

Dual Simpleks Yöntem

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem 'Dual Simpleks Yöntem'dir. Bu yöntem çözümün optimal ancak uygun olmadığı durumlarda kullanılır. (Bayraktar, D., Çebi, F. 2003)

Maksimizasyon amaçlı probleme ait tablonun $c_j - z_j$ satırındaki değerler ≤ 0 iken çözüm(TDD) sütunundaki değerlerin en az biri "negatif" işaretliyse veya minimizasyon amaçlı bir problemin çözüm tablonun $c_j - z_j$ satırındaki değerlerin tümü ≥ 0 iken çözüm(TDD) sütununda yer alan değerlerin en az biri "negatif" işaretli ise dual simpleks yöntemine başvurulur.

Dual Simpleks yöntemde önce çözümden çıkacak değişken, daha sonra çözüme girecek değişken belirlenir.

Temelden çıkacak değişken çözüm sütununda negatif değere sahip değişkenler arasından seçilir. Çözüm sütununda mutlak değerce en büyük "–" değerli değişken temelden çıkacak olan değişkendir (anahtar satır).

Temele girecek değişken çözümde bulunmayan değişkenler arasından seçilir. Bunun için $c_j - z_j$ satırındaki değerler anahtar satırdaki karşı gelen değerlere bölünür.

Paydaya gelen sayılar arasında "0" veya "+" değerli olanlar dikkate alınmaz. Problem maksimizasyon amaçlı ise, en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Problem minimizasyon amaçlı bir problem ise, mutlak değerce en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Çözümle ilgili diğer işlemler primal simpleks yöntemdeki gibidir. Bir sonraki tabloda $c_j - z_j$ satırı optimallik şartını sağlarken çözüm sütunundaki değerlerin en az biri "–" işaretli ise dual simpleks yöneme devam edilir.

Elde edilen tablonun çözüm sütunundaki değerlerin hiçbiri "–" işaretli değilse ve $c_j - z_j$ satırı optimallik şartını sağlıyorsa optimal ve uygun çözüm elde edilmiş demektir.

Dual Simpleks yöntem, çoğunlukla,

- sağ taraf sabitlerindeki değişikliklerden sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde

- modele yeni bir kısıt ilave edildikten sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde

- normal minimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. (Bayraktar, D., Çebi, F. 2003)

$$Z_{\min.} = 3X_1 + 2X_2$$

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

TD	3 X_1	2 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	TD
$0S_1$	-3	-1	1	0	0	-3
$0S_2$	-4	-3	0	1	0	-6
$0S_3$	1	1	0	0	1	3
Z_j	0	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$	3	2	0	0	0	

	3 X_1	2 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	
$0S_1$	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
$2X_2$	4/3	1	0	-1/3	0	2
$0S_3$	-1/3	0	0	1/3	1	1
Z_j	8/3	2	0	-2/3	0	4
$C_j - Z_j$	1/3	0	0	2/3	0	

	3 X_1	2 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	
$3X_1$	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
$2X_2$	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
$0S_3$	0	0	-1/5	2/5	1	6/5
Z_j	3	2	-1/5	-3/5	0	21/5
$C_j - Z_j$	0	0	1/5	3/5	0	

ÇÖZÜM:

$$x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}, s_3 = \frac{6}{5}, s_1 = 0, s_2 = 0, \text{ Min } Z = 21/5$$

winQSB çözüm değerlerinin yorumlanması

ÖRNEK. Bir işletme ürettiği yeni ürünün tanıtımı için değişik reklam kampanyaları düşünmektedir. İşletme bu iş için 200 milyar TL’lik bir bütçe ayırmıştır ve şirketin önünde değişik reklam alternatifleri bulunmaktadır. Şirket reklam kampanyası için metin yazarı, oyuncu ve editörlerin her birini en fazla 500 saat çalıştırabilir. Aşağıdaki tabloda ise her bir reklam kampanyasının maliyeti, reklamın ulaşabileceği potansiyel müşteri sayısı, metin yazarı, oyuncu ve editörlerin ilgili reklam için harcadıkları zaman verilmiştir

Reklam No	Reklam Türü	Maliyet (Milyar TL)	Ulaşılabilecek potansiyel müşteri sayısı (bin)	Metin yazarı için gerekli zaman (Saat)	Oyuncu için gerekli zaman (Saat)	Editör için gerekli zaman (Saat)
1 (X1)	TV	140	500	300	300	200
2 (X2)	Gazete	50	100	150	-	150
3 (X3)	İnternet	25	600	100	-	-
4 (X4)	Dergi	10	20	150	150	250
5 (X5)	Broşür	20	15	50	-	-
6 (X6)	İlan Panosu	40	40	25	125	-

