1. GİRİŞ

Birçok uygulamalı bilim dallarında kullanılan bazı istatistik modeller, genellikle sebep-sonuç ilişkisi üzerine kurulmaktadır. Yani, değişkenlerden bir ya da daha fazlasının diğer bir veya daha fazla değişkeni ne ölçüde etkilediği incelenmektedir. Özellikle, tek değişkenli istatistik yöntemlerinin kullanımı ve sonuçlarının kolay yorumlanabilir olmasından dolayı araştırıcılar tarafından çok fazla tercih edilmektedir. Tek değişkenli yöntemlerin kısıtlayıcı varsayımlarının olması metodun kullanabilirliğini azaltmaktadır. Bunlardan da en önemlisi bir araştırmada, birden fazla faktörün incelemeye konu olduğu durumlar için, faktörlerin ayrı ayrı etkisinin araştırılması diğerlerinin ise deneysel olarak kontrol altında tutulmasıdır. Günümüzde karşılaşılan sorunların birçoğu iki ya da daha fazla değişken arasında bir ilişkinin olup olmadığının araştırılması ile ilgilidir. Bunun nedeni, bir araştırmada ele alınan sonucu, çok sayıda değişken etkilemekte olup, bunlar çok sayıda birbiriyle ilişkili değişkenler olabilmektedir. Bu durumda, değişkenler arası ilişkinin analize dahil edilmesi gerekmektedir. Araştırmanın sağlıklı ve güvenilir olması açısından iki veya daha fazla değişken kümesi arasındaki ilişkinin ortaya konulması ile çok değişkenli analiz teknikleri ön plana çıkmıştır. Çok değişkenli istatistik yöntemlerinden yaygın olarak kullanılanlara; çok değişkenli varyans analizi, Hotelling' in T^2 testi, kümeleme analizi, temel bileşenler analizi, ayırma analizi, faktör analizi, kanonik korelasyon analizi örnek olarak verilebilir.

Çok değişkenli varyans analizi (ÇDVA); iki ya da daha fazla bağımlı ve bağımsız gruplarda çok değişkenli normal dağılımlara dayalı hipotezleri test etmek için kullanılır. Kullanım yeri olarak, 4 farklı ırktan koyunların, duş öncesi ve duş sonrası dönemdeki, 30. dakikasında 3 farklı ölçüm alınmış olsun (meme sıcaklığı: X_1, kafa sıcaklığı: X_2 ve rektal sıcaklık: X_3); buna göre hayvanlardan alınan ölçümlerin ortalama vektörleri arasında ölçüm zamanına bağlı olarak önemli bir farklılık olup olmadığının test edilmesi çok değişkenli varyans analizine örnek olarak verilebilir.

Hotelling' in T^2 testi; bağımlı ve bağımsız çok değişkenli iki grup parametre vektörlerine dayalı hipotezleri test etmek için kullanılır.Buna örnek olarak, çok değişkenli normal dağılım gösteren ve gözlem sayıları farklı koyun ırkından alınan süt örneklerinden asidite (pH' sı), yağ oranı ve protein oranı belirlenmiş olsun; burada iki bağımsız gruptan (koyun ırklarından) alınan süt örneklerinin ölçümlerine (ya da değişkenlerine) ait ortalama vektörlerinin benzer olup olmadığının test edilmesi Hotelling' in T^2 testi ile analiz edilebilir.

Kümeleme analizi; X veri matrisinde yer alan ve doğal gruplamaları kesin olarak bilinmeyen birimleri, değişkenleri ya da her ikisini birden, aralarındaki benzerlik ya da farklılık ölçütlerinden yararlanarak homojen gruplara bölmek amacı ile kullanılır (Özdamar, 1999). Bir bölgeden dönemsel olarak yakalanan balık türlerinin bulunma miktarlarının alt gruplara ayrılması bu analiz tekniğine örnek olarak verilebilir.

Temel bileşenler analizi; incelenen birçok özellik bakımından X değişken kümesinin varyans yapısını, *p* adet orijinal değişken yerine, *k* adet ($k<p$) değişkenin doğrusal bileşenleri olan yeni değişkenler ile ifade etmek amacı ile kullanılır (Özdamar, 1999). Bir hayvan üzerinden alınan vücut özelliklerine ait toplam varyasyonun izahında, değişkenlerin tamamının irdelenmesi yerine, daha az sayıda değişken ile açıklanması bu konu için örnek teşkil edebilir.

Ayırma analizi; grup özellikleri belirli olan bir populasyondan seçilen bir örnekteki birimlerin *p* adet özelliği inceleyerek, bu birimlerin doğal ortamdaki gerçek gruplarına optimal düzeyde atanmalarını sağlayacak fonksiyonlar bulmaya yarar. Arıları sınıflandırırken, arıların kanat uzunluğu, rengi, dil uzunluğu, bacak uzunluğu ve vücut büyüklüğü gibi bir takım ölçümlerinin alınması ile ırk özellikleri belli olan sınıflardan hangisine ait olduğunun belirlenmesi örnek olarak verilebilir.

Faktör analizi; iki veya daha fazla özelliğin aynı anda değerlendirilmeye alındığı bir çalışmada, aralarında yüksek korelasyon bulunan değişkenleri bir araya getirerek, birbirinden bağımsız ve daha az sayıda yeni açıklayıcı ortak faktör yapıları oluşturmak amacıyla kullanılan bir yöntemdir.

Değişkenler bağımlı-bağımsız şeklinde ifade ediliyorsa, hesaplanan ilişki katsayıları değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkisinin bir ölçüsü olarak kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra, bağımlı değişken tek, bağımsız değişken birden fazla olabilmektedir. Bu durumda ise, değişkenler arasındaki ilişki çoklu korelasyon katsayısı ile belirlenir. Ancak bahsedilen yöntemler ile hayvan materyaline ait vücut ölçüleri ve karkas özellikleri ya da belirli haftalardaki yumurta verimleri ile cinsi olgunluk yaşı, vücut ve yumurta ağırlıkları gibi iki veya daha fazla değişken kümesi arasındaki ilişkiyi aynı anda belirleyebilmek ve yorumlayabilmek mümkün olamayabilir. Aynı zamanda her bir bağımlı değişken için ayrı ayrı sonuçların bulunması, zaman zaman sonuçların yanlış yorumlanmasına neden olabilmektedir. Bunun nedeni, bağımlı değişkenler arasındaki ilişkilerin veya karşılıklı bağımlılığın dikkate alınmamasıdır. Bu gibi durumlar için, Hotelling tarafından 1936 yılında iki değişken grubu arasındaki ilişkileri belirleyebilmek için çok değişkenli analiz tekniklerinden biri olan kanonik korelasyon analizi geliştirilmiştir (Thompson, 1984).

Temel bileşenler analizi ile kanonik korelasyon analizinin her ikisi de değişken kümelerine ait öz değerleri dikkate alarak boyut indirgeme yapmaktadır. Her iki analiz tekniğinde de öz vektörler yardımı ile yeni bileşenler oluşturulmakta ve bunlar üzerinden yorum yapılmaktadır. Bu iki analiz tekniği arasındaki temel farklılık ise, temel bileşenler analizinde incelen tüm değişkenler tek bir küme (X

değişken kümesi) içerisinde yer alıyormuş gibi düşünülüp, bu değişken kümesine ait varyans-kovaryans matrisi üzerinden özdeğer ve öz vektörler hesaplanmaktadır. Kanonik korelasyon analizinde ise, değişkenler en az iki değişken kümesine (X ve Y değişken kümesi) ayrılmakta ve kümeler arasından hesaplanan kovaryans matrisi üzerinden öz değer ve öz vektörler hesaplanmaktadır. Bunun sonucunda, her iki analiz tekniği yardımı ile kovaryans matrislerinden hesaplanan öz değer ve öz vektörleri kullanarak yeni bileşenler oluşturulmakta ve bunlar üzerinden yorumlar yapılmaktadır.

Kanonik korelasyon analizi çoklu regresyon analizinin bir uzantısıdır. Çoklu regresyon analizinde X değişken grubu q tane ve Y değişken grubu p=1 tane değişken içermekte iken, kanonik korelasyon analizinde ise, X değişken grubu q tane ve Y değişken grubu p adet (p>1) değişken içermektedir. Bu analizde, X değişken grubu içerisindeki değişkenlerin doğrusal kombinasyonları ile Y değişken grubu içerisindeki değişkenlerin doğrusal kombinasyonları arasındaki korelasyon katsayıları araştırılır (Gürbüz, 1989; Tatar ve Eliçin, 2002).

