Teorem: $t=0$ için $\phi_X(t)=1$ dir.

Bazı Önemli Eşitsizlikler

Rastgele değişkenlerin olasılıkları yada momentleri için bir alt yada üst sınır veren eşitsizlikler söz konusudur.

Markov Eşitsizliği:

$g(x)$, X rastgele değişkeninin negatif değerler almayan fonksiyonu olmak üzere $k\in\mathbb{R}^+$ için $P(g(x) > k) \leq \dfrac{E(g(x))}{k}$ biçiminde tanımlanır.

Chebyshev Eşitsizliği:

Markov eşitsizliğinin bir sonucudur ve kesikli yada sürekli bir rastgele değişken olasılıkları için alt yada üst sınırı verir.

X rastgele değişkeninin beklenen değeri $E[X]=\mu$ ve varyansı $Var(X)=\sigma^2$ olmak üzere Chebyshev eşitsizliği

$$P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{yada} \quad P(|X-\mu| \leq k.\sigma) > 1-\frac{1}{k^2}$$

biçiminde tanımlanır.

Soru: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{20}x, & x=2,3,4,5,6 \\ 0, & d.d \end{cases}$ veriliyor.

a) M_1, M_2, μ_1, μ_2 değerlerini hesaplayınız.

b) $Y=2X$ olarak tanımlanan Y rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

a) $M_1 = E(x) = \sum_{x=2}^{6} x.\frac{1}{20}x = \frac{1}{20}\sum_{x=2}^{6} x^2$

$= \frac{1}{20}\left[2^2+3^2+4^2+5^2\right]$

$= \underline{4,5}$

$$m_2 = E(x^2) = \sum_{x=2}^{6} x^2 \cdot \frac{1}{20} x$$

$$= \frac{1}{20} \sum x^3$$

$$= \frac{1}{20} \left[2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \right]$$

$$= \underline{\underline{22}}$$

$$\mu_1 = E[x - E(x)] = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$= 22 - (4{,}5)^2$$

$$= \underline{1.75}$$

b) $E(Y) = E(2x) = 2E(x)$

$$= 2 \cdot (4{,}5)$$

$$= \underline{\underline{9}}$$

$$\left(Var(Y) = Var(2x) = 4V(x) = 4 \cdot (1{,}75) = 7 \right)$$

$Y = \frac{X}{3}$ ün varyansı nedir?

$$V(Y) = \frac{1}{9} V(x) = \frac{1}{9} V(x)$$

$$= \frac{1}{9}(1.75) = 0.1944$$

Soru:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{d.d} \end{cases}$$ veriliyor.

X in moment üretan fonksiyonunu bulunuz.

$\boxed{M_x(t) = E(e^{tx})}$ idi.

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b e^{tx} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\,dx \Rightarrow \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t} e^{tx} \Big|_a^b \right) = \boxed{\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}}$$

Soru: Bir X rastgele değişkeninin beklenen değerinden (ortalamasından) 3σ kadar sapma göstermesi olasılığının en büyük değerini bulunuz.

$$P(|X-E(X)| > 3\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Üst sınır

Formül : $\boxed{P(|X-E(X)| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}}$

$k=3$

$$\Rightarrow P(|X-E(X)| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

Soru: Bir sınıftaki öğrencilerin bazı notları ortalaması 60, ve standart sapması 2 olan bir rastgele değişken olduğuna göre; bu sınıftaki bir öğrencinin notunun 50 ile 70 arasında olması olasılığı için bir alt sınır bulunuz.

NOT : Chebyshev eşitsizliği olasılık için alt sınır, üst sınır belirler.

X : Bir sınıftaki öğrencilerin bazı notu

$E(X) = \mu = 60$

$\sigma = 2$

Alt Sınır

$\boxed{P(|X-\mu| \leq k\sigma) > 1-\frac{1}{k^2}}$

$$P(50 \leq X \leq 70) > ?$$

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow P(-k\sigma+\mu \leq X \leq k\sigma+\mu) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$$P(-2k+60 \leq X \leq 2k+60) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$k=5$

$$\Rightarrow P(50 \leq X \leq 70) > \underbrace{1-\frac{1}{5^2}}_{0.96}$$

$$P(50 \leq X \leq 70) > 0.96$$

Soru: Bir para tura gelinceye kadar atılsın. X rastgele değişkeni "ilk tura gelinceye kadar yapılan atış sayısı" olarak tanımlansın.

a) X in olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

b) X in beklenen değerini bulunuz.

a) X: ilk tura gelinceye kadar yapılan atış sayısı

$S = \{T, YT, YYT, YYYT, \ldots\}$

$X = 1, 2, 3, \ldots$

$P(X=1) = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$P(X=3) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\vdots$

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

Soru: İki farklı marka otomobil lastiğinden hangisinin tercih edileceğini belirlemek üzere yapılan incelemede A marka lastikten ortalama ömürlerinin 40.000 km ve standart sapmasının 2.000 km olduğunu, B marka lastiklerin ortalama ömrünün 50.000 km ve standart sapmasının 6.000 km olduğu anlaşılmıştır. Buna göre hangi markanın tercih edilmesi gerektiğini belirtiniz.

	A	B
$\bar{X}$: Ortalama :	40.000	50.000 km
σ : Standart S :	2.000	6000 km

$DK(A) = \frac{2000}{40000} \times 100 = 5$

$DK(B) = \frac{6000}{50000} \times 100 = 12$

→ Değişim katsayısı küçük olan tercih edilmelidir.

$DK(A) < DK(B)$ olduğundan A marka lastik tercih edilmelidir.

(iki seri hangisi daha iyi şeklinde karşılaştırmalarda D.K kullanılır)