Ulaşılabilecek potansiyel insan sayısını maksimum yapacak olan model kurulduktan sonra çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
X1	1,0000	500,0000	500,0000	0	basic
X2	0	100,0000	0	100,0000	at bound
X3	1,0000	600,0000	600,0000	0	basic
X4	0	20,0000	0	20,0000	at bound
X5	1,0000	15,0000	15,0000	0	basic
X6	0	40,0000	0	40,0000	at bound
Objective	Function	(Max.) =	1.115,0000		
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
C1	185,0000	<=	200,0000	15,0000	0
C2	450,0000	<=	500,0000	50,0000	0
C3	300,0000	<=	500,0000	200,0000	0
C4	200,0000	<=	500,0000	300,0000	0

Bu sonuçlara göre;

- İşletme reklam kampanyası için hangi reklam türlerini seçmelidir?
- Amaca katkısı en fazla olan reklam türü hangisidir?
- İşletmenin elinde, harcamayabileceği para kalmış mıdır? Kaldıysa ne kadardır?
- Bu reklam kombinasyonu ile kaç kişiye ulaşılacaktır?

TAMSAYILI PROGRAMLAMA

Doğrusal programlama problemlerinin çözüm sonuçları, çoğunlukla tamsayı olmayan pozitif sayılardır. Yani kesirli ya da ondalıklı sayılardır.

Günlük hayatta sonuçların, tamsayılarla ifade edilmesi gereken durumlar vardır. Örneğin otomobil, televizyon, masa, sandalye gibi malların üretilecek miktarlarının tamsayılarla ifade edilmesi gerekir. Bu tür şartlarla analiz yapma durumunu belirten modele, Tamsayılı Programlama modeli denir.

Bir Tamsayılı Programlama Modeli genel gösterimle,

$$[\text{Max} / \text{Min}] Z : \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Kısıt Denklemleri:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad ; (j = 1, \dots, n)$$

$$x_j \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

Z : Amaç fonksiyonu

x_j : Karar değişkenleri

c_j : Amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayıları olan sabitler

a_{ij} : Kısıtların sol tarafında bulunan teknolojik katsayılar

b_i : Sağ taraf sabitleri

anlamındadır.

Değişkenlerin tümünün değil de bazılarının tamsayılı değerler alması istenen problemlere, **Karma Tamsayılı Programlama Problemi** adı verilir.

Tamsayılı Programlama problemlerinin çözümünde,

- Tam olmayan çözümün yuvarlaklaştırılması
- Grafik çözüm
- Gomory Kesme Düzlemi algoritması
- Dal-Sınır algoritması

tekniklerinden yararlanılır.

Gomory Kesme Düzlemi Algoritması

Bu algoritmada başlangıç noktası olarak, doğrusal programlama probleminin simpleks çözüm yöntemiyle elde edilen optimal çözümü ele alınır.

Eğer bu çözüm, tamsayılı bir çözüm değilse, doğrusal programlama problemine ek bir kısıtlama ilave edilir. Bu ek kısıtlama Gomory'nin geliştirdiği "Kesme Düzlemi" kuralına göre elde edilir.

Bu kuralda; simpleks yöntem ile elde edilen optimal çözüm değerlerinden, en büyük kesir değerli karar değişkeni seçilir.

Sonra bu değişkenin satırında bulunan rakamlar, tamsayılı ve kesirli olarak yazılır(Değişkenlerin katsayıları = TDD biçiminde). Tamsayılı kısımlar, denklemin sağ tarafında toplanır. Sağ tarafta yer alan tamsayılı değerler atılır ve sadece kesirli rakam bırakılır. Bu durumda denklem, eşitsizlik biçimine dönüşecektir ve yeni bir kısıtlayıcı elde edilmiş olacaktır.

Elde edilen bu ek kısıtlayıcı, boş değişken kullanılarak eşitlik haline getirilir ve tamsayılı olmayan optimal çözüm tablosuna eklenerek dual simpleks çözüm yapılır.

Şayet kesirli kısımdaki rakamlar arasında negatif olanı varsa, bunun yerine eşleşği kullanılır. Yani kesirli rakamların negatif olmaması gerekir.