Kanonik korelasyon analizinde temel olarak, X ve Y değişken kümelerinin her biri için, maksimum korelasyonlu ve birim varyanslı doğrusal bileşenler elde edilmektedir. Burada, değişken kümelerinden elde edilen doğrusal bileşenler birbirinden bağımsızdır. Elde edilecek olan maksimum doğrusal bileşen sayısı, araştırmaya konu olan değişken kümelerinden küçük olanın, değişken sayısı ile sınırlıdır. Araştırmada incelenen özellikler üç ayrı küme (X, Y ve Z değişken kümesi) oluşturuyor ise, kanonik korelasyon analizi yerine kısmi kanonik korelasyon analizi kullanılmaktadır. Kısmi kanonik korelasyon analizinde, temel mantık değişken kümelerinden birinin etkisi sabitlendiğinde, diğer iki değişken kümesi arasındaki maksimum korelasyonlu ve birim varyanslı doğrusal bileşenler elde etmektir (Timm, 2002).

Bu çalışmanın amacı şu başlıklar altında toplanabilir:

1. En karmaşık ilişki analizlerinden biri olan kanonik korelasyon analizinin, temel kavramlarının (basit korelasyon, çoklu korelasyon, kanonik korelasyon, kanonik değişken vb. terimler) da dikkate alınarak açıklanması,

2. Elde edilen kanonik korelasyon katsayılarının önem testlerinde kullanılan test istatistiğinin tanıtılması,

3. Analizin kullanım amacı, analiz uygulanırken ve yorumlanırken dikkat edilmesi gereken hususların ortaya konulması (örneğin, analiz işlemleri sırasında veri matrisi olarak hangi durumda korelasyon matrisi, hangi durumda varyans-kovaryans matrisi kullanılması vb),

4. Kanonik korelasyon analizinin açıklanabilirlik belirleme (redundancy) analizi ve çoklu regresyon analizi ile olan bağlantısının ortaya konması,

Ele alınan iki değişkenden hangi değişkenin bağımsız hangisinin bağımlı olduğuna bakılmaksızın, iki değişkenin birlikte artmaları, azalmaları veya ters ilişki göstermeleri birlikte değişim olarak ifade edilmektedir. İstatistikte değişkenler arasındaki birlikte değişimin ölçüsü korelasyon katsayısı ile ortaya konmaktadır (Gürsakal, 1998). Çalışmalarda, incelenen değişkenler (Y_i, X_i i=1,2,...n) normal dağılış gösterdiğinde iki değişken arasındaki ilişkinin derecesini ve yönünü göstermek amacıyla en yaygın kullanılan katsayı Pearson korelasyon katsayısıdır. Eşitlik (3.1)' de, r_{xy} değeri, Pearson korelasyon katsayısı olup $-1 \leq r_{xy} \leq +1$ değerleri arasında değişim göstermektedir. r_{xy} 'nin -1 olması, X ile Y değişkenleri arasında negatif tam bir ilişki , +1 olması durumu ise X ve Y değişkenleri arasında pozitif tam bir ilişki olduğunu göstermektedir. r_{xy} değerinin 0 olması durumu ise, iki değişken arasında ilişkinin olmadığını göstermektedir (Kayaalp ve Çankaya, 2003).

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 . \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right]^{1/2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} . S_{yy}}} \qquad (3.1)$$

Değişken sayısı ikiden fazla ve normal dağılış gösteriyorsa, kısmi korelasyon katsayısı Eşitlik (3.2)' den hesaplanmaktadır.

$$r_{xy.z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} . r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}} \qquad (3.2)$$

Eşitlik (3.2)' de, $r_{xy.z}$, Z değişkeni sabit tutulduğunda, X ve Y değişken arasındaki kısmi korelasyon katsayısını göstermektedir.

Değişkenler normal dağılış göstermiyorsa, iki değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek için Sperman'ın sıra korelasyonu ya da Kendall'ın Tau korelasyonu; ikiden fazla değişken arasındaki kısmi ilişki miktarını belirlemek için Kendall Tau kısmi korelasyon katsayıları kullanılmaktadır (Siegal ve Castellan, 1988; Gamgam, 1989).

Sperman' ın sıra korelasyon katsayısı, Eşitlik (3.3)' den hesaplanabilmektedir.

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{N(N^2-1)} \tag{3.3}$$

Eşitlik (3.3)' de,

d_i : $R_{X_i} - R_{Y_i}$ farkından hesaplanmakta olup, X ve Y değişkenleri içerisinde yer alan gözlem değerlerinin almış olduğu sıra puanları arasındaki farkı ifade etmektedir.

N : Toplam gözlem sayısını ifade etmektedir.

Kendall'ın Tau korelasyon katsayısı ise Eşitlik (3.4)' de verilmiştir.

$$\hat{\tau} = \frac{2S}{N(N-1)} \tag{3.4}$$

Eşitlik (3.4)' de,

S : P – Q şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, X değişkeni ait gözlem değerleri kendi içerisinde küçükten büyüğe doğru sıralandıktan sonra buna karşılık gelen Y değişkeni içerisindeki gözlem değerleri için doğal sıra puanlarına bakılır. Y_i için doğal sıranın sağlandığı durumların sayısına P, sağlanmadığı durumların sayısına ise Q adı verilmektedir.

N : Toplam gözlem sayısını ifade etmektedir.

Kendall türü kısmi korelasyon katsayısı, Eşitlik (3.5)' den hesaplanabilmektedir.

$$\hat{\tau}_{xy.z} = \frac{\hat{\tau}_{xy} - \hat{\tau}_{xz}.\hat{\tau}_{yz}}{\sqrt{(1-\hat{\tau}_{xz}^2)(1-\hat{\tau}_{yz}^2)}} \tag{3.5}$$

Değişken sayısı ikiden fazla ve bunlardan biri bağımlı diğerleri bağımsız değişken (Örneğin; Y_1, X_1, X_2) ise bu durumda çoklu korelasyon katsayısı kullanılır (Tatlıdil, 1996). Bu katsayı, Eşitlik (3.6)' dan hesaplanmaktadır.

$$R_{y.x} = \left[\frac{\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}}{\sigma_{11}}\right]^{1/2} = \left[\frac{b'X'y - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}{\Sigma y_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}\right]^{1/2} \tag{3.6}$$

Eşitlik (3.6)' da, pay kısmı, $\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$, çoklu regresyon kareler toplamını, payda kısmı ise, σ_{11}, genel kareler toplamını ifade etmektedir.

İki ve daha fazla değişken içeren iki değişkenler kümesi $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ ve $X_1, X_2, ..., X_p$ şeklinde ifade ediliyor ise, bu kümeler arasındaki ilişkiyi belirlemek için doğrusal bileşenler aracılığıyla değerlendiren kanonik korelasyon analizi kullanılmaktadır (Özdamar, 1999).

3.2.1. Kanonik Korelasyon Analizinin Amaçları

Kanonik korelasyon analizinin amaçları aşağıdaki başlıklarla sıralanabilir.

a) Aynı bireyden elde edilen iki değişken kümesinin istatistiksel olarak birbirinden bağımsız olup olmadığının test edilmesi,

b) Kümeler arası korelasyona en fazla katkıda bulunan her iki değişken kümesindeki değişkenlerin belirlenmesi,

c) Bağımsız ve bağımlı değişken kümelerine ait değişkenler arasındaki korelasyonu maksimum yapan doğrusal kombinasyonların belirlenmesi (Alpert ve Peterson, 1972; Tekin, 1993).

Kanonik korelasyon analizi ayrıca, aşağıdaki amaçlarla da kullanılmaktadır (Thompson, 1984).

a) Bir değişken kümesinin diğer bir değişken kümesi tarafından ne ölçüde açıklanabildiğinin belirlenmesi,

b) Bir kanonik değişkenin dahil olduğu değişkenler kümesinin açıklayıcı gücüne ne ölçüde katkı sağlayabildiğinin belirlenmesi,

c) Bir kanonik değişkenin dahil olmadığı değişkenler kümesinin açıklayıcı gücüne ne ölçüde katkı sağlayabildiğinin belirlenmesi,

d) Farklı kanonik fonksiyonların ilişkileri açıklamak ya da tahmin etmedeki nispi (göreli) gücünün ne kadar olduğunun belirlenmesi.

3.2.2. Kanonik Korelasyon Analizinin Uygulanabilmesi İçin Gerekli Varsayımlar

Kanonik korelasyon analiz yöntemine ait istatistik varsayımlar aşağıdaki gibidir.

a) Değişken kümeleri arasında ilişki doğrusal olmalıdır.

b) Her bir değişken kümesinin çok değişkenli normal dağılış göstermesi gerekir. p değişkenli normal dağılışın olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (3.7)'de verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\right] / (2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2} & ;\ -\infty < X < \infty \\ 0;\ \ \text{diger durumlarda} & |\Sigma| > 0 \text{ için} \end{cases} \tag{3.7}$$

c) İki grup değişken kümesinde yer alan değişkenlerin eşit sayıda olma zorunluluğu yoktur.

d) Stevens (1986) değişkenler arasındaki kanonik korelasyon katsayısının 0.70 ve daha büyük tahmin edilmesi durumunda örnek büyüklüğünün 50, katsayının 0.50 olması durumunda 100, daha düşük olması durumunda ise örnek büyüklüğünün 200 olmasının uygun olacağını bildirmiştir.

e) Değişkenler arasındaki korelasyonu önemli düzeyde etkilemesi nedeni ile veri kümesinde aykırı değerlerin analiz öncesinde saptanarak gerekli düzeltme ya da elimine edilmesi gerekmektedir.

f) Her değişken kümesindeki değişkenler arasında çoklu bağlantı veya çoklu birlikte değişim (multicollinearity) bulunmamalıdır (Özdamar, 1999; Tabachnick ve Fidell, 2001). *nxk* boyutlu X matrisinin rankının *k*' ya eşit (k<n) olması, bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir bağımlılığın olmadığını ifade etmektedir (Ergüneş, 2004).

