Soru 2.5.11: Sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$f(y) = ye^{-y}$; $y>0$ olarak verilmiş olsun.

$P(Y>1.5)$ olasılığını hesaplayalım.

$P(Y>1.5) = 1-P(Y\leq 1,5) = 1-\int_0^{1,5} y.e^{-y}\,dy$ burada kismi integrasyon kullanırsak:

$u=y \quad \Rightarrow \quad du=dy$

$dv=e^{-y}dy \Rightarrow \quad v=-e^{-y}$

$$uv-\int vdu = -y.e^{-y}\Big|_0^{1.5} + \int_0^{1.5} e^{-y}dy == -1.5e^{-1.5}+1-e^{-1.5} = 1-2.5e^{-1.5}$$

Sonuç olarak: $P(Y>1.5) = 1-(1-2.5e^{-1.5}) = 2.5e^{-1.5}$ bulunur.

2.6 KOŞULLU OLASILIK (Conditional Probability)

Koşullu olasılık $P(A|B)$ biçiminde gösterilir. $P(A|B)$'nın anlamı, B gibi bir olayın gerçekleştiği bilindiğinde A olayının olasılığı olarak ifade edilir.

A ve B, aynı örneklem uzayında tanımlanmış iki olay ve $P(B)>0$ olmak üzere B olayının gerçekleştiği varsayımı altında A olayının koşullu olasılığı

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Biçiminde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanılarak A ve B olaylarının birlikte gerçekleşme olasılığını koşullu olasılık yardımı ile

$$P(A\cap B) = P(A|B).P(B)$$

biçiminde bulabiliriz.

Örneğin; S, n tane eşit olasılıklı sonuca sahip bir örneklem uzayı olsun. Bu örneklem uzayı üzerindeki A ve B olayları sırası ile a ve b tane sonuca sahip iki olayı göstersin. A ve B olaylarının ara kesitlerindeki eleman sayısı da c olsun. B olayının gerçekleştiği bilindiğinde A'nın koşullu olasılığı

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{c}{n}}{\frac{b}{n}} = \frac{c}{b}$$

olarak bulunur.

<u>Örnek:</u> 52'lik bir oyun kağıdı destesinden bir kart çekiliyor. Kartın vale olduğu bilindiğine göre çekilen kartın kupa olma olasılığı nedir?

A ve B olaylarını tanımlarsak,

A: Çekilen kartın kupa olması.

B: Çekilen kartın vale olması.

Bu durumda B olayının 4 elemanı (kupa, karo, sinek ve maça valeleri) vardır.

$$P(B) = \frac{4}{52} \quad \text{ve} \quad P(B \cap A) = \frac{1}{52} \quad \text{olur.}$$

Aranan koşullu olasılık P(A|B)'dır.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/52}{4/52} = \frac{1}{4}$$

Örnek:

İ, istatistik dersinden başarısız öğrencileri ve B; bilgisayar dersinden başarısız öğrencileri göstersin.

P(İ)=0,45, P(B)=0,35 ve P(İ∩B) = 0,25 verilmiş olsun

a) $P(İ|B) = \dfrac{P(İ \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}35} = \dfrac{5}{7}$ = Bilgisayar Dersinde Başarılı olduğu bilinen öğrencinin İstatistik dersinden geçme olasılığı;

b) $P(B|İ) = \dfrac{P(B \cap İ)}{P(İ)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}45} = \dfrac{5}{9}$ = İstatistik Dersinde Başarılı olduğu bilinen öğrencinin Bilgisayar dersinden geçme olasılığı;

c) $P(İ \cup B) = P(İ) + P(B) - P(İ \cap B)$

= 0,45+0,35-0,25=0,55= Bu iki dersten en az birinde başarılı olma olasılığı

İki Olayın Bağımsızlığı

A ve B gibi iki olaydan birinin gerçekleşmesi ötekinin gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olayları bağımsızdır. Yani bir olayın gerçekleşme olasılığı önceki olayın gerçekleşip gerçekleşmediğine bağlı değilse bu olaylara bağımsız olaylar denir.

Simgelerle gösterirsek,

- $P(A \mid B) = P(A)$ ve/veya $P(B \mid A) = P(B)$ ve/veya $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır.
- A ve B olaylarının bağımsız olduğu biliniyorsa $P(A \mid B) = P(A)$, $P(B \mid A) = P(B)$ ve $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ eşitlikleri sağlanır.

Teorem: A ve B olayları bağımsız ise $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$ olur

Tanıt: $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$

ve

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$ yazılabilir.

Her iki eşitlikten

$$1 - P(A \cap B) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

A ve B bağımsız olduğu için $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ 'dir.

$$1 - P(A).P(B) = 2 - P(A) - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

elde edilir.

Tam Bağımsızlık (İkiden Çok olayların Bağımsızlığı)

A, B ve C gibi üç olayın tam bağımsız olması için aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekir.

$* P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$* P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$* P(B \cap C) = P(B).P(C)$

$* P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

n tane olayın bağımsız olabilmesi için

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k), k = 2,3,4,...,n$ eşitliğinin sağlanması gerekir.

Örnek: Bir zar atılıyor. A olayı zarın 1 ya da 2 gelmesi, B olayı zarın çift gelmesi olmak üzere A ve B olayları bağımsız mıdır?

$A = \{1,2\}$ $\qquad B = \{2,4,6\}$

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$ $\qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$ $\qquad P((A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = P(A).P((B)$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ olduğundan A ve B olayları bağımsızdır.

Örnek: iki dengeli zar birlikte atılıyor.
A: 1. zarın bir ya da iki gelmesi,
B: İkinci zarın 3,4 ya da 5 gelmesi,
C: Zarlardaki sayıların toplamının 4,11 ve 12 olmak üzere bu üç olayın tam bağısız olup olmadıklarını araştınız.

C B A

$$S\left\{\begin{matrix}(1,2), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6)\\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6)\\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6)\\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6)\\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6)\\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6)\end{matrix}\right\}$$

C

$$P(A)=\frac{12}{36}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \qquad P(B)=\frac{18}{36}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, \qquad P(A\cap C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$P(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{36}$ olarak bulunur.Üç olaya ilişkin tam bağımsızlık koşullarının sağlanıp sağlanmadığı incelenir.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

$\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{6}$ sağlanır.

$$P(A\cap B)=P(A).(B)$$

$\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}$ sağlanır.

$$P(A\cap C)=P(A).(C)$$

$\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{6}$ sağlanır.

$$P(B\cap C)=P(B).P(C)$$

$\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{6}\Rightarrow\dfrac{1}{18}\neq\dfrac{1}{12}$ sağlanmaz.

A ile B, Aile C, olayları bağımsız olmasına rağmen Bile C olayları bağımsız olmadığından, bu üç olayın tam bağımsız olduğu söylenemez.

Ayrık olaylarla, bağımsız olayları birbirine karıştırmamak gerekir. Ayrık olayların ortak noktası yoktur.

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$' dır. (A ve B ayrık olaydır.)

Olayların aynı zamanda olma olasılıkları sıfır değilse, ortak noktaları var demektir. Ortak noktalarının olması ayrık olmadıkları anlamına gelir, ancak bağımsız oldukları anlamına da gelmez.

Bağımsız olaylarda, olayların aynı zamanda olma olasılığı, kesişime dahil olan olayların olasılıkları çarpımına eşittir.

Soru 2.7.1: A ve B olayları ayrık olaylar ve olasılıkları sıfırdan farklı ise A ve B bağımsız olaylar mıdır?

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ (A ve B ayrık olaylar)

a) Eğer $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ ve

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow$ A ve B olayları bağımsızdır.

$0 \neq P(A).(P(B)$ olacağından A ve B olayları bağımsız değildir.

Soru 2.7.2: $P(A \cap B) = 0.2, P(A) = 0.6$ ve $P(B) = 0.2$ ise,

a) A ve B ayrık olaylar mıdır.

b) A ve B bağımsız olaylar mıdır.

a) $P(A \cap B) = 0.2 > 0$ olduğundan A ve B ayrık olaylar değildir. Ayrık olaylar olabilmesi için $P(A \cap B) = 0$ olmalıdır.

b) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$0.2 \overset{?}{=} (0.6).(0.5)$$

$0.2 \neq 0.3$ olduğu için A ve B bağımsız olaylar değildir. [($P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B bağımsızdır.]