NOT: İki kesirli sayı(x ve y olsun) arasındaki fark, bir tamsayı ise bu iki sayıya eşleşik denir ve $x \equiv y$ ile gösterilir.

Örneğin, $X = -2/3$ ise bunun eşleşği $y = 1/3$ tür. Yani, $-2/3 \equiv 1/3$ tür.

Örneğin, $-4/9 \equiv 5/9$ dur.

Kesirli sayılar, tam ve kesirli kısım olarak

$$4/3 = 1 + 1/3 \quad , \quad 5/4 = 1 + 1/4 \quad , \quad 2/3 = 0 + 2/3 \quad , \quad -2/3 = -1 + 1/3$$

biçiminde yazılırlar.

Örnek: Aşağıdaki problemin optimal çözümünü bulunuz.

$$\text{Maksimum } Z : 3x_1 + x_2$$

Kısıtlayıcılar:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

Çözüm: Problem, bir tamsayılı programlama problemidir. Önce kısıtlardaki eşitsizlikler eşitlik haline getirilerek simpleks çözüm yapılır.

$$\text{Maksimum } Z : 3x_1 + x_2$$

Kısıtlayıcılar:

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$$

$$3x_1 - 4x_2 + s_2 = 12$$

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
0	S1	8	1	2	1	0
0	S2	12	3	-4	0	1
	Zj	0	0	0	0	0
	Zj-Cj	-	-3	-1	0	0

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
0	S1	4	0	10/3	1	-1/3
3	X1	4	1	-4/3	0	1/3
	Zj	12	3	-4	0	1
	Zj-Cj	-	0	-5	0	1

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10
	Zj	18	3	1	15/10	5/10
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10

$Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

Optimal çözüm:

$$x_1 = 28/5, \quad x_2 = 6/5, \quad \max Z = 18$$

biçimindedir.

x_1 ve x_2 'nin tamsayı olması istenmekte fakat optimal çözümde tamsayılı değerler almıyorlar.

Gomory Kesme Düzlemi Algoritması ile çözüm yapalım.

$$x_1 = 28/5 = 5 + 2/5$$

$$x_2 = 6/5 = 1 + 1/5$$

olup, en büyük kesirli değere sahip olan değişken x_1 seçilir.

Son tablodaki x_1 'in satırında bulunan sayılar, tamsayı ve kesirli olarak aşağıdaki biçimde yazılır:

X1	X2	S1	S2	TDD
1	0	$4/10 = 2/5$	$2/10 = 1/5$	$28/5$
1+0	0+0	$0+2/5$	$0+1/5$	$5+3/5$

$$(1+0) x_1 + (0+0) x_2 + (0+2/5) s_1 + (0+1/5) s_2 = 5+3/5$$

Tamsayı kısımlar denklemin sağ tarafında toplanır:

$$0x_1 + 0x_2 + (2/5) s_1 + (1/5) s_2 = 3/5 + (5 - 1x_1 - 0x_2 - 0s_1 - 0s_2)$$

$$(2/5) s_1 + (1/5) s_2 \geq 3/5$$

olur. Bu eşitsizlik, ek kısıtlamamızdır. Eşitlik haline getirip, tamsayı olmayan optimal çözüm tablosuna eklenerek **dual simpleks yöntem** ile çözüm yapılır.

$$(2/5) s_1 + (1/5) s_2 \geq 3/5$$

$$-(2/5) s_1 - (1/5) s_2 \leq -3/5$$

$$-(2/5) s_1 - (1/5) s_2 + s_3 = -3/5$$

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10	0
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10	0
0	S3	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	1
	Zj	18	3	1	15/10	5/10	0
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10	0

Dual simpleks yöntem ile çözümde önce anahtar satır seçilir.

TDD'leri içinde, işaret olarak negatiflerin mutlak değerce en büyüğü anahtar satır alınır.

Daha sonra anahtar satırdaki negatif değerler için,

$$\text{Min } |Z_j - C_j| / y_{kj} , \quad y_{kj}: \text{ anahtar satırdaki negatif değerler}$$

seçilerek anahtar sütun belirlenir. Diğer işlemler, simpleks yöntemdeki gibidir.

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10	0
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10	0
0	S3	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	1
	Zj	18	3	1	15/10	5/10	
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10	

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	3/2	0	1	1/2	0	-1/2
3	X1	5	1	0	0	0	1
0	S2	3	0	0	2	1	-5
	Zj	33/2	3	1	1/2	0	5/2
	Zj-Cj	-	0	0	1/2	0	5/2

$Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 3/2 \quad \max Z = 33/2$$

Çözümde, $x_2 = 3/2$ olup hala tamsayılı değildir.

