Tanım (Moment Çıkaran Fonksiyon)

X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere t'nin sürekli bir fonksiyonudur ve

$M_X(t) = E[e^{tX}]$ biçimindedir.

X rastgele değişkeni kesikli ise: $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum e^{tx} f(x)$

X " " sürekli " : $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f(x)\,dx$

dır.

Teorem: X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$ olsun

$$\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = m_k = E(X^k) \text{ dır.}$$

Teorem: a ve b sabitler olmak üzere

i) $M_{X+a}(t) = E[e^{t(X+a)}] = e^{at} M_X(t)$

ii) $M_{bX}(t) = E[e^{tbX}] = M_X(bt)$

iii) $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E[e^{t\left(\frac{X+a}{b}\right)}] = e^{\frac{a}{b}t} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{8}\binom{3}{x}$, $x = 0, 1, 2, 3$

verilyor. X rastgele değişkeni için moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

$$\boxed{M_X(t) = E[e^{tX}]}$$

X kesikli $\Rightarrow \sum_{x=0}^{3} e^{tx} \frac{1}{8}\binom{3}{x}$

$$= \frac{1}{8}\sum_{x=0}^{3} e^{tx}\binom{3}{x}$$

$$= \frac{1}{8}[1 + 3e^{t} + 3e^{2t} + e^{3t}]$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}(1+e^{t})^3}$$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1}}{x!} & , x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \text{d.d} \end{cases}$$

Verilsin. $m_t(x)$, m_1 ve m_2 yi bulunuz.

X kesikli

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-1}}{x!}$$

$$= e^{-1} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}}{x!}}_{e^{e^t}}$$

$$= e^{-1} e^{e^t}$$

$$\boxed{M_x(t) = e^{(e^t - 1)}}$$

$$\left.\frac{d^k m_k(t)}{d^k(t)}\right|_{t=0} = m_k \quad \text{idi.}$$

1. türev $m_1 = \qquad = 1$

2. türev $m_2 = \qquad = 2.$

$$Var(X) = m_2 - m_1^2$$
$$= 2 - 1^2 = \underline{\underline{1}}$$

Bir Dağılımda Çarpıklık ve Basıklık

Çarpıklık, bir dağılımın simetrililikten ayrılma yada simetrik olmayış derecesidir.

Çarpıklık Katsayısı $= Ç.K = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$

$Ç.K = 0$ ise simetrik dağılım

$Ç.K > 0$ ise sağa çarpık dağılım

$Ç.K < 0$ ise sola çarpık dağılım

Basıklık, bir dağılımın sivrilik derecesidir.

Basıklık Katsayısı $= \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ formülü ile hesaplanır.

B.K $= 0$ ise dağılım normaldir.

B.K > 0 ise " sivridir.

B.K < 0 ise " basıktır.

Tanım: (Karakteristik Fonksiyon): Rastgele değişkenin moment ürete fonksiyonu bazen bulunamayabilir. Ancak karakteristik fonksiyon her zaman vardır. X rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere t nin sürekli bir fonksiyonudur ve

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$ biçiminde tanımlanır.

X rastgele değişkeni kesikli ise $\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum e^{itx} f(x)$

X rastgele değişkeni sürekli ise $\phi_X(t) = \int e^{itx} f(x)\,dx$ biçimindedir.

Karakteristik fonksiyon

$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E[\cos(tX)] + i\,E[\sin(tX)]$ biçiminde de ifade edilebilir.

$$\boxed{e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)}$$

Tanım: X rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu biliniyorsa X in momentleri

$$m_k = E[X^k] = \frac{\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi_X(t)\Big|_{t=0}}{i^k}$$

biçiminde elde edilebilir.

Örnek: X rastgele değişkeni için

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & ; x=0,1,\dots,n \\ 0 & ; \text{d.d}\end{cases}$$

→ Binom dağılımın olasılık fonk.

verilsin. $(n\in\mathbb{N})$ $(1-p=q,\ p+q=1)$

a) X in karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

b) Karakteristik fonksiyon yardımıyla X in beklenen değerini bulunuz.

a) X kesikli

$$\phi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{x=0}^{n}e^{itx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^{it})^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\left[pe^{it}+(1-p)\right]^n$$

b)

$$m_1=E(X)=\frac{\frac{\partial}{\partial t}\phi_X(t)\Big|_{t=0}}{i}$$

$$\frac{\frac{d}{dt}\left[\left[pe^{it}(1-p)\right]^n\right]\Big|_{t=0}}{i}$$

$$=\frac{n\left[ipe^{it}\right].\left[pe^{it}(1-p)^n\right]^{n-1}\Big|_{t=0}}{i}$$

$$=\frac{n.\left[\cancel{i}p\,(\overbrace{\cancel{p}+1-\cancel{p}}^{1})^{n-1}\right]}{\cancel{i}}=\underline{\underline{np}}$$