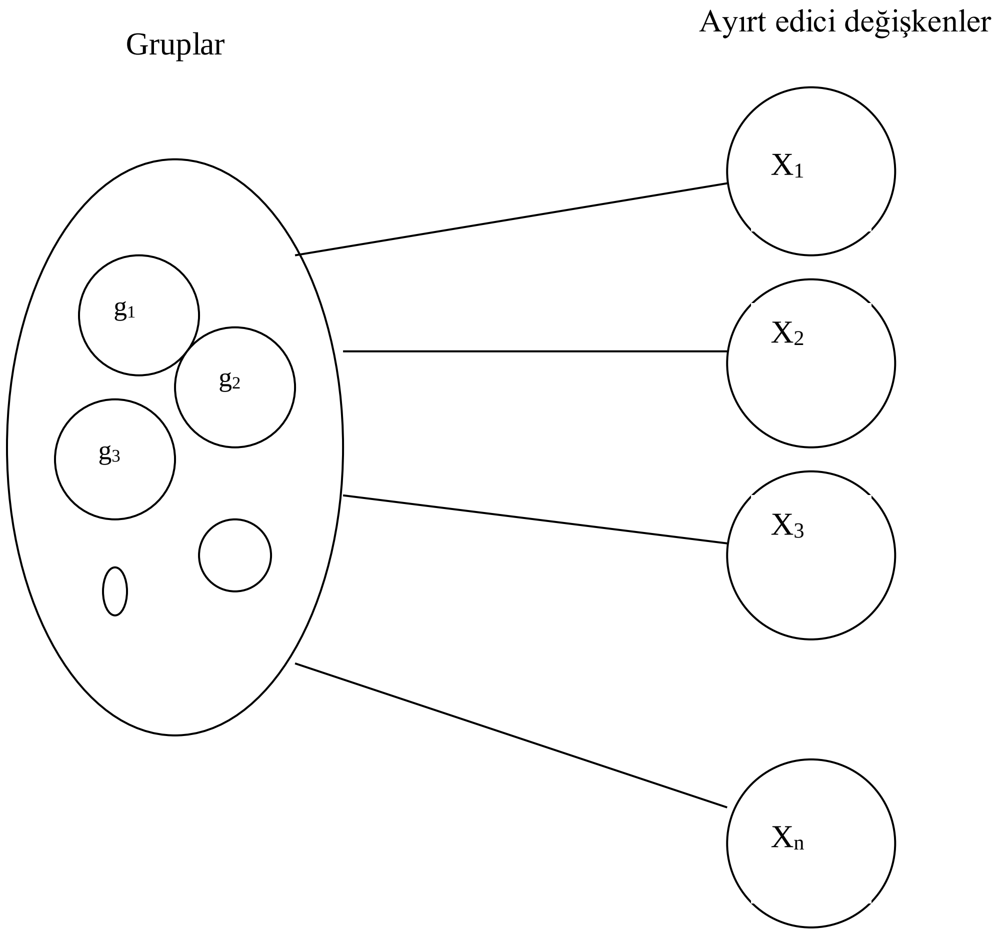
1. Diskriminant (Ayırma) Analizi (DA)

Kalitatif stratejik değişkenler ile kantitatif açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlamada kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemi için aynı zamanda amaç grupları arasındaki sınırlar ile amaçları ilişkili gruplara sınıflandırmada kullanılacak değişkenlerin karakteristiklerine bağlı olarak belirlenen sınırların tanımlanmasında kullanılan bir yöntemdir.

DA iki veya daha fazala amaç grupları arasındaki farklılıkların (örneğin coğrafik bölgeler arası ekonomik farklılıklar; oy tercihlerinin tahmini) bir çok değişkenle ilişkili olarak eş zamanlı olarak araştırılmasını sağlamaktadır. Bu analizin uygulanması için (i) farklı değişkenler açısından uyuşmazlığın ortaya çıkardığı iki veya daha fazla grup olması ve (ii) söz konusu değişkenlerin ölçüm düzeyinin “aralık” veya “oran” olması şeklinde iki temel ön koşul bulunmaktadır.

1.1. DA’nın genel çerçevesi ve notasyon

DA’da iki önemli unsurlar grup, gözlem ve ayırt edici değişkenlerdir. DA’nın genel çerçevesini aşağıdaki şekil yardımıyla açıklayabiliriz.