$x_2 = 3/2$ için de benzer işlemler yapıldıktan sonra yeni kısıt;

$$(1/2) S_1 + (1/2) S_3 \geq 1/2$$

olarak elde edilir. Yeni kısıt, eşitlik haline getirilip son tabloya eklenir ve dual simpleks yöntem uygulanırsa aşağıdaki çözüm elde edilir:

			3	1	0	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3	S4
1	X2	1	0	1	0	0	-1	1
3	X1	5	1	0	0	0	1	0
0	S2	1	0	0	0	1	-7	4
0	S1	1	0	0	1	0	1	-2
	Zj	16	3	1	0	0	2	1
	Zj-Cj	-	0	0	0	0	2	1

$Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 1 \quad \max Z = 16$$

Tüm karar değişkenleri tamsayılı değer aldıklarından çözüm bitmiştir.

Dal-Sınır Algoritması

Bir tamsayılı programlama probleminin Dal-Sınır Algoritması tekniği ile optimal çözümü araştırılırken, problem ile ilgili tüm aşamalar sistemli bir şekilde analiz edilir.

Dal-Sınır Algoritması tekniği ile optimal çözüm bulunurken *dallandırma*, *sınırlama* ve *bağlama* işlemleri yapılır.

Tamsayılı programlama problemi; tamsayılı olma şartı aranmadan simpleks yöntemle çözüldüğünde, optimal çözümde yer alan kesirli değerlere sahip x_j değişkenleri arasından dallandırma değişkeni seçilerek alt problemler oluşturulur. En fazla ekonomik önemi olan değişken, dallandırma değişkeni olarak belirlenir.

Belirlenen değişken dallandırılırken; optimal çözümde almış olduğu kesirli değer, iki tamsayı arasında olduğu düşünülür ve buna göre alt problemler oluşturulur. Örneğin,

$x_j = 3.4$ ise x_j 'nin 3 ile 4 arasında olduğu düşünülerek $x_j \leq 3$ ve $x_j \geq 4$ kısıtlarıyla alt problemler oluşturulur.

Oluşturulan alt problemler ayrı ayrı çözülür. Alt problemlerin optimal çözüm değerleri tamsayılı değilse, amaç fonksiyonu değeri optimale yakın olan alt problem dallandırma için seçilir. Eğer uygun çözümü olmayan alt problem varsa bu problem bağlanır. Yani dallandırma için dikkate alınmaz.

Seçilen problem dallandırılarak alt problemler oluşturulur ve optimal çözümleri bulunur. Çözümün tamsayılı olup olmadığı incelenerek, dallandırma yapıp yapılmayacağına karar verilir.

Bağlanmayan alt problemler arasında dallandırma için seçim yapılırken, amaç fonksiyonu değeri optimale yakın olan tercih edilir ve diğer alt problem bağlanır.

Örnek: Aşağıdaki problemi Dal-Sınır Algoritması yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\ \text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\ 6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsayı} \end{aligned}$$

Tamsayılı olma şartı aranmadan, problemin simpleks çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\text{Max } Z = 35.25 \quad ; \quad X_1 = 3.75 \quad ; \quad X_2 = 1.50$$

Karar değişkenlerinin aldığı değerler kesirlidir. Ekonomik katkısı en fazla olan x_1 değişkeni, dallandırma değişkeni olarak seçilir ve alt problemler oluşturulur.

Alt Problem1(AP1)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\leq 3 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

Çözüm:

$$\text{Max } Z = 33 ; X_1 = 3 ; X_2 = 2$$

Çözüm değerleri tamsayı olduğu için bu problem **BAĞLANIR**.

Alt Problem3(AP3)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\geq 4 \\
X_2 &\leq 1 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

Çözüm:

$$\text{Max } Z = 35.16 ; X_1 = 4.16 ; X_2 = 1$$

X_1 değişkeni kesirli değer aldığı için dallandırma değişkeni olarak seçilir ve alt problemler oluşturulur.

Alt Problem5(AP5)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\geq 4 \\
X_2 &\leq 1 \\
X_1 &\leq 4 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

Çözüm:

$$\text{Max } Z = 34 ; X_1 = 4 ; X_2 = 1$$

Çözüm değerleri tamsayı olduğundan bu problem **BAĞLANIR**.

