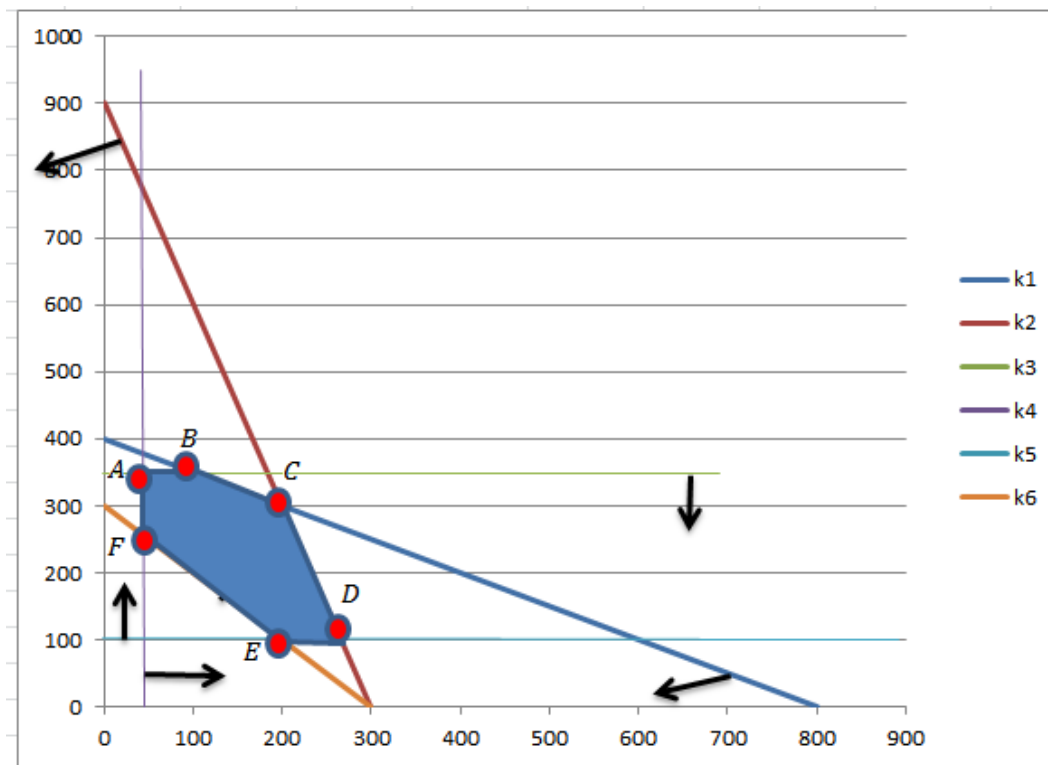
$$x_2 \leq 350$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Z		
A: k3,k4	A(50;350)	2200
B: k1,k3	B(100;350)	2300
C: k1,k2	C(200;300)	2200
D: k2,k5	D(266,66;100)	1133,32
E: k5,k6	E(200;100)	1000
F: k4,k6	F(50;250)	1600

Simpleks Çözüm Yöntemi

Doğrusal Programlama Problem türleri

Normal Maksimum Problemi (Kanonik Şekil):

- Amaç fonksiyonu maksimizasyon tipindedir.
- Tüm kısıtlayıcılar \leq halindedir.
- Tüm karar değişkenleri pozitifdir. (≥ 0 'dır)

Normal Minimum Problemi:

- Amaç fonksiyonu minimizasyon tipindedir.
- Tüm kısıtlayıcılar \geq halindedir.
- Tüm karar değişkenleri pozitifdir. (≥ 0 'dır)

Standart Biçim(Standart Şekil):

- Amaç fonksiyonu maksimizasyon yada minimizasyon olabilir.
- Kısıtlayıcı denklemlerin sağ tarafındaki elemanlar(sabitler) negatif değildir.
- Tüm kısıtlayıcılar eşitlik(denklem) halindedir.
- Tüm karar değişkenleri pozitifdir. (≥ 0 'dır)

SİMPLEKS ALGORİTMASI

MODELLEME VE OPTİMİZASYON DERSİ ÖDEV SORULARI

SON TESLİM TARİHİ : 17 ARALIK 2020

SORU 1. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun optimum noktalarını bulunuz

SORU 2. İhlara vadisinde yürüyüşe çıkan bir kişi; yiyecek, ilk yardım çantası ve giyecek olmak üzere üç şeyi yanında götürmek istemektedir.

Yanına aldığı sırt çantasının kapasitesi 3 kg. dır. Her bir **giyecek** 1 kg, **ilk yardım çantası** 1/4 kg, **yiyecek** ise yaklaşık 1/2 kg ağırlığındadır.

Yiyecek, ilk yardım çantası ve giyeceklerin yürüyüşçüye sağladığı faydalar sırasıyla 5, 4 ve 3 olarak belirlenmiştir.

Yürüyüşçü her bir parçadan en az bir adet, fakat ilk yardım çantasından ikiden fazla almaması gerektiğini önceki yürüyüşlerinden bilmektedir.

Buna göre yürüyüşçünün yanında götürmek istediklerinden kaçar adet alması gerektiğiyle ilgili modeli kurunuz.

SORU 3. Büyük bir alışveriş merkezi müşteri çekmek için özel etkinlikler düzenlemektedir. Genç, orta yaşlı ve yaşı 60'ın üzerinde olan müşterilere çok cazip gelen iki etkinlik, **sergiler** ve **konserler**dir. Bir serginin ve sevilen bir pop şarkıcısının konserinin maliyeti sırasıyla 1500 pb. ve 3000 pb.'dir. Bu iki etkinliğe ayrılan toplam bütçe 15000 pb.'dir. Alışveriş merkezi yöneticisi etkinlikleri izleyenlerin sayısının aşağıdaki gibi olacağını tahmin etmektedir.

	Etkinlik Başına İzleyici Sayısı		
Etkinlik	Genç	Orta yaşlı	60 yaş üzeri
Konser	200	100	0
Sergi	0	400	250

Yönetici en az izleyici sayısının genç, orta yaşlı ve yaşlılar için sırasıyla 1000, 1200 ve 800 olmasını beklemektedir. Problemi, formüle ediniz.