Şekilde ve bundan sonraki anlatımlarda g, grup sayısını; p, ayırt edici değişken sayısını; n_i i. Gruptaki gözlem sayısını ve $n_.$ Bütün gruplardaki gözlem sayısını ifade etmektedir.

1.2. DA'da temel kavramlar

Ayırt edici değişken diskriminant analizinin temel kavramlarından birincisidir. Gruplar arasında farklılığa yol açan karakteristiğe "ayırt edici değişken" adı verilmektedir. Bu analizde ortalama ve varyans hesaplanıp eşitliğe dahil edileceğinden bu değişken "aralık" veya "oran" düzeyinde ölçülmelidir.
Kanonik diskriminant fonksiyonu ikinci önemli kavramdır. Gözlemlerin ait olduğu grupların tahmin edilmesinde kullanılan doğrusal eşitliğe "kanonik diskriminant fonksiyonu" adı verilmektedir. Bu fonksiyon birbirlerine çok benzeyen gözlemleri içeren grupları tanımlamayı sağlayan grup özelliklerini bir araya getirmektedir.

DA'nın üçüncü temel kavramı diskriminant skorudur. Bu skor ele alınan ayırt edici değişkenlerin ağırlıklı doğrusal bir birleşimidir. Diskriminant skoru ele alınan değişkenlerin ağırlıklarını tek bir değişken olarak ifade eden birleştirilmiş bir değişkendir.

Standartlaştırma, farklı birimlerle ifade edilen ayırt edici değişkenlerin birim farklılıklarını gidermek için yapılan işlemdir. Değişkenler standartlaştırıldığında ayırt edici değişkenlerin ayrıt etme gücünü ortaya koymak ve bu güçlerine göre sıralamak mümkün olabilmektedir.

1.3. DA'nın amaçları

DA'nın aşağıda belirtilen iki temel kullanım amacı bulunmaktadır.

1. Gruplar arası farklılıkları analiz etmek.
2. Birbirine çok benzeyen gözlemleri (bireyleri) gruplara atamak (ayırmak).
3. Gözlemlerin gruplara doğru bir şekilde ayrılıp ayrılmadığını test etmek.

DA analizi bağımlı değişkenin kategorik, bağımsız değişkenlerin ise aralık veya oran düzeyinde olduğu ve grup sayısının 2 ve ikiden fazla olduğu durumlarda kullanılabilmektedir.

1.4. DA'nın varsayımları

DA'nın dokuz adet var sayımı bulunmakatdır. Bunlar;

a) İki veya daha fazla grup söz konusu olmalıdır ($g \geq 2$).
b) Her grupta en az iki gözlem olmalıdır ($n_i \geq 2$).
c) Ayırt edici değişken sayısı, toplam gözlem sayısından 2 az olmalıdır [$0 < p < (n_i - 2)$].
d) Ayrıt edici değişken "aralık" veya "oran" düzeyinde ölçülmelidir.
e) Ayırt edici değişkenler arasında doğrusal bağlantı olmamalıdır.
f) Her bir grubun kovaryans matrisi eşit veya çok yakın olmalıdır (özel formül kullanılmadıkça).
g) Her bir grup normal dağılım gösteren değişkenler populasyonundan oluşturulmalıdır.
h) Gruplar veriler toplanmadan önce belirlenmelidir.
i) Grup büyüklüğü bağımsız değişken sayısının en az 5 katı olmalıdır.

1.5. DA'nın girdi matrisi

DA analizinde girdi matrisinin "gruplar", birey veya nesneler" ve "ayırt edici özellikler (değişkenler)" olmak üzere 3 temel unsuru bulunmaktadır. DA girdi matrisi Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. DA Girdi Matrisi

Gruplar	Birey veya nesne	Ayrıt edici özellikler (değişkenler)				
		X_i	X_j	X_k	………..	$X_{...}$
Grup A	A_1	…	…	…		…
	A_2	…	…	…		…
	A_3	…	…	…		…
	.					
	.					
	.					
	A_m	…	…	…		…
Grup B	B_1	…	…	…		…
	B_2	…	…	…		…
	B_3	…	…	…		…
	.					
	.					
	.					
	B_n	…	…	…		…
Grup C	C_1	…	…	…		…
	C_2	…	…	…		…
	C_3	…	…	…		…
	.					
	.					
	.					
	C_l	…	…	…		…
.	.					
	.					
	.					
	.					

