~~Müh 1~~

# Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımı –

Bazı uygulamalarda rastgele değişken bir aralık yada birçok aralıktan her değeri alabilir.

**Tanım:** X, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rastgele değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ fonk. X rastgele değişkeninin "olasılık yoğunluk fonk" denir.

1) $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$f(x)$ olasılık yoğunluk fonk. sahip olan X sürekli rastgele değişkeninin herhangi c ve d değerleri arasında bulunma olasılığı ( P, C, X )

$P(c < x < d) = \int_{c}^{d} f(x)\,dx$ ile bulunur.

**NOT:** $P(c < x < d) = P(c \leq x \leq d) = P(c < x \leq d) = P(c \leq x < d)$

**NOT:** Sürekli bir X rastgele değişkeninin belli bir x değerini alma olasılığı 0 d

[ $P(X = x) = 0$ dır. ]

**Tanım (Dağılım Fonksiyonu):** X, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonk. sahip sürekli rastgele değişken olsun. X in dağılım fonksiyonu

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$ olarak tanımlanır.

**NOT:** X sürekli bir rastgele değişken ise dağılım fonksiyonunda bütün x değerleri için süreklidir.

**Teorem:** Sürekli X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonk. $f(x)$ ve dağılım fonk. $F(x)$ olsun.
Bu taktirde bütün x değerlerinde diferansiyellenebilir bir $F(x)$ fonk. için

$f(x) = \dfrac{\partial F(x)}{\partial x}$ ve $a \leq b$ o.ü herhangi a ve b sayıları için

$\cancel{P}(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$ dır.

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

NOT: Dağılım fonksiyonuna, birikimli dağılım fonk. da denilmektedir.

NOT: Dağılım fonk. artan bir fonksiyondur.

NOT: $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Örnek: $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ verilsin.

a) $P(0,25 < x < 0,75) = ?$

b) $P(x > 0,25) = ?$

a) $P(0,25 < x < 0,75) = \int_{0,25}^{0,75} f(x)dx = \int_{0,25}^{0,75} 1\,dx = x \Big|_{0,25}^{0,75} = \boxed{0,50}$

b) $P(x > 0,25) = \int_{0,25}^{1} 1\,dx = x \Big|_{0,25}^{1} = \boxed{0,75}$

Örnek: Belli bir tipteki elektrik ampüllerinin dayanma süresi (saat) için

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3}, & 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

veriliyor. $a = ?$

X sürekli bir rastgele değişken olup $f(x)$ olasılık fonk. olduğundan

$\int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3} dx = 1$ olmalı.

$$\frac{-a}{2x^2} \Big|_{1500}^{2500} = 1 \Rightarrow \frac{-a}{2(2500)^2} - \frac{(-a)}{2(1500)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 7031250}$$

Örnek: Bir önceki örnekte rastgele seçilen bir ampülün dayanma süresinin 2000 saat ve daha fazla olma olasılığı?

$P(x \geq 2000) = ?$ $\int_{2000}^{2500} \frac{7031250}{x^3} dx = \boxed{0,3164}$

Örnek: $f(x) = \begin{cases} k.(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$

a) k sabitini bul.

b) Dağılım fonk. bul.

c) $P(X \leq 1/2) = ?$

a) $\int_0^1 k(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 k(1-x)\,dx = k\int_0^1 (1-x)\,dx$

$$k\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k=2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{d.d} \end{cases}$$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = \int_0^x 2(1-s)\,ds$

$$= 2\int_0^x (1-s)\,ds$$

$$= 2\left(\int_0^x 1\,ds - \int_0^x s\,ds\right)$$

$$= 2.\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \cancel{2}.\left(\frac{2x - x^2}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2x - x^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 2x - x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P(X \leq 1/2) = F(1/2) = 2.\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & d.d \end{cases}$

a) $F(x) = ?$

b) Dağılım fonk yardımıyla olasılıkları bulunuz.

$P(0.20 < X \le 0.50) = ?$

$P(X \le 0.75) = ?$

$P(X > 0.35) = ?$

Soru: $f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}, & x = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$

X in dağılım fonk bul.