Soru 2.7.4: Başarı durumu çok iyi olmayan bir öğrencinin kimya dersinden geçme şansı 0.35, matematik dersinden geçme şansı 0.40 ve her ikisinden geçme şansı 0.12'dir. Öğrencinin kimya dersinden geçmesi ve matematik dersinden geçmesi olasılıkları bağımsız mıdır? Her iki dersten de başarısız olma olasılığı nedir?

K: Kimya dersinden geçme
M: Matematik dersinden geçme

olayları olsun

$P(K \cap M) = P(K).P(M) \, ise \Rightarrow$ K ve M olayları bağısızdır.

$P(K) = 0.35, \quad P(M) = 0.40, \quad P(K \cap M) = 0.12$

$$P(K \cap M) = P(K).P(M)$$

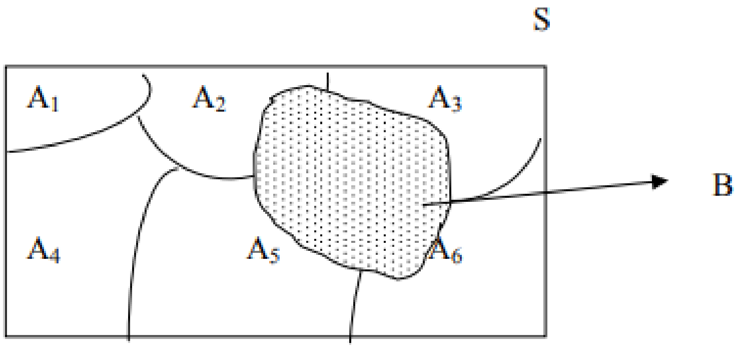
$0.12 \neq (0.35)(0.40) = 0.14$ olduğundan K ve M olayları bağımsız değildir.

P (her iki dersten de başarısız)=1-P(En az birinden başarılı)

$$= 1 - P(K \cup M) = 1 - [P(K) + P(M) - P(K \cap M)]$$
$$= 1 - [0.35 + 0.40 - 0.12]$$
$$= 1 - 0.63 = 0.37' dir.$$

TOPLAM OLASILIK KURALI

Bir B olayının olasılığı doğrudan hesaplanamadığı zaman toplam olasılık kuralından yararlanılır. Örneğin bir sigara fabrikasındaki 6 makine tarafından üretilen sigara paketlerinden rasgele bir tanesi alındığında bu paketin bozuk olması olasılığı araştırılsın. Burada B olayı, çekilen sigara paketinin bozuk olması ise bu paket $A_1, A_2, \ldots A_6$ makinelerin birisinde üretilmiş olabilir.



P(B) olasılığını bulabilmek için topla olasılık formülünden yararlanılır.

Teorem: A_i; $i=1,\ldots,n$

$$-\,A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \text{ için}$$
$$-\,P(A_i) > 0; \quad i = 1,\ldots,n$$
$$-\,S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

biçiminde olmak üzere herhangi bir B olayı için

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)$$

eşitliğine **toplam olasılık kuralı** denir.

Tanıt:

$$P(B) = P(B \cap S)'dır$$
$$= P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n))$$
$$= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots\ldots \cup (B \cap A_n)]$$
$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)$$
$$= P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + \ldots. + P(B \mid A_n).P(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i) olur.$$

Örnek: Bir fabrikada üretilen malları %50'si 1. makineden, %30'u 2. makineden ve %20'si 3. makineden üretilmektedir. Bu makinelerin ürettikleri malların sırasıyla %3, %4 ve %5'inin bozuk olduğu gözlenmiştir. Üretilen mallardan rasgele seçilen bir tanesinin bozuk olma olasılığı nedir?

A_i: Seçilen mal i. Makinede üretilmiştir. (ı=1,2,3)

B: Seçilen mal bozuktur.

$P(A_1)= 0.50$, $P(A_2)=0.30$, $P(A_3)=0,20$

$P(B|A_1)=0.03$, $P(B|A_2)=0.04$,$P(B|A_3)=0.05$

Üretilen mallar bu üç makineden çıktığı için, B olayı A_1, A_2 ve A_3 olaylarının birisiyle birlikte ortaya çıkar. Bu durumda B olayı ayrık üç olayın toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2+P(B\cap A_3)\\ &= P(B\mid A_1).P(A_1)+P(B\mid A_2).P(A_2)+P(B\mid A_3).P(A_3)\\ &= (0.03).(0.50)+(0.04).(0.30)+(0.05).(0.20)\\ &= 0.015+0.012+0.010=0.037\end{aligned}$$

Rasgele seçilen bir malın bozuk olması olasılığı 0.037'dır. Bir başka deyişle bu fabrikadan 1000 tane mal alınırsa, bu seçilen 1000 mal içinde bozuk olacaklar sayısının beklenen değeri 37 olacaktır.

BAYES TEOREMİ

Olasılık kuramının önemli teoremlerinden birisi olan Bayes teoremi şöyle ifade edilir.

Teorem:

$S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, P(Ai)>0 ve her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \phi$ olsun . S örneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir B olayı için P(B)>0 olmak kaydıyla ,

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)} \ , \quad 1 \leq j \leq n \text{ , olur.}$$

Tanıt: Koşullu olasılık tanımından,

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}=\frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{P(B)} \quad \text{yazılabilir.}$$

Toplam olasılık koşulundan yararlanılarak,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i) \quad \text{yazılabilir.}$$

Buradan,

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek: (C. Homur) Üç torbada beyaz (B) ve kırmızı (K) toplar bulunmaktadır. I. Torbada; 1 beyaz, 3 kırmızı top, II. Torbada; 2 beyaz, 2 kırmızı, III. Torbada; 3 beyaz, 1 kırımızı top vardır. Rasgele seçilen bir torbadan çekilen top beyaz ise bu topun I. Torbadan çekilmiş olması olasılığı nedir?

1B 3K	2B 2K	3B 1K
I.	II.	III.

B: Çekilen topun beyaz olması
A_i: Seçilen torbanın I., II, veya III. Torba olması olayları olsun. İ=1, 2, 3

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B \mid A_2) = \frac{2}{4}, \qquad P(B \mid A_3) = \frac{3}{4}$$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1).P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i).P(A_i)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right]}$$

$= \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{6} = \frac{1}{6}$. Çekilen beyaz topun, I. Torbadan gelmesi olasılığı %17'dir.

Örnek: (M. Aytaç S: 41)

Bir hava üssünde tehlike olduğu zaman alarm sisteminin çalışması olasılığı 0.99, tehlike olmadığında alarm vermemesi olasılığı 0.98 ve herhangi bir anda tehlike olması olasılığı da 0.003'tür.

a) Hava üssündeki alarm çalıştığına göre, tehlike nedeniyle çalmış olması olasılığı nedir?

b) Tehlike olması ve alarm sisteminin çalışmaması olasılığı nedir?

A: Alarm sisteminin çalışması,
B: Tehlike olması olaylarını göstersin.

$P(A \mid B) = 0.99, \qquad P(B) = 0.003 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0.997$ olur.

$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.98 \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 0.02$ olur.

a) Alarm sistemi çalışıyorsa tehlike nedeniyle olması olasılığı P(B|A)=? Bayes Teoremi

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B):P(B)}{P(A \mid B).P(B) + P(A \mid \overline{B}).P(\overline{B})} = \frac{(0.99).(0.003)}{(0.99).(0.003) + (0.02).(0.997)} = \frac{297}{2291}$$

Alarm sisteminin çalıştığı bilindiğine göre tehlike nedeniyle çalışması olasılığı, yaklaşık olarak, %13'tür.

b) Çarım kuralı uygulanırsa

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B).P(B) = (0.01)(0.003) = 0.00003$$

Çünkü, burada

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - 0.99 = 0.01 = P(\overline{A})$'dır.

İkiden Çok Olay Olması Durumunda Kesişimler İçin Koşullu Olasılığın Kullanılması.

Koşullu olasılıklar, kesişim olaylarının olasılıklarının bulunmasında da kullanılmaktadır. A ve B gibi iki olay olması durumunda,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) = P(B \mid A).P(A)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır.

Eğer ikiden çok olay söz konusu ise bir genelleme yapılır. $A_1, \ldots, A_n$ n tane olay olmak üzere

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \ldots\ldots P(A_2 \mid A_1).P(A_1)$$

eşitliğinden bulunur.

Örneğin; A,B ve C gibi üç olayımız olsun ve $A \cap B = D$ olarak adlandırılsın.