1.6. Kanonik diskriminant fonksiyonunun elde edilmesi

Kanonik diskriminat fonksiyonu ayırt edici değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonudur ve cebirsel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f_{km} = u_0 + u_1 X_{1km} + u_2 X_{2km} + ... + u_p X_{pkm}$$

Eşitlikte f_{km} k grubunun m gözlemi için kanonik ayrım (diskriminant) fonksiyonu değerini, u_i değişkenin ağırlığını yansıtan ayrım (diskriminant) katsayısını, X_{ikm} k grubunun m gözlemi için X_i ayırt edici değişkenin değerini ve i ayırt edici değişken sayısını ifade etmektedir.

Bu analizde diskriminant fonksiyonunu tahmin etmek için birbirine bağlı 4 farklı işlem yapılması gerekmektedir.

1. adım: Toplam Kareler ve Çarpımlar Matrisinin elde edilmesi

Gözlemler arası farklılığın ölçülmesi için grup ortalamaları ve standart sapma yetersiz kalmaktadır. Zira bu iki ölçü değişkenler arası ilişkileri göstermemektedir. Bu amaçla

“Toplam Kareler ve Çarpımlar Matrisi (T)” elde edilmektedir. T matrisi simetrik bir matristir ve aşağıdaki şekilde oluşturulmaktadır.

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{g} \sum_{m=1}^{nk} (X_{ikm} - X_{i..})(X_{jkm} - X_{j..})...$$

Eşitlikte $n.$ bütün gruplardaki gözlem sayısını, $X_{ik.}$ k grubundaki birey veya nesneler için i değişkeninin ortalama değerini, g grup sayısını, n_k k grubundaki gözlem sayısını, X_{ikm} k grubundaki m birey veya nesnesi için i değişkeninin değerini ve $X_{i..}$ bütün gözlemler için i değişkeninin ortalama değerini ifade etmektedir.

2. adım: Toplam kovaryans matrisinin elde edilmesi

Bu matris T’nin her bir gözleminin $(n_. - 1)$’e bölünmesi ile oluşturulmaktadır. Ancak analizde bu yapılmadan T matrisinin doğrudan kullanılması tercih edilmektedir. T matrisinin her bir gözlemi, ilgili köşegende yer alan değerin kareköküne bölünmesiyle “Toplam Korelasyon” matrisine dönüştürülebilmektedir.

3. adım: Grup İçi Kareler ve Çarpımlar Matrisinin (w) elde edilmesi

Bu matrisin elde edilmesinde aşağıdaki eşitlik kullanılmaktadır:

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{g} \sum_{m=1}^{nk} (X_{ikm} - X_{ik.})(X_{jkm} - X_{jk.})...$$

Bu matris yardımıyla grup içi kovaryans matrisini elde etmek için her bir w gözlemi $(n_. - g)$ ifadesine bölünmektedir. Grup içi değişkenler arasındaki ilişkinin kabaca ölçüsü olan grup içi korelasyon matrisi, w matrisindeki her bir gözlemin köşegende yer alan değerin kareköküne bölünmesiyle bulunmaktadır.

4. adım: Grupların birbirilerine olan uzaklığının belirlenmesi

Ortalama ayırma değerleri fonksiyonu (centroids) arasında fark yoksa $w = T$ ’dir. Eğer farklılık varsa fark matrisi yani gruplar arası kareler ve çarpımlar matrisi [(B)=$T - w$] oluşturulmaktadır.

5. adım: Ham katsayıların ve özdeğerlerin (eigenvalue) bulunması

Her bir fonksiyon için ham katsayılar (u_i) aşağıdaki eşitliğin çözümü ile tahminlenmektedir. Bu katsayılar doğrudan yorumlanabilir değildirler ve sadece sınıflama yapmak amacıyla kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} \sum b_{1i} v_i &= \lambda \sum w_{1i} v_i \\ \sum b_{2i} v_i &= \lambda \sum w_{2i} v_i \\ &. \\ &. \\ \sum b_{pi} v_i &= \lambda \sum w_{pi} v_i \end{aligned}$$

Ham katsayılar (u_i) yukarıdaki eşitliklerden elde edilen v_i ler yardımıyla aşağıdaki eşitliklerle tahmin edilmektedir.