3.2.3. Kanonik Korelasyon Ve Kanonik Değişkenler

X değişken kümesinde *p* ve *Y* değişken kümesinde *q* adet ($p \leq q$) değişken var ise, bu iki değişken kümesindeki değişkenlerin doğrusal kombinasyonları alınarak, bunlar arasındaki korelasyon hesaplanabilir. Bu şekilde doğrusal kombinasyonlar arasında karşılıklı olarak hesaplanan korelasyon katsayılarına kanonik korelasyon, en büyük korelasyona ilk kanonik korelasyon, değişken kümelerinden oluşan doğrusal kombinasyonlara ise kanonik değişken adı verilir. Maksimum korelasyonun hesaplandığı değişken kümesinin doğrusal kombinasyonuna ilk kanonik değişken adı verilir (Kendall, 1980; Xue ve ark., 1996).

X değişken kümesi $\underset{\sim}{\mu_1}$ ortalama vektörüne, *Y* değişken kümesi ise $\underset{\sim}{\mu_2}$ ortalama vektörüne sahiptir. Bu değişken kümelerine ait ortalama ve kovaryans matrisleri sırası ile Eşitlik (3.8)' de verilmiştir.

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu_1} \\ \underset{\sim}{\mu_2} \end{bmatrix} \; ; \qquad \sum = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Eşitlik (3.8)' de, ortalama matrisindeki $\underset{\sim}{\mu_1}$ ve $\underset{\sim}{\mu_2}$ sırası ile *px1* ve *qx1* boyutlu vektörleri, varyans-kovaryans matrisindeki elemanlar sırası ile Eşitlik (3.9), (3.10) ve (3.11)' da verilmiştir.

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_p} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2X_2} & \cdots & \sigma_{X_2X_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{X_pX_1} & \sigma_{X_pX_2} & \cdots & \sigma_{X_pX_p} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1Y_1} & \sigma_{Y_1Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1Y_q} \\ \sigma_{Y_2Y_1} & \sigma_{Y_2Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_2Y_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{Y_qY_1} & \sigma_{Y_qY_2} & \cdots & \sigma_{Y_qY_q} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{X_1Y_2} & \cdots & \sigma_{X_1Y_q} \\ \sigma_{X_2Y_1} & \sigma_{X_2Y_2} & \cdots & \sigma_{X_2Y_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{X_pY_1} & \sigma_{X_pY_2} & \cdots & \sigma_{X_pY_q} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Eşitlik (3.8)'de verilen Σ_{21} ise Σ_{12} matrisinin devriğidir (Torranin, 1972). Eşitliklerde verilen, varyans değerleri ise Eşitlik (3.12)' den hesaplanabilmektedir.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n}\left[\sum_{r=1}^{n}(X_{ir} - \overline{X}_i)(X_{jr} - \overline{X}_j)\right] \tag{3.12}$$

Buna göre, *X* ve *Y* değişken kümelerine ait varyans-kovaryans matrisinde, i=j iken varyans değerleri (σ_{ii}), $i \neq j$ iken kovaryans değerleri hesaplanmış olmaktadır. Varyans-kovaryans matrisinde köşegende yer alan varyans değerleri, değişkenlerin dağılışı hakkında bilgi verir iken, köşegen dışındaki kovaryans değerleri, değişken çiftleri arasındaki birlikte değişimi vermektedir.

Ortalama vektörü ve kovaryans matrisi örnekten hesaplanıyorsa,

$$\underset{\sim}{\bar{S}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{X}} \\ \underset{\sim}{\bar{Y}} \end{bmatrix} \quad ; \qquad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Gunderson ve Muirhead, 1997).

X ve Y değişken kümelerinden i. kanonik değişken (U_i, V_i) çiftleri aşağıda verilen Eşitlik (3.14)' den hesaplanabilmektedir.

$$U_i = \underset{\sim}{a_i'}\, \underset{\sim}{X} \qquad V_i = \underset{\sim}{b_i'}\, \underset{\sim}{Y} \tag{3.14}$$

Eşitlik (3.14)' de verilen, $\underset{\sim}{a}$ ve $\underset{\sim}{b}$ katsayıları, sırası ile *px1* ve *qx1*' lik vektörlerdir. Bu katsayılar, *X* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_1 ile *Y* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_2 matrislerinin özdeğerlerine karşılık gelen öz vektör elemanlarıdır (Gao ve Huang, 2000).

$$M_1 = \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$M_2 = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \tag{3.15}$$

Bir araştırmaya konu olan *X* ve *Y* değişken kümeleri çok değişkenli normal dağılışa sahip ise, Eşitlik (3.14)' de verilen *U* ve *V* kanonik değişkenleri de normal dağılışa sahiptir ve kanonik değişkenleri arasındaki doğrusal ilişki maksimize edilebilmektedir. Eğer, *X* değişken kümesi bağımsız değişken, *Y* değişken kümesi bağımlı değişken olarak ifade edilirse, yani *X, Y*' nin sebebi olarak yorumlanırsa, bu durumda *U* "en iyi tahmin edici", *V*' de "en iyi tahmin edilebilir kriter" olarak isimlendirilebilir (Tatar ve Eliçin, 2002).

Kanonik değişkenler *U* ve *V*' nin varyans ve kovaryansları Eşitlik (3.16)' da verilmiştir.

$$\mathrm{Var(U)} = \underset{\sim}{a'}\, \Sigma_{11}\, \underset{\sim}{a}$$

$$\mathrm{Var(V)} = \underset{\sim}{b}' \; \Sigma_{22} \; \underset{\sim}{b}$$

$$\mathrm{Kov(U,V)} = \underset{\sim}{a}' \; \Sigma_{12} \; \underset{\sim}{b} \tag{3.16}$$

U ve *V* kanonik değişkenleri arasındaki korelasyon, yani kanonik korelasyon ise Eşitlik (3.17)' de verilmiştir (Tatsuaoka, 1971; Lee ve ark., 1999).

$$r_{uv} = \frac{Kov(U,V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{\underset{\sim}{a}' \Sigma_{12} \underset{\sim}{b}}{\sqrt{(\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b})}} \tag{3.17}$$

U ve *V* kanonik değişkenleri arasındaki korelasyonu maksimize etmek için $\underset{\sim}{a}$ ve $\underset{\sim}{b}$ katsayılarının maksimum olduğu korelasyon katsayısını bulmak gerekir. Maksimum korelasyona ise, ancak *U* ve *V* kanonik değişkenleri arasında yer alan ve birim varyansa sahip kanonik değişken çifti arasında rastlanılır. Bir başka ifade ile,

$$\mathrm{Var(U)} = \underset{\sim}{a}' \; \Sigma_{11} \; \underset{\sim}{a} = 1$$

$$\mathrm{Var(V)} = \underset{\sim}{b}' \; \Sigma_{22} \; \underset{\sim}{b} = 1$$

olduğunda korelasyon maksimum olmaktadır. Böylece, *U* ve *V* kanonik değişken çifti arasındaki maksimum korelasyona birinci kanonik korelasyon adı verilir ve bu korelasyon katsayı Eşitlik (3.18)'de verilmiştir (Anderson, 1958).

$$\max_{a,b} Kor(U,V) = \rho_1 \tag{3.18}$$

Burada yapılması gereken bu ifadenin maksimum yapılmasıdır. Bu sebeple katsayıların maksimizasyon problemi olarak düşünülüp ortaya koymak için, λ_1 ve λ_2, Langranj çarpanları, olmak üzere Langranj fonksiyonu Eşitlik (3.19)' da verildiği biçimde yazılabilir (Tatsuoka, 1971; Tatlıdil, 1996).

$$L = \underset{\sim}{a}' \Sigma_{12} \underset{\sim}{b} - 0.5\ \lambda_1 (\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a} - 1) - 0.5\ \lambda_2 (\underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b} - 1) \qquad (3.19)$$