Alt Problem2(AP2)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\geq 4 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

Çözüm:

$$\text{Max } Z = 35.2 ; X_1 = 4 ; X_2 = 1.2$$

X_2 değişkeni kesirli değer aldığı için dallandırma değişkeni olarak seçilir ve alt problemler oluşturulur.

Alt Problem4(AP4)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\geq 4 \\
X_2 &\geq 2 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

Çözüm:

UYGUN ÇÖZÜM YOKTUR

$X_1 \geq 4$ ve $X_2 \geq 2$ iken, ilk iki kısıt sağlanmıyor. Bu problem **BAĞLANIR**.

Alt Problem6(AP6)

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Max}} &= 7X_1 + 6X_2 \\
\text{y. ş. : } 2X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\
6X_1 + 5X_2 &\leq 30 \\
X_1 &\geq 4 \\
X_2 &\leq 1 \\
X_1 &\geq 5 \\
X_1, X_2 &\geq 0 \text{ ve tamsay } i
\end{aligned}$$

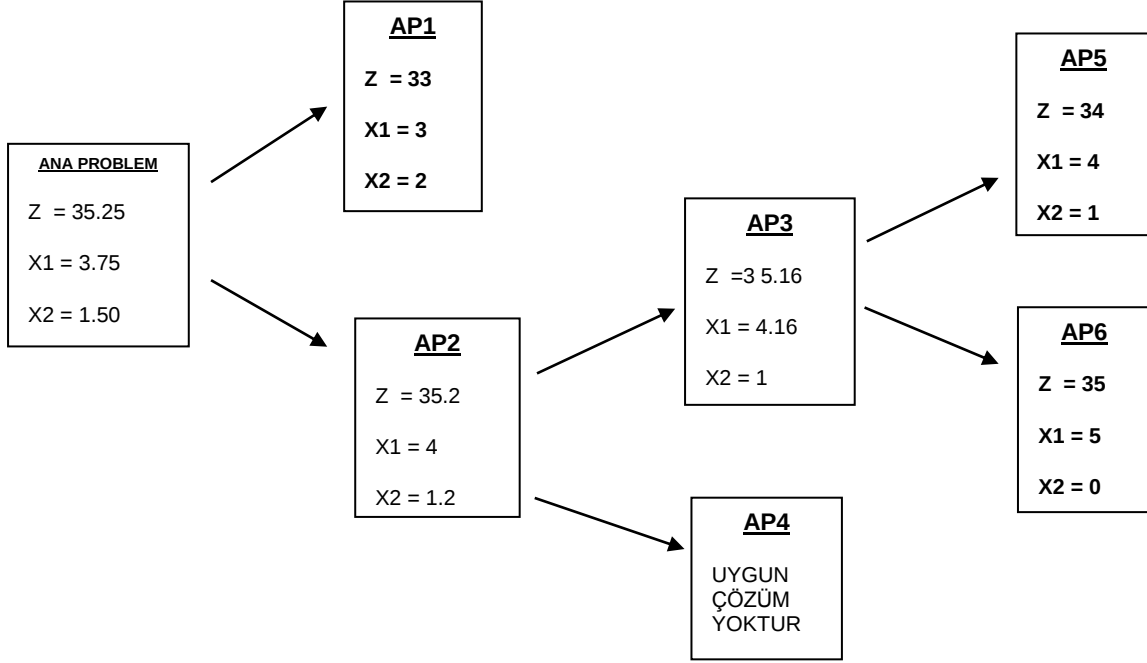
Çözüm:

$$\text{Max } Z = 35 ; X_1 = 5 ; X_2 = 0$$

Çözüm değerleri tamsayı olduğundan bu problem **BAĞLANIR**.

Dallandırma işlemi bitmiştir. Optimal çözüm olmaya aday (AP1, AP5 ve AP6 olmak üzere) 3 tane tamsayılı çözüm vardır. Bunlardan amaç fonksiyonu değeri en büyük olan AP6 seçilir.

Bu çözümü daha derli toplu olarak aşağıdaki biçimde de gösterebiliriz:



Örnek: Soru işareti olan yerlere gelmesi gerekenleri yazıp, optimal çözümü ifade ediniz.

$$Z_{\text{Max}} = 5X_1 + 4X_2$$

$$\text{Y. Ş. : } X_1 + X_2 \leq 5$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 45$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