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) = P(D \cap C) &= P(C \mid D).P(D) \\ &= P(C \mid A \cap B).P(A \cap B) \\ &= P(C \mid A \cap B).P(A \cap B) \\ &= P(C \mid A \cap B).P(B \mid A).P(A) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Örnek: Bir torbada 6 beyaz (B), 8 siyah (S) ve 4 kırmızı (K) top bulunmaktadır. Dört top yerine koymadan (iadesiz) çekiliyor. B, K, B, S serisinin elde edilme olasılığı nedir?

A: İlk seçimde çekilen topun beyaz olması,

B: İkinci seçimde çekilen topun kırmızı olması;

C: Üçüncü seçimde çekilen topun beyaz olması,

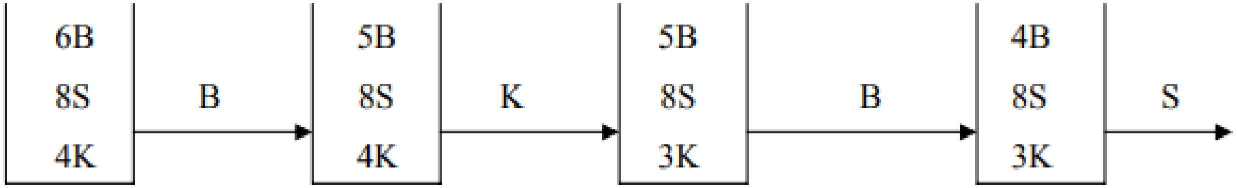
D: Dördüncü seçimde çekilen topun siyah olması olayları olsun

$P(A \cap B \cap C \cap D) = ?$

Genel olarak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1}) P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2}) ...... P(A_2 \mid A_1).P(A_1)$$

yazabiliriz.



$P(A) = \frac{6}{18}$, $P(B \mid A) = \frac{4}{17}$, $P(C \mid A \cap B) = \frac{5}{16}$, $P(D \mid A \cap B \cap C) = \frac{8}{15}$

$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{8}{15} . \frac{5}{16} . \frac{4}{17} . \frac{6}{18} = \frac{2}{153}$ olur.

Koşullu Olasılığın Özelliklerine İlişkin Teoremler:

Teorem: P(A|S)=(A)'dır

Tanıt: $P(A|S)=\dfrac{P(A\cap S)}{P(S)}=\dfrac{P(A)}{1}=P(A)$ olur.

Teorem: P(A)$\neq O$ ise P(S| A)=1'dir

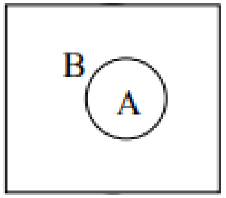
Tanıt: $P(S|A)=\dfrac{P(A\cap S)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$ olur.

Teorem: $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ ve $A\cap B=\phi$ (A ve B ayrık olaylar) ise P(A|B)=0 ve P(B|A)=0'dır.

Tanıt: $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0}{P(A)}=0$ ve $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0}{P(B)}=0$ olur

Teorem: $A\subset B$ ve $P(B)\neq 0$ ise $P(A|B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}'dir$.

Tanıt:

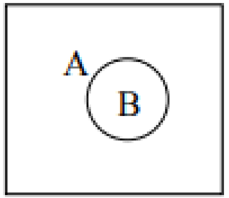


$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$ olur.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$ olur.

Teorem: B$\subset A$ ve $P(B)\neq 0$ ise $P(A|B)=1'dir$

Tanıt: $B\subset A \Rightarrow A\cap B=B$ olur.



$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

olur.

Teorem: $A\cap B)=\phi$ (A ve B ayrık olaylar), P(A)$\neq$0 ya da P(B)$\neq$0 ise

$$P[A|A\cup B)]=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

Tanıt:

$$P[A|(A\cup B)]=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P[(A\cap A)\cup(A\cap B]}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A\cap A)+P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{P(A)+P(\phi)}{P(A)+P(B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$ bulunur.

Teorem: (B_1 ve B_2 ayrık olaylar) $P(A) \neq 0$ ise $P[(B_1 \cup B_2) \mid A] = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$' dır.

Tanıt. $P[(B_1 \cup B_2) \mid A] = \dfrac{P[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{P(A)}$

$$= \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)}{P(A)}$$

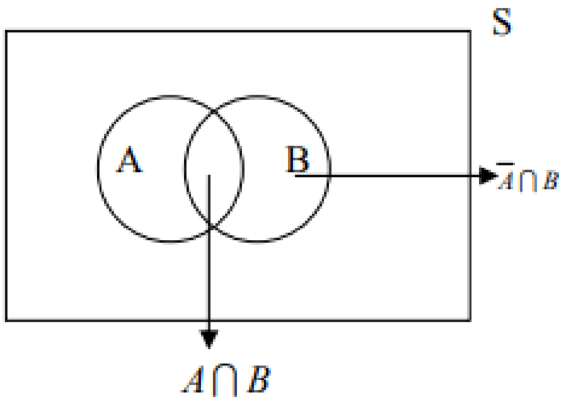
$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$$ elde edilir

Teorem: $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$ 'dir.

Tanıt: $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A \mid B)$$ elde edilir.



BÖLÜM 3 : RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

(Random Variables)

Giriş:

Bölüm 2'de olasılık fonksiyonu, deneyin örneklem uzayını oluşturan sonuçların terimleri ile belirleniyordu. Örneğin; iki zar atıldığında, P gelen 36 olası sıralı ikilinin birisi ile tanımlanıyordu. $P((3,2)) = \frac{1}{36}$, $P((5,6)) = \frac{1}{36}$ gibi.

Araştırmacılar, bazen sonucun kendisinden daha çok, önemli olan belirli sonuçların durumları ile ilgilenebilirler. Örneğin; herhangi bir oyunda iki zarın atılması durumunda sadece sayıların toplamının 9 olması önemli olabilir. Yani araştırmacı (3,6), (6,3) ya da (5,4), (4,5) gelmesi durumları ile ilgilenebilir. Bu durumda 36 elemana sahip bir örneklem uzayını, iki zarın toplamlarının bütün olası durumlarını gösteren bir kümeye indirgemek daha mantıklı olacaktır.

$$S = \{ x+y \quad : x+y=2, 3, ..., 12 \}$$

Burada yapılmak istenen şey, bir deneyin örneklem uzayının yeniden belirlenmesinin sonucunu araştırmaktır. İki zarın atılmasında orijinal örneklem uzayı 36 tane eşit olasılıklı sonucu içerir. Ancak zarların yüzlerindeki toplamları gösteren yeni örneklem uzayı 11 sonuç içerir, fakat bunların ortaya çıkma olasılıkları eşit değildir.

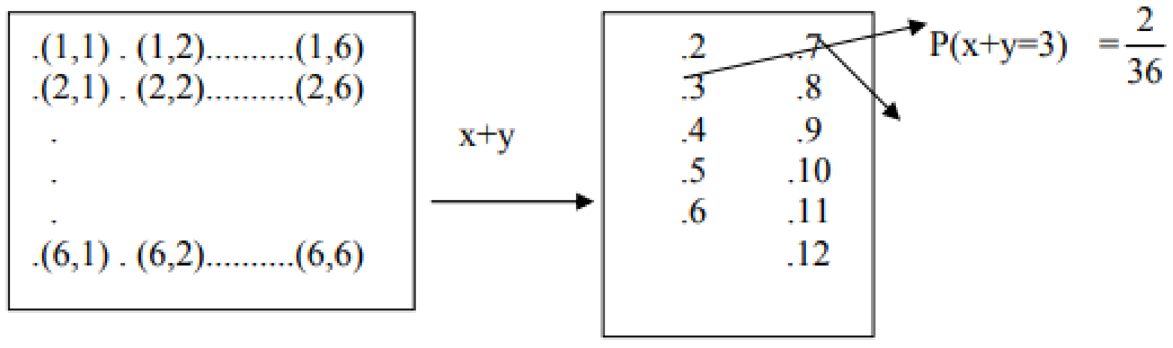
$S = \{\; x+y \quad : x+y=2, 3, ..., 12 \;\}$

Burada yapılmak istenen şey, bir deneyin örneklem uzayının yeniden belirlenmesinin sonucunu araştırmaktır. İki zarın atılmasında orijinal örneklem uzayı 36 tane eşit olasılıklı sonucu içerir. Ancak zarların yüzlerindeki toplamları gösteren yeni örneklem uzayı 11 sonuç içerir, fakat bunların ortaya çıkma olasılıkları eşit değildir.

Örneğin $\quad P((x+y)=1) = P(1, 1) = \frac{1}{36}$ iken

$P((x+y)=3)) = P(1,2) + P(2,1)\ ) = \frac{2}{36}$'dır.