Langranj fonksiyonu $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, λ_1 ve λ_2' ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{a}} = \Sigma_{12} \underset{\sim}{b} - \lambda_1 \Sigma_{11} \underset{\sim}{a} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{b}} = \Sigma_{21} \underset{\sim}{a} - \lambda_2 \Sigma_{22} \underset{\sim}{b} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a}) - 1 = 0$$

$$\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a} = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b} - 1 = 0$$

$$\underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b} = 1 \qquad (3.20)$$

elde edilir. Eşitlik (3.20)' de verilen ilk eşitlik soldan $\underset{\sim}{a}'$ ile ikinci eşitlikte soldan $\underset{\sim}{b}'$ ile çarpılırsa Eşitlik (3.21) elde edilir.

$$\underset{\sim}{a}' \Sigma_{12} \underset{\sim}{b} - \lambda_1 (\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a}) = 0$$

$$\underset{\sim}{b}' \Sigma_{21} \underset{\sim}{a} - \lambda_2 (\underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b}) = 0 \qquad (3.21)$$

Eşitlik (3.21)' de, $\underset{\sim}{a}' \Sigma_{11} \underset{\sim}{a} = 1$ ve $\underset{\sim}{b}' \Sigma_{22} \underset{\sim}{b} = 1$ olduğundan Eşitlik (3.21)' den, Eşitlik (3.22) elde edilmektedir.

$$\lambda_1 = \underset{\sim}{a}' \Sigma_{12} \underset{\sim}{b} \text{ ve } \lambda_2 = \underset{\sim}{b}' \Sigma_{21} \underset{\sim}{a} \qquad (3.22)$$

Buradan da,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \underset{\sim}{a}' \, \Sigma_{12} \, \underset{\sim}{b} = \rho$ olduğu tespit edilmiş olmaktadır.

Bu bilgiler ışığında Eşitlik (3.20),

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{12}\,\underset{\sim}{b} - \lambda_1\,\Sigma_{11}\,\underset{\sim}{a} = 0 \\ \Sigma_{21}\,\underset{\sim}{a} - \lambda_2\,\Sigma_{22}\,\underset{\sim}{b} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{bmatrix} -\rho\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\rho\Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

biçiminde yazılabilmektedir (Chatfield ve Collins, 1980; Anderson, 1999).

Eşitlik (3.23)' de verilen denklem siteminde $\underset{\sim}{a}$ ve $\underset{\sim}{b}$ vektörlerinin elemanları sıfırdan farklı olabilmesi için ilk matrisin tekil, yani, determinantının sıfıra eşit olması gerekir (Eşitlik, 3.24). Bunun için determinant değerini sıfır yapacak ρ değerinin elde edilmesi gerekmektedir.

$$\begin{vmatrix} -\rho\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\rho\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.24}$$

Eşitliğin sol tarafında verilen matrisin determinantı ile ilgili çözüm aşamaları ifade edilirse,

$$\left| -\rho^2\,\Sigma_{11}\,\Sigma_{22} + \Sigma_{12}\,\Sigma_{21} \right| = 0$$

$$\left| -\rho^2\,\Sigma_{11} + \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} \right| = 0 \text{ veya } \left| -\rho^2\,\Sigma_{22} + \Sigma_{12}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{21} \right| = 0$$

$$\left| \Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} - \rho^2 \mathrm{I} \right| = 0 \text{ veya } \left| \Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12} - \rho^2 \mathrm{I} \right| = 0 \tag{3.25}$$

işlemlerinden biri tercih edilir.

Eşitlik (3.24)' de verilen matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilecek ρ^2 değeri yerine konularak $\underset{\sim}{a}$ ve $\underset{\sim}{b}$ vektörleri Eşitlik (3.26)' da verilen karakteristik denklemler yardımıyla belirlenebilmektedir.

$$(-\rho^2\Sigma_{11} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\underset{\sim}{a} = (\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \rho^2 I)\ \underset{\sim}{a} = 0$$

$$(-\rho^2\ \Sigma_{22} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})\underset{\sim}{b} = (\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \rho^2 I)\ \underset{\sim}{b} = 0$$

$$\underset{\sim}{b_i} = \frac{1}{\rho_i}\ \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\ \underset{\sim}{a_i} \qquad (3.26)$$

Eşitlik (3.26)' da, maksimum p adet korelasyon katsayısı elde edilir. Bunun nedeni, kovaryans matrisinde $p \leq q$ olduğundan, verilen kovaryans matrisinin rankı maksimum p olacaktır. Bu sebeple, eşitlikten p tane sıfırdan farklı ρ^2 elde edilebilir (Graybill, 1983; Jung, 2000). Bu değerlerin pozitif karekökleri de kanonik korelasyon katsayılarını vermektedir. Elde edilen kanonik korelasyon katsayıları büyükten küçükten doğru sıralanır ($\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_p$) ve en büyükten küçüğe doğru olmak koşuluyla, tek tek Eşitlik (3.25)' de yerlerine konularak, U ve V kanonik değişkenleri elde edilir. En büyük kanonik korelasyon katsayısının denklemde yerine konulması ile elde edilen kanonik değişkenlere, birinci kanonik değişken çifti (U_1, V_1) adı verilmektedir. Bu arada, elde edilen p tane kanonik değişken çiftinin birbirinden bağımsız olması gerektiğinin hatırlatılmasında yarar vardır (Eşitlik 3.27) (Tatlıdil, 1996). Yani,

$$\mathrm{Kov}(U_i, U_j) = E[(U_i - E(U_i)][(U_i - E(U_j)]' = \underset{\sim}{a_i'}\ \Sigma_{11}\ \underset{\sim}{a_j} = 0$$

$$\mathrm{Kov}(V_i, V_j) = E[(V_i - E(V_j)][(V_i - E(V_j)]' = \underset{\sim}{b_i'}\ \Sigma_{11}\ \underset{\sim}{b_j} = 0$$

$$\mathrm{Kov}(U_i, V_j) = E[(U_i - E(U_j)][(V_i - E(V_j)]' = \underset{\sim}{a_i'}\ \Sigma_{11}\ \underset{\sim}{b_j} = 0 \qquad (3.27)$$

olması gerekir. Eşitlik (3.17)' den, U_1 ve V_1 kanonik değişkenler arasındaki ilişkinin maksimum yapıldığı ve 1. kanonik korelasyon katsayısının,

$$r_{U_1V_1} = \underset{\sim}{a}_1' \; \Sigma_{12} \; \underset{\sim}{b}_1 \tag{3.28}$$

olduğu tespit edilmişti. Buradaki ikinci adım ise, U_2 ve V_2 kanonik değişkenler arasındaki 2. kanonik korelasyon katsayısının belirlenmesidir. Bu bilgiler ışığında U_2 ve V_2 kanonik değişkenler Eşitlik (3.29)' den hesaplanabilmektedir.

$$U_2 = X\underset{\sim}{a}_2 \; ; \qquad V_2 = Y\underset{\sim}{b}_2 \tag{3.29}$$

U_2 ve V_2 kanonik değişkenler arasındaki, 2. kanonik korelasyon katsayısı ise Eşitlik (3.30)' da verilmiştir.

$$r_{U_2V_2} = \frac{\underset{\sim}{a}_2' \; \Sigma_{12} \; \underset{\sim}{b}_2}{\sqrt{(\underset{\sim}{a}_2' \; \Sigma_{11} \; \underset{\sim}{a}_2)(\underset{\sim}{b}_2' \; \Sigma_{22} \; \underset{\sim}{b}_2)}} \tag{3.30}$$

Burada, $r_{U_2V_2}$ ' nin maksimum olabilmesi için Eşitlik (3.19)' da verilen Langranj fonksiyonu Eşitlik (3.31)' de verildiği gibi yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = {} & \underset{\sim}{a}_2' \; \Sigma_{12} \; \underset{\sim}{b}_2 - 0.5 \; \lambda_1 (\underset{\sim}{a}_2' \; \Sigma_{11} \; \underset{\sim}{a}_2 - 1) - 0.5 \; \lambda_2 (\underset{\sim}{b}_2' \; \Sigma_{22} \; \underset{\sim}{b}_2 - 1) \\ & - 0.5 \; \lambda_3 \; (\underset{\sim}{a}_2' \; \Sigma_{11} \; \underset{\sim}{a}_1) - 0.5 \; \lambda_4 (\underset{\sim}{b}_2' \; \Sigma_{22} \; \underset{\sim}{b}_1) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Eşitlik (3.31)' de verilen Langranj fonksiyonu $\underset{\sim}{a}_2$, $\underset{\sim}{b}_2$, λ_1, λ_2, λ_3 ve λ_4' ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{a}_2} = \Sigma_{12} \; \underset{\sim}{b}_2 \; - \; \lambda_1 \; \Sigma_{11} \; \underset{\sim}{a}_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{b_2}} = \Sigma_{21}\, \underset{\sim}{a_2} - \lambda_2\, \Sigma_{22}\, \underset{\sim}{b_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \underset{\sim}{a_2'}\, \Sigma_{11}\, \underset{\sim}{a_2} = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \underset{\sim}{b_2'}\, \Sigma_{22}\, \underset{\sim}{b_2} = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \underset{\sim}{a_2'}\, \Sigma_{11}\, \underset{\sim}{a_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = \underset{\sim}{b_2'}\, \Sigma_{22}\, \underset{\sim}{b_1} = 0 \qquad (3.32)$$

elde edilir. Eşitlik (3.32)' de verilen bilgilere göre, Eşitlik (3.29)' da verilen ikinci kanonik değişken çiftleri arasındaki ikinci kanonik korelasyon katsayısı Eşitlik (3.33)' de gösterildiği formda yazılabilir.

$$r_{U_2V_2} = \underset{\sim}{a_2'}\, \Sigma_{12}\, \underset{\sim}{b_2} \qquad (3.33)$$

Kanonik değişken çiftlerinin ikiden fazla olması durumunda, ilgili kanonik değişken çiftleri arasındaki kanonik korelasyon katsayıları ise, ilgili katsayı vektörlerinin ($\underset{\sim}{a_i'}\, ,\underset{\sim}{b_i}$), Eşitlik (3.33)' de yerine konulması ile elde edilebilmektedir.