$$u_i = v_i \sqrt{n_. - g} \qquad\qquad u_0 = -\sum_{i=1}^{p} u_i X_{i..}$$

Ayırma fonksiyonunun önemli olup olmadığının değerlendirilmesinde kullanılan özdeğerler (λ) daha önceki aşamalarda elde edilen matrislerin yardımıyla aşağıdaki eşitlikle de bulunabilmektedir.

$$\lambda = \frac{|w|}{|B + w|}$$

6. adım: Standartlaştırılmış katsayıların bulunması

Değişkenlerin nispi önemini ortaya koymak için ham katsayıların standartlaştırılması gerekmektedir. Bu katsayı sayesinde hangi değişkenin daha ayırt edici olduğu tespit edilebilmektedir.Standart katsayıların elde edildiği orijinal verilerin standart sapması 1'e eşittir. Dolayısıyla ham katsayı, standartlaştırılmış katsayıya dönüştürmek için aşağıdaki formül ile dönüşüm yapılmaktadır.

$$c_i = u_i \sqrt{\frac{w_{ii}}{n_. - g}}$$

Eşitlikte $n_.$ toplam gözlem sayısını, w_{ii} i. Değişkenin kareler toplamını ve g grup sayısını ifade etmektedir.

7. adım: Yapısal katsayıların bulunması

İki değişken arasındaki benzerliği belirlemek için, iki değişken arasında "ürün moment korelasyonuna" bakmak gerekmektedir. Bu korelasyona "toplam yapısal katsayılar" adı verilmektedir. Bu katsayılar 0 ile +1 veya -1 arasında değişmektedir. Bu katsayının 1'e yaklaşması değişken ile fonksiyonun birbirine çok yakın olduğu anlamına gelmektedir. Bu katsayının 0'a yaklaşması değişken ile fonksiyonun birbirine çok yakın olmadığı anlamına gelmektedir.

Birleştirilmiş grup içi korelasyon yani grup içi yapısal katsayılar aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilmektedir.

$$s'_{ij} = \sum_{k=1}^{p} r'_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \frac{w_{ik} c_{kj}}{\sqrt{w_{ii} w_{kk}}}$$

Eşitlikte s'_{ij} j fonksiyonunda i değişkeni için grup içi yapısal katsayı, r'_{ik} i ve k değişkenleri arasında birleştirilmiş grup içi korelasyon katsayısı ve c_{kj} standardize edilmiş kanonik diskriminant fonksiyonu katsayısını ifade etmektedir.

8. adım: Kanonik Korelasyon katsayısının bulunması

Kanonik korelasyon gruplar ile dsikriminant fonksiyonu arasındaki ilişkilerini özetleyen bir katsayıdır. Bu katsayı ayırma skorları ile gruplar arası ilişkiyi ölçer ve açıklanan toplam varyansı göstermektedir. Kanonik korelasyon katsayısının karesi alınarak yorumlanmaktadır. Bağımlı değişkendeki varyansın yüzde kaçının açıklandığını göstermektedir.

$$r^* = \sqrt{\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}}$$

Eşitlikte i ilişkili diskriminant fonksiyonunu göstermektedir.

1.7. DA sonuçlarının değerlendirilmesi ve yorumlanması

DA'nın sonuçları elde edildikten sonra yapılacak öncelikli işlem eşit kovaryans, çoklu bağlantı ve normal dağılım varsayımlarının ihlal edilip edilmediğinin test edilmesidir. Eşit kovaryans varsayımını test etmek için "Box M" testi kullanılmaktadır. Çoklu bağlantı varsayımı ise korelasyon katsayıları yardımıyla yapılmaktadır. Daha sonra ayırma (diskriminant) fonksiyonunun önemli olup olmadığı test edilmektedir. Bu testte kanonik korelasyon katsayısı, öz değerler ve Wilks Lambdası kullanılmaktadır.

1. Box M testi

Eşit kovaryans varsayımını test etmek için kullanılan bu testte F- dağılımı kullanılmaktadır. Bu testin başlangıç ve alternatif hipotezleri aşağıdaki gibidir:

H_0: Grupların kovaryans matrisleri eşittir.
H_1: Grupların kovaryans matrisleri eşit değildir.