Yani (x,y)'den (x+y)'lere gidiş gibi bir örneklem uzayının yeniden belirlenmesi için uygulanan reel değerli bir fonksiyona RASLANTI DEĞİŞKENİ denir.



⇑ $P(x,y) = \frac{1}{36}$

Orijinal örneklem uzayı

⇑ yeniden düzenlenmiş örneklem uzayı

Yararlanılan Kaynak: http://www.baskent.edu.tr/~iserdem/dersler/258/Bolum3_1.pdf (x,y)'ler S örneklem uzayı içinde ortaya çıkan bir sonuç olmak üzere, (x+y)'ler de bir raslantı değişkenidir. Daha genel olarak ifade edersek, raslantı değişkeni S örnkelem uzayındaki her rasgele olaya sayısal değerler atayan bir fonksiyondur. Yani örneklem uzayındaki noktaları belli olasılıklarla alan değişkenlere RASLANTI DEĞİŞKENİ denir.

Genel olarak raslantı değişkenleri X, Y... gibi büyük harflerle gösterilirken, raslantı değişkeninin aldığı değerler x, y... gibi küçük harflerle gösterilir.

Bir X raslantı değişkeninin x değerini olması olasılıkları aşağıdaki biçimde ifade edilir.:

$$P(X = x) = P\,[\,X(s) = x]$$

$$P(X \le x) = P\,[\,X(s) \le x]$$

$$P(X > x) = P[X(s) > x]$$

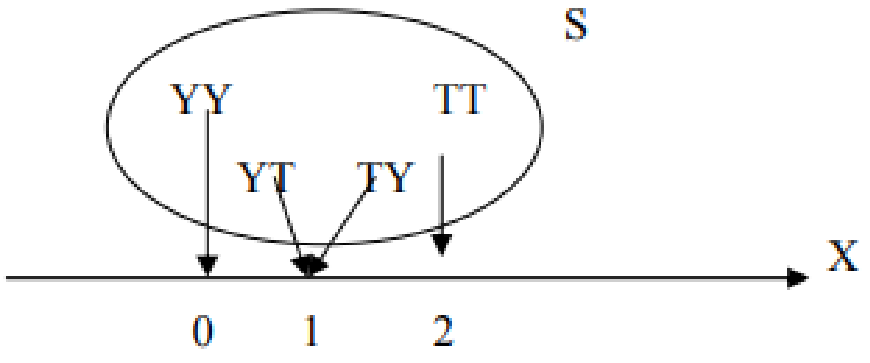
$$P(a \le X \le b) = P[\,a \le X(s) \le b]$$

X raslantı değişkeninin alabileceği tüm olası değerlerin olasılıkları toplamı 1'e eşittir.

Örnek: İki paranın birlikte atıldığı bir denemede, X raslantı değişkeni tura sayısını göstersin. Buna göre X'in aldığı değerleri ve bu değerleri alma olasılıklarını bulalım.

Denemenin örneklem uzayı; $S=\{YY, YT, TY, TT\}$'dir.

X raslantı değişkeni tura sayısını gösterdiğine göre X raslantı değişkeni YY sonucu 0, YT ve TY sonuçları için 1 ve TT sonucu için 2 değeri alır.



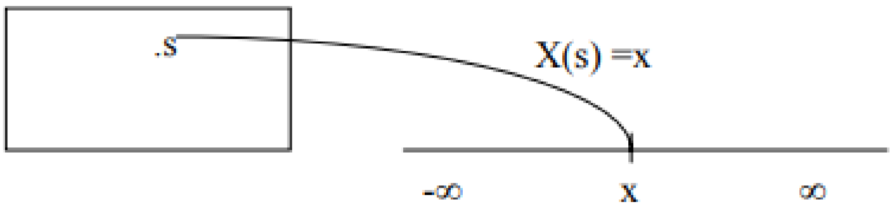
$P(X=0)=P(YY)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=P(YT, TY)=\frac{2}{4}$, $P(X=2)=P(TT)=\frac{1}{4}$

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$'dir.

$P(X\geq 1)=P(YT, TY, TT)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$P(0\leq X\leq 1)=P(YY, YT, TY)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$ olur.

Buna göre herhangi bir X raslantı değişkeni, S örneklem uzayından R gerçek sayılar kümesine bir aktarım yapan bir fonksiyondur.



Eğer X raslantı değişkeninin tüm olası değerlerinin sayısı sonlu, veya sayılabilir sonsuzlukta ise X'e **KESİKLİ RASLANTI DEĞİŞKENİ** denir. Eğer X raslantı değişkeninin tüm olası değerlerinin sayısı (tanım bölgesi), bir aralık ya da aralıklar kümesi ise X'e **SÜREKLİ RASLANTI DEĞİŞKENİ** denir.

3.1 Kesikli ve Sürekli Olasılık Fonksiyonları

X kesikli raslantı değişkenini olmak üzere, X'in her olası X değeri için P(x) =P(X=x) olasılığının kesikli olasılık fonksiyonu (olasılık fonksiyonu) olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

1-Tanım bölgesi dışında ($x \notin R$ için) $P(x)=0$'dır.

2-Tanım bölgesi içinde ($x \in R$ için) $0 \leq P(x) \leq 1$'dir.

3-Tanım bölgesindeki tüm değerler için olasılıklar toplamı 1'dir. $\sum_x P(x) = 1'dir.$

X sürekli raslantı değişkeni olmak üzere X'in her olası x değeri için f(x) fonksiyonunun sürekli olasılık fonksiyonu (olasılık yoğunluk fonksiyonu) olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

1- $f(x)=0$; $x \notin R$ için

2- $0 \leq f(x)$; $x \in R$ için

3- $\int_{x \in R} f(x).dx = 1$ 'dir.

Bir raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu ya da yoğunluk fonksiyonu biliyorsak,

$P(X = a)$, $P(X \geq a)$, $P(a \leq X < b)$ gibi olasılıkları hesaplayabiliriz.

Olasılık yoğunluk fonksiyonun a ile b aralığındaki ($a \leq b$) integrali, ilgili raslantı değişkeninin a ile b aralığında bir değer alma olasılığını verir.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x).dx$$

Bir X raslantı değişkenin tanım bölgesi $-\infty$ ile ∞ olacak şekilde tanımlanmış ise;

-Eğer X kesikli raslantı değişkeni ise

P(X= a), P(X ≤ a), P(X ≥ a) ve P(a ≤ X ≤ b) olasılıkları, olasılık fonksiyonundan yararlanılarak aşağıda verildiği biçimde bulunur:

*$P(X = a) = P_X(a)$

*$P(X \le a) = \sum_{x=-\infty}^{a} P_x(x)$

*$P(X \ge a) = \sum_{x=a}^{\infty} P_X(x)$

*$P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} P_X(x)$

-Eğer X sürekli raslantı değişkeni ise olasılıklar her zaman aralıklara atanır. Her x değeri için P(X=x)=0'dır. $f_X(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanılarak P(X ≤ a), P(X ≥ a) ve P(a ≤ X ≤ b) olasılıkları aşağıdaki biçimde bulunur:

*$P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x).dx$

*$P(X \ge a) = \int_{a}^{\infty} f(x)^{(x)}.dx$

*$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

P(a ≤ X ≤ b) = P(a ≤ X <b) = P(a < X ≤b)=P(a< X < b)'dir.

Örnek: Bir balıkçının günde tuttuğu ortalama balık miktarını gösteren X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}x & ; x = 1,2,...,10 \text{ için} \\ \frac{1}{100}(20-x); & x = 11,12,...20 \text{ için} \\ 0 & ; d.d. \end{cases}$$

biçiminde olsun. Bu olasılık dağılım fonksiyonunu kullanarak

a) Tam 8 balık tutma,

b) 8'den az balık tutma,

c) 8'den çok balık tutma,

d) 6-18 arası balık tutma (6 ve 18 dahil) olasılıklarını bulunuz

a) $P(x=8) = \frac{1}{100}.8 = 0.08$

b) $P(x<8) = \sum_{X=1}^{7} \frac{1}{100}x = \frac{1}{100}.1 + ... \frac{1}{100}.7 = \frac{1+2+...+7}{100} = \frac{28}{100} = 0.28$

c) $P(x \;\; >8) = \sum_{x=9}^{10} \frac{1}{100}x + \sum_{x=11}^{20} \frac{1}{100}(20-x)$

$=1-P(x \le 8) = 1-[P(X<8)+P(X=8)]$

$=1-(0.28+0.08)=0.64$

d) $P(6 \le x \le 18) = \sum_{x=6}^{10} \frac{1}{100}x + \sum_{x=11}^{18} \frac{1}{100}(20-x)$

$= \frac{40}{100} + \frac{44}{100} = \frac{84}{100} = 0.84$

Örnek: Bir madeni para iki kez atılıyor. X raslantı değişkeni paranın iki atılışında gelen tura sayılarını göstersin.

a) X raslantı değişkeninin olaslık fonksiyonunu yazınız.

b) Yazdığınız fonksiyonun olasılık fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

Cevaplar: Bir para iki kez atıldığında X raslantı değişkeninin alacağı değerler 0, 1veya 2'dir.