Kanonik korelasyon analizi, X ve Y değişken kümeleri arasındaki kovaryansları içeren Σ_{12} kovaryans matrisindeki pq elemanı daha az sayıda elemanla açıklayarak değişken kümeleri arasındaki ilişkiyi ölçmeyi amaçlamaktadır. Bu amaca hizmet eden, her bir küme için doğrusal kombinasyonlar aracılığıyla hesaplanan yeni iki değişken (kanonik değişken) bulmak ve bu değişkenler aracılığıyla X ve Y değişken kümeleri arasındaki korelasyonu hesaplamak kanonik korelasyonun temel amacıdır.

Veri kümesindeki değişkenlerin ölçü birimlerinin ve varyanslarının farklı olması durumda, ya değişkenlerin standardize edilmesi ya da korelasyon matrisine göre kanonik korelasyon analizi yapılması gerekir (Özdamar, 1999). Çünkü varyansları farklı veri kümelerinin kovaryans matrisine göre elde edilen çözümler ile korelasyon matrisine göre elde edilen çözümler, farklılıklar gösterirken, verilerin standardize edilmesi ile iki yöntem arasındaki çözüm farklılıkları ortadan kalkmaktadır. Ayrıca, kovaryans matrisinde, değişken çiftleri arasındaki değişim, yani, değişkenler arasındaki ilişki ortaya konulmaktadır. Korelasyon matrisi sayesinde, değişken çiftleri arasındaki ilişkinin büyüklüğünün ve yönünün ortaya konulmasıyla, aralarındaki ilişki daha iyi yorumlanabilmektedir. Bu sebeple, uygulamada genellikle korelasyon matrisini (Eşitlik, 3.34) kullanarak kanonik korelasyon analizi yapılması analizdeki hesaplama süreci bakımından kolaylık sağlamaktadır.

$$R = D^{-1/2} S\, D^{-1/2} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Eşitlik (3.34)' de;

R , $p+q$ tane değişkenin kendi aralarında kendi aralarındaki ilişki katsayılarını veren ilişki matrisi. Bu matrisin, köşegen elemanları bir ve köşegen dışı elemanları ise -1 ile +1 arasında değerler alabilen ilişki katsayılarını göstermektedir.

D, köşegen elemanları s_{ii}' ler olan pxp boyutlu köşegen matrisi,

S, kovaryans matrisi,

R_{11} , p tane değişkenin kendi aralarındaki ilişki katsayılarını veren ilişki matrisi,

R_{22}, q tane değişkenin kendi aralarındaki ilişki katsayılarını veren ilişki matrisi,

R_{12}, p ve q tane değişkenlerin kendi aralarındaki ilişki katsayısını veren ilişki matrisi,

R_{21} ise R_{12} matrisinin devriğidir. Bu korelasyon matrisinin alt matrisleri sırası ile Eşitlik (3.35), (3.36) ve (3.37)' de verilmiştir.

$$R_{11} = \begin{bmatrix} r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} & \cdots & r_{X_1X_p} \\ r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} & \cdots & r_{X_2X_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{X_pX_1} & r_{X_pX_2} & \cdots & r_{X_pX_p} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$R_{22} = \begin{bmatrix} r_{Y_1Y_1} & r_{Y_1Y_2} & \cdots & r_{Y_1Y_q} \\ r_{Y_2Y_1} & r_{Y_2Y_2} & \cdots & r_{Y_2Y_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{Y_qY_1} & r_{Y_qY_2} & \cdots & r_{Y_qY_q} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} r_{X_1Y_1} & r_{X_1Y_2} & \cdots & r_{X_1Y_q} \\ r_{X_2Y_1} & r_{X_2Y_2} & \cdots & r_{X_2Y_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{X_pY_1} & r_{X_pY_2} & \cdots & r_{X_pY_q} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Eşitlik (3.34)’ de verilen R_{21} ise R_{12}’ nin devriğidir. Korelasyon matrisinde köşegen elemanlar bir, köşegen dışı elemanlar ise -1 ile +1 arasında değerler almaktadır.

Eşitlik (3.34)’ de verilen korelasyon matrisi aracılığıyla, kanonik değişkenlerin ve kanonik korelasyonların elde edilmesi için H_1 ve H_2 matrislerinden yararlanılır.

$$H_1 = R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$$
$$H_2 = R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} R_{12} \tag{3.38}$$

Eşitlik (3.38)’ de verilen, $R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$ veya $R_{22}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} R_{12}$ matrislerinin özdeğerleri, ilgili kanonik değişken çifti arasındaki kanonik korelasyon katsayılarının karesini vermektedir (Eşitlik, 3.39).

$$r_{U_iV_i} = \sqrt{\lambda_i} \qquad i = 1,2,\ldots,p \tag{3.39}$$

Kanonik değişken çiftleri arasındaki maksimum kanonik korelasyon katsayısı Eşitlik (3.40)' da verilmiştir.

$$r_{U_1V_1} = \sqrt{\lambda_1} \tag{3.40}$$

X değişken kümesine ait kanonik katsayının belirlenmesinde H_1 matrisinin, *Y* kümesi için ise, H_2 matrisinin öz değer-öz vektör çiftlerinden yararlanılır.

X değişken kümesine ait en büyük öz değer λ_1 için standardize edilmemiş kanonik katsayılar öz vektör elemanı, e_1 ;

$$(H_1 - \lambda_1 I)\ e_1 = 0 \tag{3.41}$$

eşitliği sayesinde hesaplanabilmektedir.

X değişken kümesine ait kanonik katsayının belirlenmesinde H_1 matrisinin, *Y* kümesi için ise, H_2 matrisinin öz değer-öz vektör çiftlerinden yararlanılır.

Y değişken kümesine ait en büyük öz değer λ_1 için standardize edilmemiş kanonik katsayılar öz vektör elemanı, e_1 ;

$$(H_2 - \lambda_1 I)\ e_1 = 0 \tag{3.42}$$

eşitliğinden hesaplanabilmektedir. Buradan elde edilen öz vektörler (standardize edilmiş kanonik katsayılar), orijinal değişkende meydana gelen bir standart sapmalık artışa karşılık, kanonik değişkende standart sapma cinsinden meydana gelen değişim miktarını göstermektedir. Bir başka değişle, bu katsayılar, bir kümedeki kanonik değişkenin oluşmasında, o kümede yer alan orijinal değişkenlerin etki miktarlarını göstermektedir.

X ve *Y* değişken kümeleri için, standardize kanonik katsayılar sırası ile Eşitlik (3.43) yardımı ile hesaplanabilmektedir(Özdamar, 1999).

$$\underset{\sim}{a_i} = \frac{e_i}{\sqrt{Var(U_i)}} = \frac{e_i}{\sqrt{(e_{i1} \quad e_{i2} \ldots e_{ip})\Sigma_{11}(e_{i1} \quad e_{i2} \ldots e_{ip})'}}$$

$$\underset{\sim}{b_i} = \frac{f_i}{\sqrt{Var(V_i)}} = \frac{f_i}{\sqrt{(f_{i1} \quad f_{i2} \ldots f_{ip})\Sigma_{22}(f_{i1} \quad f_{i2} \ldots f_{ip})'}} \tag{3.43}$$

Araştırmadaki, örnek genişliği çok küçük veya değişkenler arasında çoklu bağlantının olması durumunda, standardize edilmiş kanonik katsayılar yerine kanonik değişken ile o kümede yer alan orijinal değişkenler arasındaki korelasyon katsayılarının (kanonik yükler, faktör yapıları ya da yapısal korelasyonlar olarak da bilinmektedir) kullanılması önerilmektedir (Sharma, 1996; Al-Kandari ve Jolliffe, 1997).