Eğer hesaplanan Box M değeri, F değerinden büyükse ($M>F_{tablo}$) H_0 hipotezi reddedilip, H_1 hipotezi kabul edilmektedir. Yani bu durumda kovaryansın eşit olmadığı kararına varılmaktadır. Tersi durumda ($M<F_{tablo}$), kovaryansın eşit olduğu hükmüne varılmaktadır.

2. Korelasyon katsayılarının incelenmesi

Çoklu bağlantı varsayımının ihlal edilip edilmediğinin değerlendirilmesinde korelasyon katsayılarına bakılmaktadır. Korelasyon katsayısı 0.70'i aşıyorsa ($r>0.70$), çoklu bağlantı probleminin olduğu kanaatine varılmaktadır. Bu durumda değişken birleştirme veya değişkenlerin uzaklaştırılması önerilmektedir.

3. Ayırma fonksiyonunun önemlilik testi

Ayırma fonksiyonunun önemli olup olmadığının belirlenmesinde kanonik korelasyon, özdeğerler ve Wilks Lambdası kullanılmaktadır.

Kanonik korelasyon: Ayırma skorları ve gruplar arasındaki ilişkiyi ölçer ve açıklanan toplam varyansı göstermektedir. Bu katsayının karesi alınarak yorum yapılmaktadır. Bu katsayı bağımlı değişkende meydana gelen toplan varyansın ne kadarının açıklandığını yüzde olarak gösterir.

<u>Özdeğerler (eigenvalue):</u> Bağımlı değişkende meydana gelen varyansın ne kadarının açıkalndığını gösteren bir değerdir. Özdeğer ne kadar büyükse bağımlı değişkendeki varyansın daha büyük bir kısmı fonksiyon tarafından açıklanıyor demektir. Genel olarak özdeğerin 0.40'dan büyük olması iyi olarak kabul edilmektedir.

<u>Wilks Lambda:</u> Ayırma skorlarındaki toplam varyansın gruplar arası farklar tarafından açıklanmayan kısmını göstermektedir. Wilks Lambdası her bir ayrım fonksiyonu için özdeğer istatisitğinin anlamlılığını test etmektedir.

4. DA'nın analizinin başarısının değerlendirilmesi

Nispi şans kriteri ile maksimum şans kriteri

1.8. DA uygulaması

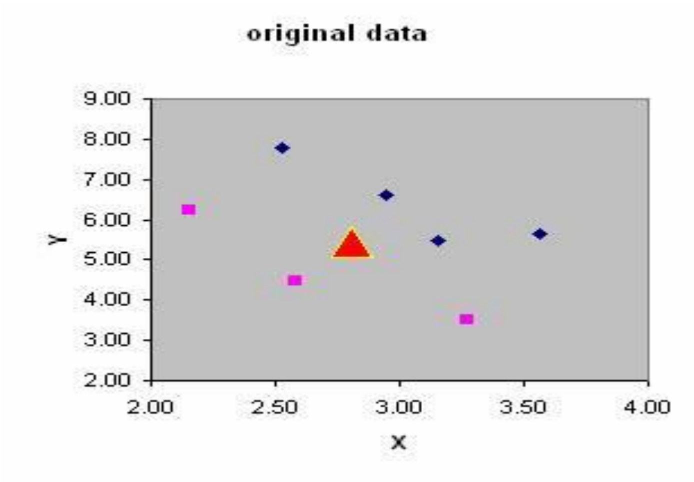
A firması kalitesi kıvrım sayısı ve çapı ile ölçülen çok pahalı halka bir çip üretmektedir. Uzmanların yaptıkları kalite kontrolleri sonucundaki görüşleri aşağıda verilmiştir.

Kıvrım	**Çap**	**Kontrol sonucu**
2.95	6.63	Kaliteli
2.53	7.79	Kaliteli
3.57	5.65	Kaliteli
3.16	5.47	Kaliteli
2.58	4.46	Kalitesiz
2.16	6.22	Kalitesiz
3.27	3.52	Kalitesiz

Otomatik kalite kontrolünde kullanılacak bir kriter geliştirmek üzere size danışıldığını varsayalım. Fabrika sahibi 2.81 kıvrım sayısına sahip ve çapı 5.46 olan yeni tip bir halka çipin kalite testini geçip geçemeyeceğini merak etmektedir. Bu problemi DA'yı kullanarak çözelim.