Örnek uzayında eşit olasılıklı dört nokta olup

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$ şeklinde ifade edilebilir.

a)Bu durumda olasılık fonksiyonu

X=x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

olur.

Bu olasılıkları,

$$P(X=x)=\begin{cases} \binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} & ;x=0,1,2 \\ 0 & ;d.d. \end{cases},$$

biçimindeki olasılık fonksiyonundan elde edilebiliriz.

b) $P(x)\geq 0$; $x=0, 1, 2$ ve $\sum_{x=0}^{2} P(x)=1$ ise yukarıdaki fonksiyon, olasılık fonksiyonudur.

$$P(X=0)=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

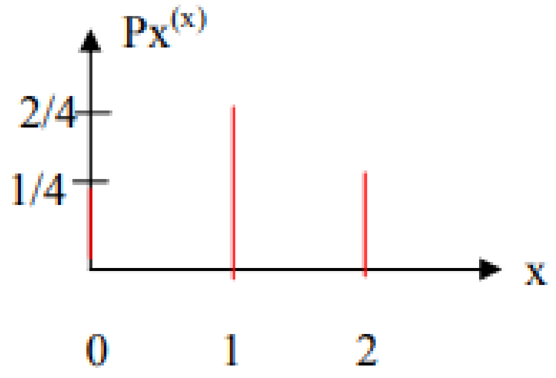
$$P(X=1)=\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{2}{4}$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$$

$$\sum_{x=0}^{2}\binom{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1\text{'dir.}$$

P(x), olasılık fonksiyonudur.

Bir paranın iki kez atılması durumundaki olasılık fonksiyonunun grafiğini çizmek istersek.



olur.

Örnek: Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

olarak verilmiş ise P(X≤1) ve P(1≤X≤3) olasılıklarını bulunuz.

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f_X(x).dx = \int_0^1 2e^{-2x}.dx = -e^{-2x}\Big|_0^1$$

$$= -e^{-2} + e^{0} = 1 - e^{-2}$$

$$P(1 \leq x \leq 3) = \int_1^3 2.e^{-2x}.dx = -e^{-2x}\Big|_1^3$$

$$= e^{-2} - e^{-6}$$

Örnek: Sürekli raslantı değişkeni X in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} cx & ; \quad 0\le x\le 3 \\ c(6-x) & ; \quad 3\le x<6 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olmarak verilmiş olsun. c'nin hangi değeri için f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur?

f(x)'in olasılık fonksiyonu olabilmesi için tanım aralığı üzerinde alınan integral

$$\int_x f(x).dx = 1$$ olmalıdır. Yani

$$\int_0^3 cx.dx + \int_3^6 c(6-x).dx = 1$$ olmalıdır.

$$c\int_0^3 xdx + 6c\int_3^6 dx - c\int_3^6 xdx = 1$$

$$c\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 6cx\Big|_3^6 - c\frac{x^2}{2}\Big|_3^6 = \frac{9c}{2} + (36c-18c) - (\frac{36c-9c}{2}) = 9c = 1$$

$c = \frac{1}{9}$ bulunur.

3.2. Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function)

X, S örneklem uzayında tanımlanmış bir raslantı değişkeni olmak üzere herhangi bir gerçek x değeri için, X raslantı değişkeninin x'e eşit ya da ondan küçük bir değer alma olasılığı birikimli dağılım fonksiyonu ya da kısaca dağılım fonksiyonu olarak tanımlanır. $F_X(x)$ da F(x) ile gösterilir.

$$F(x) = P\{s\varepsilon S | X(s) \leq x\} = P(X \leq x)$$

Biçiminde yazılır. Burada F(t), X'in olasılık dağılımının t'deki değeridir. Kesikli raslantı değişkeni için F(x) sağdan sürekli ve azalmayan bir basamak fonksiyonudur.

*X sürekli raslantı değişkeni ise dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \quad ; -\infty < x < \infty \text{ için}$$

biçiminde yazılır. Sürekli raslantı değişkeni için F(x) sürekli ve monoton azalmayan bir fonksiyondur.

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

1- Her x değeri için $0 \leq F(x) \leq 1$'dir.

2- Tanım bölgesi $-\infty < x < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ ve } \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \text{ dir.}$$

3- F(x), x in azalmayan bir fonksiyonu olup

$x_1 < x_2$ için $F(x_1) \leq F(x_2)$'dir.

4- $x_1 < x_2$ için

$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ olur.

5- Kesikli raslantı değişkenin dağılım fonksiyonu sağdan sürekli bir basamak fonksiyonudur.

Sürekli raslantı değişkenin dağılım fonksiyonu da süreklidir.

6- X raslantı değişkeni (sürekli veya kesikli) ve *F(x)* dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-F(x)$ ilişkisi geçerlidir.

Örnek: X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(x)=\begin{cases}\frac{1}{55}x & ;x=1,2,\ldots,10\ için\\ 0 & ;d.d.\end{cases}$$

biçiminde veriliyor.

a) X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonundan yararlanarak $P(x\leq 3)$, $P(x>2)$ ve $P(2\leq x\leq 4)$ olasılıklarını bulunuz.

a) $$F(x)=\sum_{t=1}^{x}p(t)=\sum_{t=1}^{x}\frac{1}{55}t=\frac{1}{55}\sum_{t=1}^{x}t=\frac{1}{55}\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x(x+1)}{110}$$ olur.

$$\text{Yani } F(x)=\begin{cases}0 & ;x<1\\ \frac{x(x+1)}{110} & ;1\leq x<10\\ 1 & ;x\geq 10\end{cases}$$

b) $P(X \le 3) = F(3) = = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$ (Dağılım fonksiyonu tanımından);

Aynı olasılık, olasılık dağılım fonksiyonundan da hesaplanabilir. Şöyle ki:

$$P(X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{3}{55} = \frac{6}{55}$$

$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{6}{110} = \frac{104}{110} = \frac{52}{55}$ olur. Aynı olasılığı, olasılık fonksiyonu kullanarak da hesaplayabiliriz:

$$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [(P(X=1) + P(X=2)] = 1 - \left(\frac{1}{55} + \frac{2}{55}\right) = \frac{52}{55}$$

$P(2 \le X \le 4) = P(1 < X \le 4) = F(4) - F(1)$

$= \frac{4(5)}{110} - \frac{1.(2)}{110} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$ olur; ya da olasılık fonksiyonundan yararlanarak,

$P(2 \le x \le 4) = \sum_{x=2}^{4} \frac{1}{55} x = \frac{2}{55} + \frac{3}{55} + \frac{4}{55} = \frac{9}{55}$ bulunur.

Örnek: X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{1}{10}(3+x)\ ;\ 1<x<3 \text{ için}$$

olmak üzere,

a) F(x)'i bulunuz.

b) P(1.3<X<2), P(X>2.5) ve P(X≤1.5) olasılıklarını hesaplayınız.

a) $F(x)=\int_1^x \frac{1}{10}(3+t)dt=\frac{3}{10}t\Big|_1^x+\frac{t^2}{20}\Big|_1^x=\frac{6}{20}(x-1)+\frac{x^2}{20}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}(x^2+6x-7)$ bulunur.

$$\text{Yani: } F(x)=\begin{cases}0 & ;x\le 1 \ \textit{için}\\ \frac{1}{20}(x^2+6x-7) & ;1<x<3 \ \textit{için}\\ 1 & ;x\ge 3 \textit{için}\end{cases}$$

b) P(1.3<X<2)=F(2)-F(1.3) (Sürekli olasılık fonksiyonu olduğu için)

$$=\frac{9}{20}-\frac{2.49}{20}=\frac{6.51}{20}=0.3255$$

{P(a ≤ X ≤b)=P(a ≤ X ≤b)=P(a < X ≤b)=P(a < X <b)=F(b)-F(a) özelliğini hatırlayınız}

Veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun aynı aralıkta integrali alınarak