Bu şekilde doğrusal kombinasyonlar, yani kanonik değişkenler arasındaki kanonik korelasyonlar büyükten küçüğe doğru azalan sırada hesaplanmaktadır.

3.2.4. Kanonik Değişkenler İle Orijinal Değişkenler Arasındaki Korelasyonlar

X ve *Y* değişken kümelerinden elde edilen *U* ve *V* kanonik değişkenler, hem kendi değişken kümeleri içerisindeki (yani, *U* ile $X_1, X_2, \ldots, X_p$ arasında), hem de diğer kümenin orijinal değişkenleri (yani, *U* ile $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ arasında) ile bir ilişkinin olması ve bunun yorumu ile kanonik değişkene herhangi bir orijinal değişkenin ne ölçüde katkı sağladığını ortaya koyma açısından oldukça önemlidir.

Bu bilgiler doğrultusunda U_i kanonik değişkeni ile kendi kümesindeki (*X*) orijinal değişkenler arasındaki korelasyonlar ve U_i kanonik değişkeni ile *Y* değişken kümesindeki orijinal değişkenler arasındaki korelasyonlar Eşitlik (3.44) ve (3.45)' da, V_i kanonik değişkeni ile *X* değişken kümesindeki orijinal değişkenler arasındaki korelasyonlar ve V_i kanonik değişkeni ile *Y* değişken kümesindeki orijinal değişkenler arasındaki korelasyonlar ise Eşitlik (3.46) ve (3.47)' de verilmiştir.

$$\text{Kor}(U_i, X_i) = \frac{\text{Kov}(U_i, X_i)}{\{[\text{Köş}(\text{Var}(U_i))][\text{Köş}(\text{Var}(X_i))]\}}$$

$$= \frac{a_i' \underset{\sim}{\Sigma}_{11}}{[\text{Köş}(\Sigma_{11})]^{1/2}} \tag{3.44}$$

eşitliği elde edilmektedir. Buna göre diğer eşitlikler sırası ile,

$$\text{Kor}(U_i, Y) = \frac{a_i' \underset{\sim}{\Sigma}_{12}}{[\text{Köş}(\Sigma_{22})]^{1/2}} \tag{3.45}$$

$$\text{Kor}(V_i, X) = \frac{b_i' \underset{\sim}{\Sigma}_{21}}{[\text{Köş}(\Sigma_{11})]^{1/2}} \tag{3.46}$$

$$\text{Kor}(V_i, Y) = \frac{b_i' \underset{\sim}{\Sigma}_{22}}{[\text{Köş}(\Sigma_{22})]^{1/2}} \tag{3.47}$$

olarak verilebilmektedir. Burada, elde edilen korelasyon katsayıları arasında da Eşitlik (3.48)' da verildiği gibi bir ilişki söz konusudur.

$$\text{Kor}(U_i, Y) = \rho_i \, \text{Kor}(V_i, Y)$$
$$\text{Kor}(V_i, X) = \rho_i \, \text{Kor}(U_i, X) \tag{3.48}$$

Eşitlikte, ρ_i , i. kanonik değişken çifti arasındaki kanonik korelasyon katsayısını göstermektedir.

3.2.5. Kanonik Korelasyon Katsayıları İle İlgili Sonuçlar

X ve Y kümelerindeki değişken sayılarının belirli olduğu durumlarda, kanonik korelasyon katsayısının, istatistik kuramında eşit olduğu özel durumlar ifade edilirse;

a) Her iki kümede de değişken sayısının bir olduğu durumda ($p = q = 1$); varyans-kovaryans matrisi,

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

ve Eşitlik (3.24) ise Eşitlik (3.50)' deki forma dönüşür.

$$-\rho^2 \sigma_{11} + \sigma_{12} \sigma_{22}^{-1} \sigma_{21} = 0 \tag{3.50}$$

Buradan ρ^2 yalnız bırakılırsa Eşitlik (3.51),

$$\rho^2 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \tag{3.51}$$

elde edilir. Bunun pozitif karekökü, Kanonik korelasyon katsayısını vermektedir. Bu ise, Pearson korelasyon katsayısına eşittir.

b) X ve Y değişken kümelerinden, birinde sadece bir değişken ve diğerinde ise birden fazla değişken ($p = 1$, $q > 1$) söz konusu ise, varyans-kovaryans matrisi Eşitlik (3.51)' de verildiği gibi ifade edilir.

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Eşitlik (3.26) ise Eşitlik (3.53)' deki forma dönüşür.

$$-\rho^2 \sigma_{11} + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = 0 \tag{3.53}$$

Buradan ρ^2 değeri,

$$\rho^2 = \frac{\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}}{\sigma_{11}} \tag{3.54}$$

olarak elde edilir. Bu ρ^2 değerlerinin pozitif karekökü, kanonik korelasyon katsayısını vermektedir. Buradaki değişken kümelerinden biri bağımlı (p = 1) diğeri bağımsız (q > 1) olmak koşulu ile, elde edilen kanonik korelasyon katsayısının karesi (ρ^2), çoklu regresyon denklemin çoklu belirtme katsayına eşit olduğu Eşitlik (3.55) yardımıyla görülmektedir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\rho^2 = \frac{\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}}{\sigma_{11}} \qquad (3.55)$$

3.2.6. Kanonik Korelasyon Katsayısının Önem Kontrolü

Kanonik korelasyon analizi sonucu elde edilen kanonik korelasyon katsayılarının kontrolü için en yaygın olarak kullanılan test yöntemi Bartlett tarafından 1941 yılında geliştirilen Wilk's lamda ya da Bartlett test istatistiğidir.

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = ... = \rho_p = 0$

H_1: En az bir $\rho_i \neq 0$

Test istatistik değeri, Eşitlik (3.56)' de verilmiştir.

$$\chi^2 = -\left[(n-1) - (p+q+1)/2\right]\log_e\left(\prod_{i=1}^{p}(1-r_i^2)\right) \qquad (3.56)$$

Bu test istatistiği pq serbestlik dereceli khi-kare tablo değeri ile karşılaştırılmaktadır. H_0 hipotezinin red edilmesi durumunda en büyük olan kanonik korelasyon katsayısı hipotezden çıkarılarak işlemler H_0 hipotezi kabul edilinceye kadar tekrarlanır. İşlem sırasında çıkarılan her kanonik korelasyon katsayısı için değişken sayıları 1 eksiltilerek serbestlik derecesi hesaplanır. Bir başka ifade ile, birinci kanonik korelasyon çıkarıldıktan sonra hesaplanan test istatistiği *(p-1)(q-1)* serbestlik dereceli χ^2 tablo değeri ile karşılaştırılır (Cooley ve Lohnes, 1971; Glynn ve Muirhead, 1978). χ^2 test istatistiğine alternatif olarak Eşitlik (3.57)'de verilen *F* yaklaşımı kullanılmaktadır.

$$F = \frac{1-\lambda_1^{1/t}}{\lambda_1^{1/t}} \frac{sd_2}{sd_1} \sim F_{sd_1, sd_2, \alpha} \tag{3.57}$$

Eşitlikte;

$$\lambda_1 = \prod_{i=1}^{s} (1 - r_i^2); \qquad \text{s} = \min(\text{p,q}); \qquad sd_1 = pq; \qquad sd_2 = wt - \frac{1}{2} pq + 1;$$

$$w = n - \frac{1}{2}(p + q + 3); \qquad t = \sqrt{\frac{p^2 q^2 - 4}{p^2 + q^2 - 5}}$$

Kanonik korelasyon katsayılarının önemliliğini test etmek amacı ile kullanılan diğer önem testleri sırası ile Hotelling-Lawley' in iz (Hotelling-Lawley Trace), Pillai'nin iz (Pillai's Trace) ve Roy' un en büyük kök (Roy 's Greatest Root) testidir.