Çözüm:

Bu soru ancak gruplar arası farkı artıracak, grup içi farkı ise azaltacak bir çizgi yardımıyla çözülebilir. Verilere ait grafik çap dikey eksende, kıvrım sayısı da yatay eksende olacak şekilde çizilip aşağıda verilmiştir.



x ayırt edici (bağımsız) değişkenleri ifade etmektedir. Burada her bir satır birey veya nesneyi (k), her bir sütun ise ayırt edici özelliği göstermektedir. y ise grupları yani bağımlı değişkeni ifade etmektedir. Tek sütundan oluşan bu matriste her bir satır bir grubu göstermektedir.

Örneğimizde, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.95 & 6.63 \\ 2.53 & 7.79 \\ 3.57 & 5.65 \\ 3.16 & 5.47 \\ 2.58 & 4.46 \\ 2.16 & 6.22 \\ 3.27 & 3.52 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_k$ = k. Satırdaki veriyi ifade etmektedir. Örneğin $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3.57 & 5.65 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 3.27 & 3.52 \end{bmatrix}$

g = y matrisindeki grup sayısını ifade etmektedir. Örneğimizde grup sayısı 2'dir, g = 2.

$\mathbf{x}_i$ = i. Grup için ayırt edici veriyi gösterir. Her bir satır bir birey veya nesneyi, her bir sütun ise ayırt edici özelliği yansıtmaktadır. Biz $\mathbf{x}$ matrisini amacımız doğrultusunda farklı gruplara ayırabiliriz. Örneğimizde başarılı ve başarısız olmak üzere iki grup olduğundan x matrisi iki gruba ayrılmıştır.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2.95 & 6.63 \\ 2.53 & 7.79 \\ 3.57 & 5.65 \\ 3.16 & 5.47 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.58 & 4.46 \\ 2.16 & 6.22 \\ 3.27 & 3.52 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mu}_i$ = i grubundaki özelliklerin ortalamasını yani $\mathbf{x}_i$ lerin ortalama değerini ifade eder.

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 3.05 & 6.38 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 2.67 & 4.73 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\mu}$ = Veri setinin tamamındaki genel ortalamayı göstermektedir.

Örneğimizde, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2.88 & 5.676 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_i^o$ = i grubunda ortalama ile düzeltilmiş verileri ifade etmektedir. $x_i^0 = x_i - \mu$ formülü ile bulunmaktadır.

$$\mathbf{x}_1^o = \begin{bmatrix} 0.060 & 0.951 \\ -0.357 & 2.109 \\ 0.679 & -0.025 \\ 0.269 & -0.209 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2^o = \begin{bmatrix} -0.305 & -1.218 \\ -0.732 & 0.547 \\ 0.386 & -2.155 \end{bmatrix}$$

Her bir grup için kovaryans matrisi aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilir.

$$\mathbf{c}_i = \frac{\left(\mathbf{x}_i^o\right)^T \mathbf{x}_i^o}{n_i}$$

Eşitlikte T ilgili matrisin devriğini ifade etmektedir. Buna göre her grup için kovaryans matrisi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0.060 - 0.357 0.679 0.269 \\ 0.951 2.109 - 0.025 - 0.209 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.060 0.951 \\ -0.357 2.109 \\ 0.679 - 0.025 \\ 0.269 - 0.209 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} -0.305 - 0.732 0.386 \\ -1.218 0.547 - 2.155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.305 - 1.218 \\ -0.732 0.542 \\ 0.386 - 2.155 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 0.166 & -0.192 \\ -0.192 & 1.349 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.259 & -0.286 \\ -0.286 & 2.142 \end{bmatrix}$$

Birleştirilmiş grup için kovaryans matrisi elde edilirken aşağıdaki eşitlik kullanılmaktadır. c_1 ve c_2 nin her bir elemanı için ayrı ayrı hesaplanmaktadır

$$C(r,s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{g} n_i \cdot c_i(r,s)$$

$$\tfrac{4}{7} \cdot 0.166 + \tfrac{3}{7} \cdot 0.259 = 0.206$$
$$\tfrac{4}{7}(-0.192) + \tfrac{3}{7}(-0.286) = -0.233$$
$$\tfrac{4}{7} \cdot 1.349 + \tfrac{3}{7} \cdot 2.142 = 1.689$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.206 & -0.233 \\ -0.233 & 1.689 \end{bmatrix}$$

Daha sonra ayrım fonksiyonunda kullanmak üzere birleştirilmiş kovaryans matrisinin tersi alınır.

