Soru: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{56}(x+3) & , 0 \le x \le 8 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$ veriliyor.

Bu rastgele değişkenle ilgili bazı hesaplamalar $m_1 = 4.76$, $m_2 = 27.43$, $m_3 = 171.89$, $\mu_3 = -4.1$, $\mu_4 = 47.37$ olarak elde edilmiştir.

Çarpıklık ve basıklık katsayılarını bularak yorumlayınız.

$$Ç.K(\gamma_3) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad BK = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$
$$= 27.43 - (4.76)^2$$
$$\boxed{\mu_2 = 4.77 = \sigma^2} \Rightarrow \sigma = 2.18$$

$$Ç.K(\gamma_3) = \frac{-4.1}{(4.77)(2.18)} = -0.3$$

$ÇK = -0.3$ olduğundan verilerin dağılışı sola çarpıktır.

$$BK(\gamma_4) = \frac{47.37}{(4.77)^2} - 3 = -0.9$$

$BK = -0.9 < 0$ olduğundan verilerin dağılımı basıktır.

Hem sola çarpık hemde basıktır.

Soru: X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 1, 2 \\ \frac{1}{2} & , x = 3 \end{cases}$$ olarak veriliyor.

a) Moment çıkaran fonk bulunuz.

b) Karakteristik fonksiyonu bulunuz.

a) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum e^{tx} f(x)$

$$= \sum_{x=1}^{3} e^{tx} f(x)$$

$$= \frac{e^{1t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{2e^{3t}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{t} + e^{2t} + 2e^{3t}\right]$$

b) $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum e^{itx} f(x)$

$$= \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{i2t}}{4} + \frac{2e^{i3t}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{it} + e^{2ti} + 2e^{3ti}\right)$$

NOT: Aynı rastgele değişken için $\phi_X(t) = M_X(it)$ olur.

— Rastgele Değişkenin Dağılımları —

Dağılımlar, rastgele değişkenin tanım aralığındaki tavrını gösteren ifadelerdir. Rastgele değişkenlerin kesikli veya sürekli olması durumuna göre dağılımlarda kesikli yada sürekli olur.

A) Kesikli Dağılımlar

1) Bernoulli Dağılımı

Bir paranın atılması, bir zarın atılmasında belli bir yüzün gelmesiyle ilgilenme, bir oyunun kazanılması veya kaybedilmesi gibi denemeler için genellikle başarılı yada başarısız olarak nitelendirilen iki sonuçla ilgilenilir. Böyle denemelere bernoulli denemeleri denir.

Bir rastgele değişken için yalnız 2 sonuç varsa bu rastgele değişkene bernoulli rastgele değişkeni denir.

Üzerinde durulan olayın gerçekleşmesi (başarı) olasılığı p, gerçekleşmeme (başarısızlık) olasılığı $q = 1-p$ olur. Buna göre bir deneme için $P(X=1) = p$ ve $P(X=0) = q$ demektir.

$$f(x) = P(X=x) \begin{cases} p^x q^{1-x}, & x=0,1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

dağılımına "Bernoulli Dağılımı" denir.

X rastgele değişkeni bernoulli dağılımına sahiptir. Yani $X \sim B(p)$

Bernoulli dağılımının parametresi p (başarı durumu) dır.

Bernoulli Dağılımının Ortalaması

$E[X] = \sum x f(x)$ idi. O zaman

$$E[X] = \sum_{x=0}^{1} x p^x q^{1-x}$$

$$= 0 \cdot p^0 \cdot q^{1-0} + 1 \cdot p^1 \cdot q^{1-1} = p$$

Bernoulli Dağılımının Varyansı

$$Var(X) = E(X^2) - (\underbrace{E(X)}_{p})^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x q^{1-x} = 0^2 \cdot p^0 q^{1-0} + 1^2 \cdot p^1 q^{1-1} = p$$

$$V(X) = p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

$$= p \cdot q$$

Yani kısaca,

Bernoulli dağılımının ortalaması $E[X] = \mu = p$

" " Varyansı $V(X) = \sigma^2 = p \cdot q$

" " Standart Sap. $\sigma = \sqrt{pq}$

" " Moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t) = E[e^{tX}] = q + e^t p$

" " Karakteristik Fonksiyonu $\Phi_X(t) = q + e^{it} p$

2) Binom Dağılımı (iki Terimli Dağılım)

X raastgele değişkeni n bağımsız denemenin başarılı olanlarının toplam sayısı olsun.
(Buradaki denemelerin herbiri bernoulli denemesidir.)

Bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p, başarısız olma olasılığı $1-p=q$ iken aşağıdaki şartları sağlayan X rastgele değişkenine binom rastgele değişkeni denir.

i) Her bir denemenin başarılı ve başarısız gibi iki sonucu vardır.

ii) Denemeler birbirinden bağımsızdır. (Çekim yapılıyorsa iadelidir.)
(Yani her bir topun çekiliş şansını eşit hale getiriyoruz.)

iii) Denemelerin toplam sayısı n dir.

Böylece X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x)=P(x,n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, & x=0,1,\dots,n\\ 0, & d.d\end{cases}$$

biçimindedir. Bu dağılıma "Binom Dağılımı" denir.

X, Binom dağılımına sahip rastgele değişken olsun.

$\mu=E[X]=np$

$\sigma^2=V(X)=n.p.q$

$M_X(t)=(q+pe^t)^n$

$\Phi_X(t)=(q+e^{it})^n$

Örnek: 4 yanlış 1 doğru cevabı bulunan bir sınavda 20 soru soruluyor. X rastgele değişkeni doğru işaretlenen soru sayısını gösterdiğine göre

a) Herhangi bir öğrencinin sınavdan 50 alma olasılığı

b) Beklenilen doğru cevap sayısını bulunuz.

c) Öğrencinin hiç doğru cevap verememe olasılığını bulunuz.

X: Doğru işaretlenen soru sayısı $X=0,1,\ldots,20$

$n=20$ soru

$p=\frac{1}{5}$

$q=\frac{4}{5}$

Binom Dağılımı

$$f(x)=\begin{cases}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} & , x=0,1,\ldots,20\\ 0 & , d.d\end{cases}$$

a) 10 soru yaparsa 50 alır. Yani

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

b) $E[X]=np=20\cdot\frac{1}{5}=4$

c) $P(X=0)=\binom{20}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{20-0}$

→ Hepsini doğru yapma olasılığı

$P(X=20)=\sum_{x=1}^{20}f(x)=1$ dır.

3) Geometrik Dağılım:

Rastgele değişkenin ilk başarıyı elde etmek için gerekli deneme sayısını gösterdiği dağılımdır. Başarı olasılığı p nin sabit olduğu bağımsız Bernoulli denemelerinin ilk kez ortaya çıkıncaya kadar yinelendiği (tekrarlandığı) durumdu

X rastgele değişkeni geometrik dağılıma sahipse X in olasılık fonksiyonu

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}p\cdot q^{x-1} & , x=1,2,\ldots\\ 0 & , d.d\end{cases}$$

biçimindedir.

Geometrik Dağılımın;

$$\mu = E[X] = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$$\Phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$$

4) Poisson Dağılımı

Poisson Dağılımı genel olarak belli bir zaman, alan yada hacimde ortaya çıkan olay sayısını modellemede kullanılır. Poisson dağılımına örnek olarak

- Bir kavşakta meydana gelen trafik kazalarının sayısı
- Bir santrale bir günde gelen telefonların sayısı.
- Bir e-posta sunucusuna gelen postaların sayısı

verilebilir.

X rastgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

biçimindedir.

Burada λ ($\lambda > 0$) dağılımın parametresidir ve birim, zaman, alan, hacimde ortaya çıkması beklenen olay sayısını ifade eder.

$$E[X] = \mu = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\Phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

5) Düzgün Dağılım (Tek Biçimli Dağılım)

X rastgele değişkeninin alabileceği değerler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve X in

olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x_i) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

olsun. Bu durumda X rastgele değişkenine kesikli düzgün rastgele değişken

ve dağılımına da kesikli düzgün dağılım denir.

$$E[X] = \frac{N+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{N^2-1}{12} \quad \text{dır.}$$

Sürekli Dağılımlar

Normal dağ.
Standart Dağ.
Düzgün Dağ.
Üstel ~~Dağ~~.