3.2.7. Açıklanabilirlik Belirleme (Redundancy) İndeksinin Hesaplanması

Büyük örneklerde, küçük kanonik korelasyon katsayıları önemli olabilir iken, *X* ve *Y* değişken kümeleri arasında hesaplanan büyük kanonik korelasyon katsayıları da bu kümeler arasında güçlü bir korelasyonun olduğunu belirtmeyebilir. Çünkü kanonik korelasyon, *X* ve *Y* değişkenlerinin doğrusal bileşenlerini maksimize eder. Bu nedenle *X* ve *Y* değişken kümelerinden herhangi birindeki varyasyonun diğeri tarafından açıklanan kısmını belirtmez. Bunun için, Sharma (1996)' nın bildirdiğine göre, Steward ve Love (1968) tarafından önerilen açıklanabilirlik belirleme indeksi hesaplanır. Bu indeks, kümelerden birindeki varyasyonun diğeri ile açıklanabilen kısmını belirtir. Açıklanabilirlik belirleme indeksi (RI) her kanonik değişken için hesaplanabilir. *U* ve *V* kanonik değişken kümeleri arasında hesaplanan i. kanonik korelasyon için açıklanabilirlik belirleme indeksi iki aşamada hesaplanır. Birinci aşamada, *Y* değişken kümesindeki ya da *Y* değişkenlerinin bulunduğu kümedeki varyasyonun i. kanonik değişken ile ortalama açıklanabilen kısmı bulunur. Bu değer Eşitlik (3.58) yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$OV(Y|V_i) = \frac{\sum_{i=1}^{p} LY_{ij}^2}{p} \tag{3.58}$$

Eşitlikte (3.58)' de, $OV(Y|V_i)$; *Y* değişken kümesindeki varyasyonun i. kanonik değişken (V_i) ile ortalama açıklanabilen kısmını ve LY_{ij}; *Y* değişken kümesindeki j. değişken ile i. kanonik değişken arasındaki yapısal korelasyonu (j. değişkenin yükünü) göstermektedir. İkinci aşamada ise, açıklanabilirlik belirleme indeks Eşitlik (3.59) yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$RI_{U_iV_i} = OV(Y|V_i).r_{uv}^2 \tag{3.59}$$

Bir kümedeki varyasyonun diğer kümedeki değişkenler ile toplam açıklanabilen kısmı, toplam açıklanabilirlik belirleme olarak adlandırılır (Sharma, 1996). Bu katsayı Eşitlik (3.60) yardımı ile hesaplanabilmektedir.

$$TRI_{Y|X} = \sum_{i=1}^{p} RI_{X_i|Y_i} \tag{3.60}$$

Toplam açıklanabilirlik belirleme indeksi, *Y* değişken kümesindeki varyasyonun *X* değişken kümesi ile açıklanabilen kısmını belirtir.

3.2.8. Kısmi Kanonik Korelasyon Analizi

s tane değişkene sahip *K* değişken kümesi, *r* tane değişkene sahip *L* değişken kümesi ve *p* tane değişkene sahip *Y* değişken kümesinden bir tanesinin diğer iki değişken kümeleri üzerinden etkisinin arıtılması durumunda, iki değişken kümesi arasındaki ilişki kısmi kanonik korelasyon analizi ile ortaya konmaktadır. Kısmi kanonik korelasyon katsayıların hesaplanabilmesi için, kısmi korelasyon katsayılarının hesaplanmasında takip edilen eşitlikler genelleştirilmektedir.

Çalışmada, incelenen değişken kümeleri arasındaki ilişkilerin belirlenmesi adımsal olarak anlatılacaktır. İncelen özelliklere ait uzunluk ölçüleri *K* değişken kümesi (VU, GD, CY), genişlik ölçüleri *L* değişken kümesi (GG, GÇ, ÖS, OS, AS), diğer özellikler ise *Y* değişken kümesi (DA, SKA, AA) olarak tanımlanmıştır. (Standardize edilmiş veriler Ek 2' de verilmiştir). Kısmi kanonik korelasyon analizi için eşitlikler kanonik korelasyon analizinde verilen eşitliklere benzer şekilde oluşturulmaktadır.

K değişken kümesi $\underset{\sim}{\mu_1}$ ortalama vektörüne, *L* değişken kümesi ise $\underset{\sim}{\mu_2}$ ortalama vektörüne, *Y* değişken kümesi ise $\underset{\sim}{\mu_3}$ ortalama vektörüne sahiptir. Bu değişken kümelerine ait ortalama ve kovaryans matrisleri sırası ile Eşitlik (3.61)' de verilmiştir.

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu_1} \\ \underset{\sim}{\mu_2} \\ \underset{\sim}{\mu_3} \end{bmatrix} ; \qquad \sum = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.61)$$

Eşitlik (3.61)' de, ortalama matrisindeki $\underset{\sim}{\mu_1}$, $\underset{\sim}{\mu_2}$ ve $\underset{\sim}{\mu_3}$ sırası ile *sx1*, *rx1* ve *px1* boyutlu vektörleri, varyans-kovaryans matrisindeki elemanlar; $\Sigma_{11} : sxs$, $\Sigma_{12} : sxr$, $\Sigma_{13} : sxp$, $\Sigma_{22} : rxr$, $\Sigma_{21} : rxs$, $\Sigma_{23} : rxp$, $\Sigma_{31} : pxs$, $\Sigma_{32} : pxr$ ve $\Sigma_{33} : pxp$ boyutlu olarak tanımlanabilir ve sırası ile Eşitlik (3.9), (3.10) ve (3.11)' e benzer şekilde hesaplanabilmektedir.

Varyans-kovaryans matrisinde $\Sigma_{21} : rxs$, $\Sigma_{12} : sxr$ 'in devriği, $\Sigma_{31} : pxs$, $\Sigma_{13} : sxp$ 'in devriği, $\Sigma_{32} : pxr$ ise $\Sigma_{23} : rxp$ 'ün devriğidir. *K* değişken kümesinin etkisi arıtıldığında, *L* ve *Y* değişken kümelerinden elde edilecek kanonik değişkenler Eşitlik (3.14)' e benzer biçimde Eşitlik (3.62)' de verilmiştir.

$$W_i = \underset{\sim}{e_i'} \underset{\sim}{L} \qquad V_i = \underset{\sim}{f_i'} \underset{\sim}{Y} \tag{3.62}$$

Eşitlik (3.62)' de verilen, $\underset{\sim}{e}$ ve $\underset{\sim}{f}$ katsayıları, sırası ile *rx1* ve *px1*' lik vektörlerdir. Bu katsayılar, Eşitlik (3.63)' de verilen *L* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_3 ile *Y* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_4 matrislerinin özdeğerlerine karşılık gelen öz vektör elemanlarıdır (Tatlıdil, 1996; Timm, 2002)

$$M_3 = \Sigma_{11.2}^{-1} \Sigma_{13.2} \Sigma_{33.2}^{-1} \Sigma_{31.2}$$

$$M_4 = \Sigma_{33.2}^{-1} \Sigma_{31.2} \Sigma_{11.2}^{-1} \Sigma_{13.2} \tag{3.63}$$

Bunun yanı sıra, *L* değişken kümesinin etkisi arıtıldığında, *K* ve *Y* değişken kümelerinden elde edilecek kanonik değişkenler Eşitlik (3.14)' e benzer biçimde Eşitlik (3.64)' de verilmiştir.

$$Z_i = \underset{\sim}{e_i'} \underset{\sim}{K} \qquad V_i = \underset{\sim}{f_i'} \underset{\sim}{Y} \tag{3.64}$$

Eşitlik (3.64)' de verilen, $\underset{\sim}{e}$ ve $\underset{\sim}{f}$ katsayıları, sırası ile *sx1* ve *px1*' lik vektörlerdir. Bu katsayılar, Eşitlik (3.65)' de verilen *K* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_5 ile *Y* değişken kümesinin çözüm matrisi, M_6 matrislerinin özdeğerlerine karşılık gelen öz vektör elemanlarıdır.

$$M_5 = \Sigma_{22.1}^{-1} \Sigma_{23.1} \Sigma_{33.1}^{-1} \Sigma_{32.1}$$

$$M_6 = \Sigma_{33.1}^{-1} \Sigma_{32.1} \Sigma_{22.1}^{-1} \Sigma_{23.1} \tag{3.65}$$

Bu çalışmada *K* değişken kümesinin etkisi arıtıldığından, Eşitlik (3.63)' de bulunan öğeler sırası ile Eşitlik (3.66) yardımı ile hesaplanabilmektedir.

$$\Sigma_{11.2}^{-1} = \left[\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\right]^{-1}$$

$$\Sigma_{13.2} = \left[\Sigma_{13} - \Sigma_{21}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{23}\right]$$

$$\Sigma_{33.2}^{-1} = \left[\Sigma_{33} - \Sigma_{32}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{23}\right]^{-1}$$

$$\Sigma_{31.2} = \left[\Sigma_{31} - \Sigma_{32}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\right] \tag{3.66}$$

M_3 çözüm matrisinin özdeğerleri kanonik korelasyon katsayılarının karelerini, öz vektörler ise, kanonik değişken çiftlerinden *W*' ye ait kanonik ağırlıkları (*e* vektörlerini) vermektedir. Buna göre M_3 çözüm matrisinin özdeğerleri Eşitlik (3.67) yardımı ile,

$$|\,(M_3-\lambda_i I)| = 0 \tag{3.67}$$

hesaplanabilmektedir. Çözüm matrisinden hesaplanan özdeğerlerin her biri sırası ile Eşitlik (3.68)' de yerine konulması ile M_3 çözüm matrisinin öz vektörleri, diğer bir ifade ile *W* kanonik değişkeninin katsayıları (ağırlıkları) bulunmaktadır.

$$(M_3 - \lambda_i I)\,\underset{\sim}{e} = 0 \tag{3.68}$$

Çözüm matrisinin özdeğerleri kanonik korelasyon katsayılarının karelerini, öz vektörler ise, kanonik değişken çiftlerinden V' ye ait kanonik ağırlıkları (*f* vektörlerini) vermektedir.