X kesikli. ($0 < x < 3$ olsaydı sürekli)

[Önce olasılık fonk yaz sonra dağılım fonk bul]

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = P(X=x)$ | $8/27$ | $12/27$ | $6/27$ | $1/27$ |

$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 8/27$

$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Dağılım Fonk

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $F(x) = P(X \le x)$ | $8/27$ | $20/27$ | $26/27$ | $27/27 = 1$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 8/27, & 0 \le x < 1 \\ 20/27, & 1 \le x < 2 \\ 26/27, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

MB6

# İki Boyutlu Rastgele Değişkenler

Bir deney yapıldığında aynı deneyle ilgili birçok rastgele değişken aynı andaki durumu düzenmek gerekebilir.

Örneğin kimyasal bir deney yapıldığında deneyin sonucu ile deneyin yapıldığı sıcaklık arasında ilişki var mıdır? Yoksa bağımsız mıdır?

Bir kitleden rastgele seçilen belli sayıdaki kişilerin boy uzunluğu ile ağırlıkları bir arada değerlendirebilir.

$X$: Boy 1.70
$Y$: Ağırlık 63

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (x,y) = (1.70, 63)$

Böyle durumlarda iki boyutlu (iki değişkenli) rastgele değişkenler ele alınır.

Örnek: İki tane hilesiz madeni para havaya atıldığında $X$ değişkeni turaların sayısı, $Y$ değişkeni yazıların sayısı olsun.

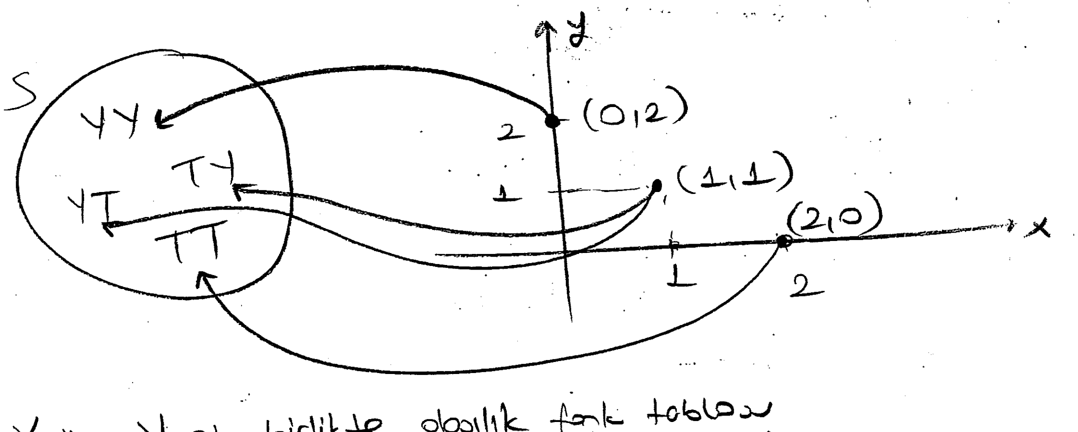
$S = \{YY, TY, YT, TT\}$ örnek uzayıdır.

$X$: Turaların sayısı
$Y$: Yazıların sayısı

$X$ in aldığı değerler: $x = 0, 1, 2$

$Y$ " " : $y = 0, 1, 2$

$X$ ile $Y$ nin birlikte aldığı değerler $(x_i, y_j) = (2,0), (1,1), (0,2)$




X ile Y nin birlikte olasılık fonk. tablosu

| X\Y | 0 | 1 | 2 | P(X=x) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| 1 | 0 | 2/4 | 0 | 2/4 |
| 2 | 1/4 | 0 | 0 | 1/4 |
| P(Y=y) (Sütunları topla) | 1/4 | 2/4 | 1/4 | 1 Toplam olasılık |

→ $P(X=1, y=1)$

İmkansız olay

Satırları topla +

* Sütunların toplamı $P(Y=y)$ değerlerini verir.
* Satırların toplamı $P(X=x)$ olasılık top. verir.