P(1.3<X<2)=

$$\int_{1.3}^{2}\frac{1}{10}(3+x).dx=\frac{3}{10}x\Big|_{1.3}^{2}+\frac{1}{10}.\frac{x^2}{2}\Big|_{1.3}^{2}=\frac{3}{10}(2-1.3)+\frac{1}{20}(4-1.69)=\frac{4.2}{20}+\frac{2.31}{20}=0.3255$$

P(X > 2.5)=1- P(X ≤ 2.5)=1-F(2.5) =1-$\frac{14.25}{20}=0.2875$

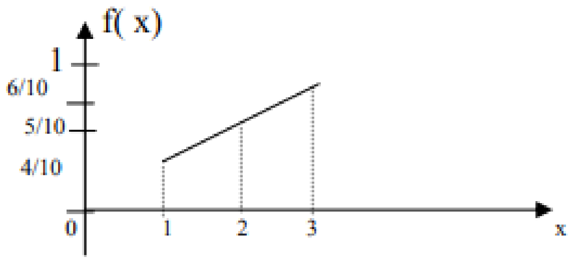
Benzeri şekilde:

$P(X \leq 1.5) = F(1.5) = \dfrac{4.25}{20} = 0.2125$, veya f(x) in integrali alınarak

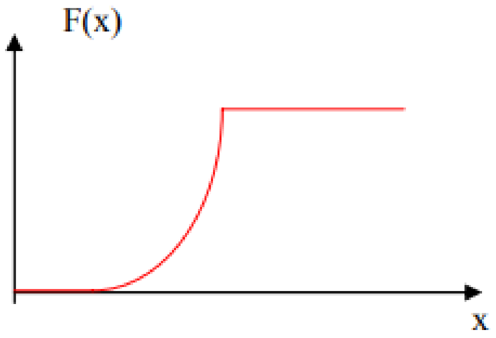
$$\int_1^{1.5} \frac{1}{10}(3+x).dx = \frac{1}{10}\left(3x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^{1.5} = \frac{1}{10}\left(4.5+\frac{2.25}{2}-3-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{10}(2.125) = 0.2125 \qquad \text{elde edilir.}$$

X'in olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği:



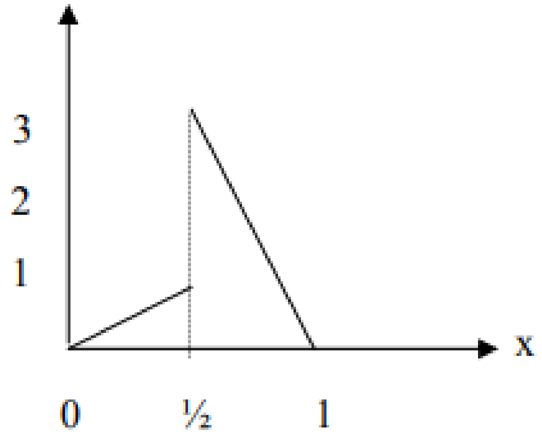
X'in Dağılım Fonksiyonunun Grafiği



Örnek: X sürekli Raslantı Değişkeninin Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x<0 \\ 2x & ; 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 6-6x & ; \frac{1}{2}<x\leq 1 \\ 0 & ; x>1 \end{cases}$$

biçiminde parçalı bir fonksiyon ise dağılım fonksiyonunu bularak grafiğini çiziniz.



x<0 için $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

$0 \le x \le \frac{1}{2}$ için $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2tdt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = x^2$

$\frac{1}{2} < x \le 1$ için

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1/2} 2tdt + \int_{1/2}^{x} (6-6t)dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} + 6t\Big|_{1/2}^{x} - 6\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1x} =$$

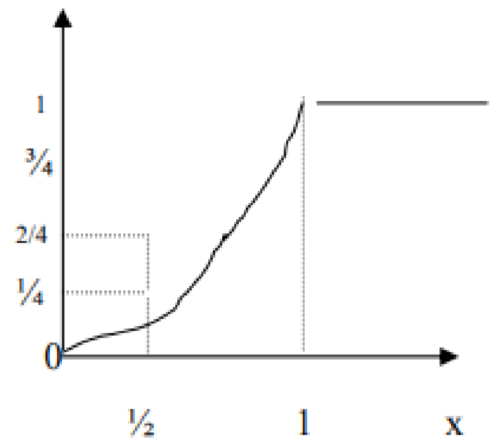
$$\frac{1}{4} + 6(x-\frac{1}{2}) - 3(x^2 - \frac{1}{4}) = -3x^2 + 6x - \frac{1}{2}$$

$x > 1$ için

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} o.dt + \int_{0}^{1/2} 2tdt + \int_{1/2}^{1} (6-6t)dt + \int_{1}^{\infty} o.dt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} + 6t\Big|_{1/2}^{1} - 6\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} =$$

$$\frac{1}{4} + 6(1-\frac{1}{2}) - 3(1-\frac{1}{2}) = \frac{13-9}{4} = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 & ; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -3x^2 + 6x - 2 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases} \longrightarrow$$



Soru 3.4.3: Y sürekli raslantı Değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y(1-y)\ ;\ 0 \le y \le 1 \\ ½ \quad ;\ 2 \le y \le 3 \\ 0 \quad ;\ \text{d.d.} \end{cases}$$

olmak üzere dağılım fonksiyonunu bulup, F(y)'nin grafiğini çiziniz.

y<0 için F(y)=0

0≤y<1 için F(y)= $\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{y} 3t(1-t)dt = 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^y - 3\frac{t^3}{3}\Big|_0^y = \frac{3}{2}y^2 - y3$

1≤y<2 için F(y)= $\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 3t(1-t)dt + \int_{1}^{y} 0dt = 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - 3\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

2≤y≤3 için

F(y)= $\int_{-\infty}^{0} odt + \int_{0}^{1} 3t(1-t)dt + \int_{1}^{2} odt + \int_{2}^{y} \frac{1}{2}dt = 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - 3\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}t\Big|_2^y = \frac{1}{2}(y-1)$

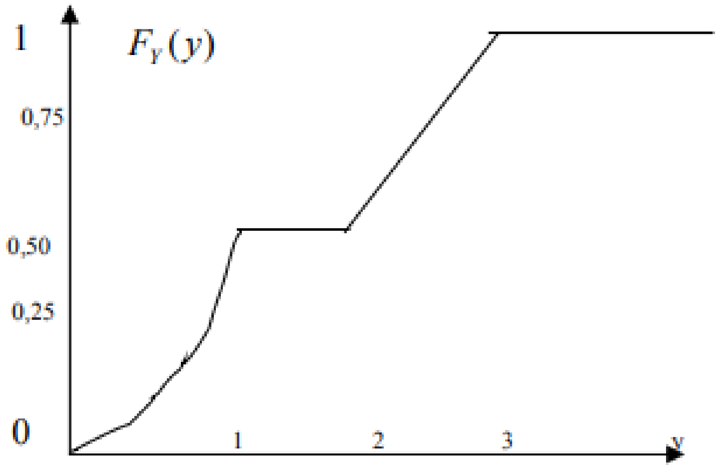
y≥3 için

F(y)= $\int_{-\infty}^{0} odt + \int_{0}^{1} 3t(1-t)dt + \int_{1}^{2} odt + \int_{2}^{3} \frac{1}{2}dt + \int_{3}^{y} odt = 3\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - t^3\Big|_0^1 + \frac{1}{2} + \Big|_2^3 =$

$= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2}(3-2) = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & ;y<0 \\ \frac{3}{2}y^2-y^3 & ;0\le y\le 1 \\ \frac{1}{2} & ;1<y\le 2 \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2} & ;2<y\le 3 \\ 1 & ;y>3 \end{cases}$$

olur.



4.1. Beklenen Değer

Beklenen değer kavramı şans oyunlarından doğmuştur. En basit biçimi ile beklenen değer, bir oyuncunun kazanabileceği miktar ile kazanma olasılığını çarpımıdır. Örneğin büyük ödülün 5000 TL olduğu bir çekilişte 10000 biletten birine ilişkin matematiksel beklentimiz $5000\left(\frac{1}{10000}\right) = 0.50\,TL$ olur. Bu tutar bir ortalama olup bilet başına ortalama ödül 0.50 TL olarak yorumlanabilir.

Bir değişkenin beklenen değeri; değişkeni kesikli ise toplam, sürekli ise integral alınarak bulunur. Değişkenlerinin gösterdikleri dağılımlar bir olasılık fonksiyonu ile temsil edildiğinden, bu fonksiyonun beklenen değeri dağılımın ortalaması olarak da ifade edilmektedir. Beklenen değer, dağılımlara ilişkin bir değişmezdir(parametredir).