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 5.745 & 0.791 \\ 0.791 & 0.701 \end{bmatrix}$$

Öncelik olasılık vektörünün (p) her bir satırı i. grup için önceliği gösteren olasılıkları yansıtır. Eğer öncelik olasılığı hakkında ön bilgimiz yoksa gruptaki gözlem sayısı, toplam gözlem sayısına bölünerek bulunmaktadır ($p_i = \frac{n_i}{N}$). Örneğimiz için aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.429 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

Ayrım (Diskriminant) fonksiyonu aşağıdaki eşitlik yardımıyla tahminlenmektedir.

$$f_i = \boldsymbol{\mu}_i \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}_k^T - \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\mu}_i^T + \ln(p_i)$$

Örneğin f_1 için fonksiyon değerini tahmin edelim:

$$f_1 = [3.05 \; 6.38] \begin{bmatrix} 5.745 & 0.791 \\ 0.791 & 0.701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.95 \\ 6.63 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [3.05 \; 6.38] \begin{bmatrix} 5.745 & 0.791 \\ 0.791 & 0.701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.05 \\ 6.38 \end{bmatrix} + \ln(0.571)$$

$$f_1 = 112.21 - 56.43 - 0.56 = 55.22$$

$$f_2 = [2.67 \; 4.73] \begin{bmatrix} 5.745 & 0.791 \\ 0.791 & 0.701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.95 \\ 6.63 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [2.67 \; 4.73] \begin{bmatrix} 5.745 & 0.791 \\ 0.791 & 0.701 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.67 \\ 4.73 \end{bmatrix} + \ln(0.429)$$

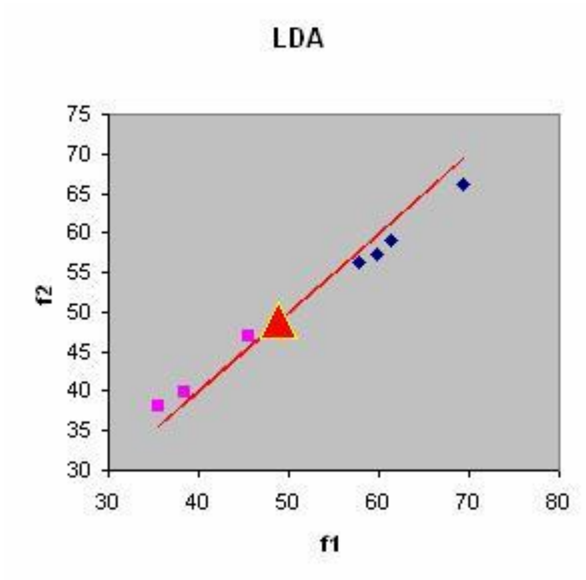
$$f_2 = 92.26 - 38.34 - 0.846 = 53.071$$

Not: Burada önce c^{-1} matrisi ile x_k^T matrisi çarpılıp, daha sonra elde edilen matris ile μ_i matrisi çarpılmaktadır.

Kıvrımı 2.81 ve çapı 5.46 olan yeni tip halkalı çip için ayrım fonksiyon değerleri hesaplandığında ($f_1 = 44.049$ ve $f_2 = 44.085$) bu çipin kalite kontrolünü geçemeyeceği anlaşılmaktadır.

Bütün veriler için ayrım fonksiyonu değerleri elde edilip ayrım doğrusunun çizilmesi mümkündür. Aşağıda ayrım fonksiyonları değerleri ve ayrım doğrusunu gösteren grafik verilmiştir.

X_1	X_2	x_1^0	x_2^0	f_1	f_2
2.95	6.63	0.060	0.951	55.220	53.071
2.53	7.79	-0.357	2.109	53.774	51.394
3.57	5.65	0.679	-0.025	62.476	59.589
3.16	5.47	0.269	-0.209	51.953	50764
2.58	4.46	-0.305	-1.218	32.028	34.313
2.16	6.22	-0.732	0.547	34.554	35.757
3.27	3.52	0.386	-2.155	41.174	42.414
2.81	5.46	-0.078	-0.219	44.049	44.085


LDA
f2
f1
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
30
40
50
60
70
80