Buna göre M_4 çözüm matrisinin özdeğerleri Eşitlik (3.69) yardımı ile hesaplanabilmektedir.

$$|\,(M_4-\lambda_i I)| = 0 \tag{3.69}$$

M_4 çözüm matrisinden hesaplanan özdeğerlerin her biri sırası ile Eşitlik (3.68)' de yerine konulması ile M_4 çözüm matrisinin öz vektörleri, diğer bir ifade ile V kanonik değişkeninin katsayıları (ağırlıkları) bulunmaktadır.

$$(M_4 - \lambda_i I)\, \underset{\sim}{f} = 0 \tag{3.70}$$

Kısmi kanonik korelasyon katsayılarının sayısı, maksimum kovaryans matrisin *(rxp)* boyutundan küçük olan *p* adettir. Buna göre; *K* değişken kümesi sabit tutulduğunda, *W* ve *V* kanonik değişkenleri arasındaki kısmi kanonik korelasyon, M_4 çözüm matrisinin özdeğerlerinin kareköküne eşit olmaktadır.

3.2.8.1. Kısmi Kanonik Korelasyon Katsayılarını Önem Kontrolleri

K değişken kümesinin etkisi sabit tutulduğunda, *L* ve *Y* değişken kümeleri arasındaki ilişkinin düzeyi kısmi kanonik korelasyon analizi ile ortaya konmaktadır. Çalışmada *K* değişken kümesinin etkisi arıtıldığında, *L* ve *Y* değişkenleri kümeleri arasında anlamlı ilişkilerin belirlenmesi, kanonik korelasyon katsayılarının önem kontrolüne benzer şekilde yapılabilmektedir. Buna göre kanonik değişken çiftleri arasından hesaplanan kısmi kanonik korelasyon katsayılarının önem testi Eşitlik (3.71)' de verilmiştir.

$$H_0 : \rho_{1.K} = \rho_{2.K} = ... = \rho_{p.K} = 0$$
$$H_1 : \text{En az bir } \rho_{i.K} \neq 0; \quad \text{i} = 1,2,...\text{p}$$

$$\chi^2 = -\left[(n-s-1)-(r+p+1)/2\right]\log_e\left(\prod_{i=1}^{p}(1-r_{i.K}^2)\right) \sim \chi^2_{rp,\alpha} \tag{3.71}$$

Hesap Değeri > Cetvel değeri olduğu durumda H_0 hipotezi red edilir. Böylece, I. kısmi kanonik korelasyon katsayısının önemli olduğuna karar verilir.

II. kısmi kanonik korelasyon değerinin önemli olup olmadığına bakılabilmesi için I. kısmi kanonik korelasyon değeri eşitlikten çıkartılır ve geri kalan kanonik değişken çiftleri arasından hesaplanan kısmi kanonik korelasyon katsayılarının önem testi için Eşitlik (3.72)' den yararlanılır.

$H_0 : \rho_{2.K} = ... = \rho_{p.K} = 0$

$H_1 :$ En az bir $\rho_{i.K} \neq 0; \quad$ i = 2,...p

$$\chi^2 = -[(n-s-1)-(r+p+1)/2]\log_e\left(\prod_{i=2}^{p}(1-r_{i.K}^2)\right) \sim \chi^2_{(p-1)(r-1),\alpha} \qquad (3.72)$$

Hesap Değeri > Cetvel değeri olduğu durumda H_0 hipotezi red edilir ise, ikinci kanonik korelasyon katsayısı yine test istatistiğinden çıkarılmak sureti ile önem testleri için işleme devam edilmesi gerekir. Eğer, cetvel değeri > hesap değeri olduğu durumda H_0 hipotezi kabul edilir. Böylece, II. kısmi kanonik korelasyonun önemsiz olduğuna karar verilir. Dolayısı ile üçüncü kısmi kanonik korelasyon katsayısının önem kontrolü yapılmasına gerek yoktur. Eğer çalışmada sadece birinci kanonik korelasyon katsayısı istatistiksel olarak önemli ise, birinci kısmi kanonik değişkenlerin bulunması (W_1 ve V_1) ve bu değişkenler ile orijinal değişkenler arasındaki korelasyona bakılması ve hesaplanan kısmi kanonik değişkenlerin dahil olmadıkları değişken kümelerinde görülen toplam varyasyonun ne kadarını izah edebildiği tespit edilmesi gereklidir.

Çalışmada birinci kısmi kanonik korelasyon katsayısı önemli bulunduğu dikkate alındığında, birinci kanonik değişkenleri için standardize kısmi kanonik katsayılar ve kanonik yüklerinin belirlenmesi ve buna göre orijinal değişkenler ile kısmi kanonik değişkenler arasındaki ilişkinin ortaya konması gerekmektedir. Buna göre standardize kısmi kanonik katsayılar Eşitlik (3.73)' den,

$$a_{11} = \frac{e_{11}}{\sqrt{e'_{i1}\,\Sigma_{11.2}\,e_{i1}}} \qquad (3.73)$$

olarak hesaplanabilmektedir. Y değişken kümesi için standardize kısmi kanonik katsayılar Eşitlik (3.74)' den;

$$b_1 = \frac{f_{11}}{\sqrt{f'_{i1}\,\Sigma_{33.2}\, f_{i1}}} \tag{3.74}$$

olarak hesaplanabilmektedir.

3.2.8.2 Kanonik Değişkenler İle Orijinal Değişkenler Arasındaki Korelasyonlar

K değişken kümesi sabit tutulduğunda, L ve Y değişken kümelerinden elde edilen W ve V kanonik değişkenler, hem kendi değişken kümeleri içerisindeki (yani, W ile $L_1, L_2,...,L_r$ arasında), hem de diğer kümenin orijinal değişkenleri (yani, W ile $Y_1, Y_2,...,Y_p$ arasında) ile bir ilişkinin olması ve bunun yorumu ile kısmi kanonik değişkene herhangi bir orijinal değişkenin ne ölçüde katkı sağladığını ortaya koyma açısından oldukça önemlidir.

Kısmi kanonik değişkenler ile orijinal değişkenler arasındaki kısmi kanonik yükler (loading veya korelasyonlar) Eşitlik (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) ve (3.79)' dan hesaplanabilmektedir.

$$\mathrm{Kor}\ (\mathrm{W}_{\mathrm{i.K}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}) = \frac{\mathrm{Kov}\ (\mathrm{W}_{\mathrm{i.K}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{i}})}{\{[\mathrm{Kö ş}(\mathrm{Var}\ (\mathrm{W}_{\mathrm{i}}))][\mathrm{Kö ş}(\mathrm{Var}\ (\mathrm{Y}_{\mathrm{i}}))]\}}$$

$$= \frac{a'_i\, \underset{\sim}{\Sigma}_{22.1}}{[\mathrm{Kö ş}(\Sigma_{22.1})]^{1/2}} \tag{3.75}$$

Eşitlikte i=1 olduğunda,

$$\mathrm{Kor}\ (\mathrm{W}_{1.\mathrm{K}}, \mathrm{Y}_1) = \frac{a'_1\, \underset{\sim}{\Sigma}_{22.1}}{[\mathrm{Köş}(\Sigma_{22.1})]^{1/2}} \tag{3.76}$$

eşitliği elde edilmektedir. Buna göre diğer eşitlikler sırası ile,

$$\text{Kor}\,(W_{1.K}\,,Y_1) = \frac{\underset{\sim}{a'_1}\,\Sigma_{23.1}}{\left[\text{Köş}\left(\Sigma_{33.1}\right)\right]^{1/2}} \tag{3.77}$$

$$\text{Kor}\,(V_{1.K}\,,L_1) = \frac{\underset{\sim}{b'_1}\,\Sigma_{32.1}}{\left[\text{Köş}\left(\Sigma_{22.1}\right)\right]^{1/2}} \tag{3.78}$$

$$Kor\,(V_{1.K}\,,Y_1) = \frac{\underset{\sim}{b'_1}\,\Sigma_{33.1}}{\left[\text{Köş}\left(\Sigma_{33.1}\right)\right]^{1/2}} \tag{3.79}$$

olarak verilebilmektedir. Burada, elde edilen kısmi korelasyon katsayıları arasında ise Eşitlik (3.77)' de verildiği gibi bir ilişki söz konusudur.

$$\begin{aligned} \text{Kor}\,(W_{i.K},\, L) &= \rho_i\,\text{Kor}\,(V_{i.K},\, L\,) \\ \text{Kor}\,(V_{i.K},\, Y) &= \rho_i\,\text{Kor}\,(W_{i.K},\, Y\,) \end{aligned} \tag{3.77}$$

Eşitlikte, ρ_i , i. kanonik değişken çifti arasındaki kısmi kanonik korelasyon katsayısını göstermektedir.