X kesikli bir değişken ve P(x) de bunun olasılık fonksiyonu ise X'in beklenen değeri

$E(X) = \sum_{\forall x} x.P(x)$ biçiminde tanımlanır.

Benzer biçimde, **X** sürekli bir değişken ve f(x) de bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu ise X'in beklenen değeri,

$E(X) = \int_{R_x} x.f(x).dx$ olarak tanımlanır.

Örnek 4.1: İki sapmasız (yani iki yüzünün de üste gelme olasılıkları aynı olan) paranın birlikte atıldığı bir oyun oynanmaktadır. Oyuncu eğer her iki para da yazı gelirse 100 TL, sadece biri yazı gelirse 50 TL kazanacak, her iki para da tura gelirse 60 TL kaybedecektir. Oyuncunun beklenen kazancı nedir?

Örneklem Uzayı: $\rightarrow S = \{YY, YT, TY, TT\}$

100 TL kazanma olasılığı $\rightarrow P(100) = \dfrac{1}{4}$

50 YTL kazanma olasılığı $\rightarrow P(50) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

60 YTL kaybetme olasılığı $\rightarrow P(-60) = \dfrac{1}{4}$

$$E(X) = 100.\frac{1}{4} + 50.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-60) = 35 \text{ TL}.$$

Oyuncunun her oyundaki kazancı, ortalama olarak, 35 TL olacaktır.

Örnek 4.2: Bir torbada 1'den 4'e kadar numaralı 4 top bulunmaktadır. Bu torbadan 2 top, yerine koymama koşulu altında, çekiliyor. 'X =Toplardaki numaraların toplamı' olarak tanımlanan değişkenin olasılık dağılımını ve beklenen değerini bulunuz.

Örneklem Uzayı:

$$S=\left\{\begin{array}{l}\overset{3}{(1,2)}\overset{4}{(1,3)}\overset{3}{(2,1)}\overset{5}{(2,3)}\overset{6}{(2,4)},\overset{4}{(3,1)}\overset{5}{(3,2)}\overset{7}{(3,4)}\\ \underset{5}{(4,1)}\underset{6}{(4,2)}\underset{7}{(4,3)}\end{array}\right\}$$

X=x	3	4	5	6	7
P(x)	2/12	2/12	4/12	2/12	2/12

→ X çekilen iki topun gösterdiği sayıların toplamı

$$E(X)=\sum_{x=3}^{7}x.p(x)=\frac{1}{6}(3+4+6+7)+\frac{1}{3}(5)=\frac{20}{6}+\frac{10}{6}=\frac{30}{6}=5$$

Örnek 4.3: X değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibi olsun. E(X)' i hesaplayınız.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x; & 0\le x\le 1\\ \frac{2}{3}; & 1<x\le 2\\ 0; & d.d\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^2 x.f(x).dx=\int_0^1 x.\frac{2}{3}x.dx+\int_1^2 x.\frac{2}{3}dx$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}.\frac{11}{6}=\frac{11}{9}$$

Örnek 4.4: X değişkeninin dağılım fonksiyonu (cumulative) aşağıda verildiği gibi olsun. E(X)'i hesaplayınız.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{8}\left(x^3+3x+4\right) & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

E(X)'i bulabilmek için, önce f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur.

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}(x^3+3x+4)\right)=\frac{3}{8}(x^2+1),\quad -1\le x<1$$

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\frac{3}{8}(x^2+1)dx=\frac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$$

4.2. X Değişkeninin Bir Fonksiyonunun, Y=U(X), Beklenen Değeri

Y=U(X), X değişkeninin bir fonksiyonu olarak tanımlandığında Y'de bir değişken olup Y'nin beklenen değeri X değişkeninin kesikli ve sürekli olması durumuna göre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E(Y)=E(U(X))=\begin{cases}\sum_{x} u(x).P(x) & \text{X kesikli değişken ise}\\ \int_{R_x} u(x)f(x).dx; & \text{X sürekli değişken ise}\end{cases}$$

Örnek 4.5: X kesikli değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki tabloda verildiği gibidir.

x	-2	1	2
P(x)	5/8	1/8	2/8

$Y=X^2+4$ olarak tanımlanmış ise E(Y)=?

$Y=U(X)=X^2+4$

$$E(Y)=E(X^2+4)=\sum_{x}(x^2+4).P(x)$$

$$\left[(-2)^2+4\right]\left(\frac{5}{8}\right)+\left[1+4\right]\left(\frac{1}{8}\right)+\left[(2)^2+4\right]\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{40}{8}+\frac{5}{8}+\frac{16}{8}=\frac{61}{8}=7.625$$

Örnek 4.6: X değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}; x > 0 \\ 0; \quad d.d. \end{cases}$$

$$Y = e^{3X/4} \quad ise\, E(Y) = ?$$

$$E(Y) = E(e^{3X/4}) = \int_0^\infty e^{3x/4}.e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x/4}dx = -4e^{-x/4}\Big|_0^\infty = -4(e^{-\infty} - e^0) = 4$$

Örnek 4.7: Bir ürüne olan talep (Y) değişken olup, bu değişkene ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonunun (o.y.f) $f_Y(y) = 6e^{-6y}$, y>0 olarak verilmiştir. Talep miktarına bağlı olarak tanımlanan kar fonksiyonu da (100 000 TL olarak) $Q(Y) = 2(1 - e^{-2Y})$ olarak verilmiştir. Beklenen karı(yani, ortalama karı), E(Q), bulunuz.

$$E(Q) = \int_0^\infty Q(y).f_Y(y).dy = \int_0^\infty 2(1 - e^{-2y})6.e^{-6y}dy$$

$$= 12\int_0^\infty (e^{-6y} - e^{-8y})dy = 12\left\{ -\frac{1}{6}e^{-6y}\Big|_0^\infty - \left(-\frac{1}{8}e^{-8y}\right)\Big|_0^\infty \right\}$$

$$= 12\left\{ -\frac{1}{6}(e^{-\infty} - e^0) + \frac{1}{8}(e^{-\infty} - e^0) \right\} = 12\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{2}{48}\right) = \frac{1}{2}$$

Yani, Ortalama kar 50 000 TL 'dir.

Örnek 4.8: Ekonomi dersinin sınav notlarının, Y, olasılık yoğunluk fonksiyon aşağıda verildiği gibidir.

$$f_Y(y)=\frac{1}{5000}(100-y);\ \ 0\le y\le 100$$

Bu dağılımın ortalaması hesaplandığında:

$$E(Y)=\frac{1}{5000}\int_0^{100} y(100-y)dy=\frac{1}{5000}\left(50y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{100}$$

$$=\frac{1}{5000}\left(50(100)^2-\frac{100^3}{3}\right)=\frac{1}{5000}\left(\frac{1500000-1000000}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{5000}\left(\frac{500000}{3}\right)=\frac{100}{3}\cong 33.333$$

olduğu görülmektedir. Bu ortalama çok tatmin edici bir ortalama değildir.

Notların bu hali ile değerlendirmeye alınması yerine, mevcut notların g(Y)=10 $\sqrt{Y}$ dönüşümü ile yeniden hesaplanması önerilmiş olsun. Bu dönüşüm Ekonomi dersinin sınav ortalamasını 60'tan büyük yapar mı?

$$E(g(Y))=E\left(10\sqrt{Y}\right)=\int_0^{100}10\sqrt{y}\left(\frac{1}{5000}\right)(100-y).dy$$

$$=\frac{1}{500}\int_0^{100}(100y^{1/2}-y^{3/2})dy=\frac{1}{500}\left[100.\left(\frac{2}{3}\right).y^{3/2}\Big|_0^{100}-\frac{2}{5}y^{5/2}\Big|_0^{100}\right]$$

$$=\frac{1}{500}\left[\frac{200}{3}\left(100^{3/2}\right)-\frac{2}{5}\left(100^{5/2}\right)\right]=\frac{1}{500}\left[\frac{200}{3}(1000)-\frac{2}{5}(100000)\right]$$

$$=\frac{200000}{500}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=400\left(\frac{2}{15}\right)\cong 53.3<60$$

Cevap: Önerilen dönüşümle ortalama 60 tan büyük olmamaktadır.

4.3. Beklenen Değerin Özellikleri

Teorem 4.1: Sabit sayıların beklenen değeri kendisine eşittir, yani a bir sabit ise $E(a) = a$'dır.

Teorem 4.2: a ve b sabit sayılar ve X bir değişken olmak üzere $E(aX) = aE(X)$ ve $E(aX+b) = aE(X)+b$ olur.

Teorem 4.3: a sabit bir sayı, X bir değişken ve Y=U(X) olarak tanımlanmış bir başka değişken (X değişkeninin bir fonksiyonu) ise

$$E(aY) = E(aU(X)) = aE(U(X)) \text{ dir.}$$

Örnek 4.9: X değişkeninin beklenen değeri 3 olmak üzere E(5X+2)'yi bulunuz.

$$E(X) = 3 \Rightarrow E(5X+2) = 5E(X)+2 = 5(3)+2 = 17 \text{ olur.}$$

4.5. İki Değişkenin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri

Teorem 4. 3: X ve Y iki değişken olmak üzere Z=X+Y'nin beklenen değeri, $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)' \, dir$.

Teorem 4. 4: a ve b sabit sayılar, X ve Y herhangi iki değişken olmak üzere Z=aX+bY olarak tanımlanan Z 'nin beklenen değeri,

$$E(Z) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)' \, dir.$$

Teorem 4. 5: X ve Y ***bağımsız iki değişken*** ise Z=X.Y'nin beklene değeri,

$$E(Z) = E(X.Y) = E(X).E(Y)' \, dir$$

Teorem 4. 6 : X bir değişken, ve bu değişkene bağlı iki fonksiyon da U(X) ve W(X) olsun.

$$E[U(X) + W(X)] = E[U(X)] + E[W(X)] \quad dir.$$

Örnek 4.10: İki hilesiz zar atılıyor. X değişkeni birinci zarda üste gelen sayının iki katı ve Y değişkeni de ikinci zarda üste gelen sayı tek sayı ise 1, çift sayı ise 3 değerini alıyor. Bu bilgilerden yararlanarak E(X), E(Y), E(X+Y) ve E(XY)'yi bulunuz.

$X = x$	2	4	6	8	10	12
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$Y = y$	1	3
$P(Y = y)$	1/2	1/2

Bu iki değişkenin bileşik olasılık fonksiyonun tablolaştırılmış hali: aşağıda verilmiştir. (X ve Y değişkenleri bağımsızdır, çünkü iki zarın üste gelen yüzündeki noktaların kaç tane olacağı birbirinden bağımsız oluşur ve bu nedenle de $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$ olur.

$P_{X,Y}(x,y)$

	X=x						
Y=y	2	4	6	8	10	12	P(Y=y)
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
3	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

$$E(X)=\sum_{\substack{x=2k,\\ k=1,2,\dots,6}}^{6} xP(x)=\frac{1}{6}(2+4+6+8+10+12)=\frac{42}{6}=7$$

$$E(Y)=1.P(Y=1)+3P(Y=3)=\frac{1}{2}(1+3)=\frac{4}{2}=2$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=7+2=9$$

Ya da: Z=X+Y dersek

$Z=z$	3	5	7	9	11	13	15
$P(Z=z)$	1/12	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	1/12

$$E(X+Y)=E(Z)=(3+15).\left(\frac{1}{12}\right)+(5+7+9+11+13)\left(\frac{2}{12}\right)=\frac{18}{12}+\frac{90}{12}=\frac{108}{12}=9$$

Bileşik olasılık tablosundan yararlanarak W=XY için aşağıdaki olasılık tablosu elde edilir.

$W=w$	2	4	6	8	10	12	18	24	30	36
$P(W=w)$	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12

$$E(XY)=E(W)=\left(\frac{1}{12}\right)(2+4+8+10+18+24+30+36)+\left(\frac{2}{12}\right)(6+12)$$

$$=\frac{168}{12}=14$$

$E(XY)=E(W)=E(X)E(Y)$ olduğu görüldü. Gerçekte X ve Y değişkenlerinin bağımsız oldukları bu beklenen bir sonuçtu.

4.7. Varyans

Bir değişkenin beklenen değeri onun bir ortalama değeri olup merkezi eğilim ölçüsüdür. Ortalamadan sapan değerleri ortaya koyan ölçü ise varyanstır. Varyans değişim ya da yayılım ölçüsüdür. **X** değişkeninin varyansı Var(X) yada σ^2 ile gösterilir.

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[(X-E(X))^2\right] = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2$$

biçiminde hesaplanır. Varyansın kareköküne de **X** değişkeninin standart sapması (standart deviation) denir ve σ ile gösterilir.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

X kesikli değişken ve $P_X(x)$ olasılık fonksiyonu olmak üzere X'in varyansı ve standart sapması,

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 P_X(x) = \left[\sum_x x^2 P_X(x)\right] - \mu^2, \; E(X) = \mu \text{ 'dür.}$$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ formülleri yardımı ile bulunur.

X sürekli değişken ve $f_X(x)$ de **X** 'in o.y.f.nu olmak üzere X'in varyansı ve standart sapması,

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx\right] - \mu^2 \text{ Ve } \sigma = \sqrt{Var(X)}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.18: X kesikli değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P_X(x) = \frac{1}{55}x, \quad x = 1,2,3,...,10$$ olmak üzere **X** 'in varyansını bulalım.

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{10} x.P(x) = \sum_{x=1}^{10} x.\frac{1}{55}x = \frac{1}{55}\sum_{x=1}^{10} x^2 = \frac{1}{55}(385) = 7$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{10} x^2 P(x) = \frac{1}{55}\sum_{x=1}^{10} x^3 = \frac{3025}{55} = 55$$

$$\sigma^2 = Var(X) = 55 - (7)^2 = 55 - 49 = 6 \ \ bulunur.$$

Örnek 4.19: X sürekli değişkeninin o. y.f. nu

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & 0\le x\le 1\\ \frac{2}{3} & ,1<x\le 2\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

olmak üzere Var(X)=?

$\mu=E(X)=\frac{11}{9}$ olarak beklenen değer konusu içinde verilen ***Örnek 4.3.*** 'te hesaplanmıştı.

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2 f(x).dx=\int_0^1 x^2\frac{2}{3}xdx+\int_1^2 x^2\frac{2}{3}dx$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}.\frac{31}{12}=\frac{31}{18}$$

$$Var(X)=E(X^2)-\mu^2=\frac{31}{18}-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{37}{162}$$

Örnek 4.20: Varyansı 2 olan bir Y değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun

$f(y)=\frac{2y}{k^2}$; $0\le y\le k$ olması için k'nın değeri ne olmalıdır?

$$Var(Y)=2=E(Y^2)-[E(Y)]^2.$$

$$E(Y)=\mu=\int_0^k y.\frac{2y}{k^2}dy=\frac{2}{k^2}\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^k\right)=\frac{2}{k^2}.\frac{k^3}{3}=\frac{2k}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_0^k y^2\frac{2y}{k^2}dy=\frac{2}{k^2}\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^k\right)=\frac{2}{k^2}.\frac{k^4}{4}=\frac{k^2}{2}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

$$2=\frac{k^2}{2}-\frac{4k^2}{9}\Rightarrow 2=\frac{9k^2-8k^2}{18}\Rightarrow 2=\frac{1}{18}k^2\Rightarrow k^2=36\,ve\,k=6$$

Örnek 4.20: Varyansı 2 olan bir Y değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun

$f(y) = \frac{2y}{k^2};\ \ 0 \le y \le k$ olması için k'nın değeri ne olmalıdır?

$$Var(Y) = 2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2.$$

$$E(Y) = \mu = \int_0^k y.\frac{2y}{k^2}dy = \frac{2}{k^2}\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^k\right) = \frac{2}{k^2}.\frac{k^3}{3} = \frac{2k}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^k y^2\frac{2y}{k^2}dy = \frac{2}{k^2}\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^k\right) = \frac{2}{k^2}.\frac{k^4}{4} = \frac{k^2}{2}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$2 = \frac{k^2}{2} - \frac{4k^2}{9} \Rightarrow 2 = \frac{9k^2 - 8k^2}{18} \Rightarrow 2 = \frac{1}{18}k^2 \Rightarrow k^2 = 36\, ve\, k = 6$$

4.8. Varyansın Özellikleri

Teorem 4.7: Sabit bir a sayısının varyansı sıfırdır. Yani, Var (a)=0

Teorem 4.8: a ve be herhangi iki sabit ve X kesikli ya da sürekli bir değişken olmak üzere

$Var(aX+b)=a^2Var(X)$'dir.

Teorem 4.9 : X ve Y değişkenlerine ilişkin toplamlarının ve farklarının varyansı şöyle ifade edilir

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,.Y)$$
$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,.Y)$$