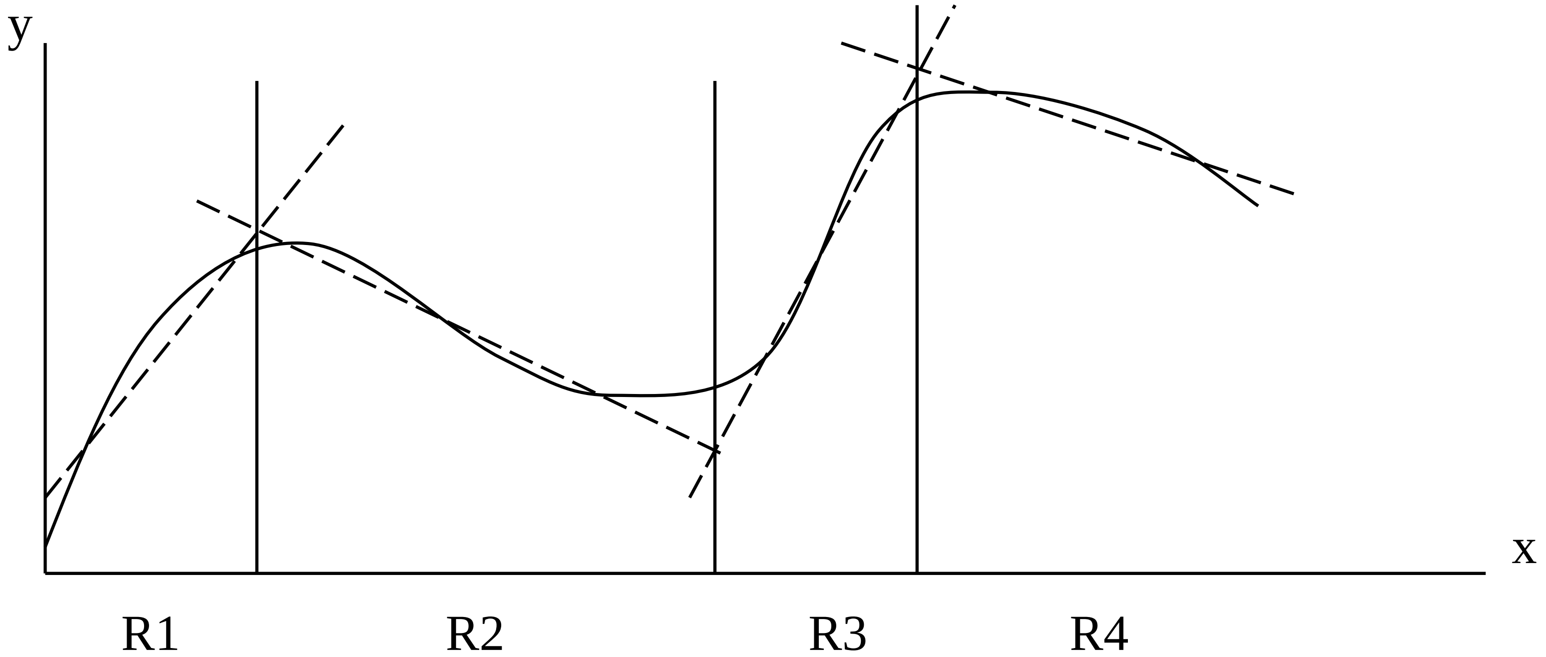
LİNEER MODELLER VE MATRİSLER CEBİRİ

PROF. DR. VEDAT CEYHAN

Matrisler cebiri

- Üç veya daha fazla bağımsız değişkenli modellerin çözümünde kullanılır.
- Uzun eşitlikler sistemlerini toplu ve düzenli bir şekilde göstermemizi sağlar.
- Statik ve dinamik analizlerde ve optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılır.
- Sadece doğrusal ilişkilerde kullanılabilir.

Lineer modele yaklaşım



Şekil 4.1 Lineer Modele Yaklaşım

Matris

- Sayılar topluluğudur.
- Bir boyutu vardır.

[nxm]

Satır sayısı

Sütun sayısı

Eşitlik sistemlerinin çözümünde kullanılır

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 17 \\ 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 23 \\ -8x_1 + 10x_4 = -30 \\ 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Eşitliğin matrise dönüştürülmüş hali

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 23 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] \quad [X] = [d]$$

A= sistemin parametreleri (değişkenlere ait katsayılar)
X= değişkenler
d= eşitliğin sağındaki sabit sayılar

Eşitlik sistemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2$$

---------- ---------- ---------- ---------- ----------

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m$$

a, elemanın sayı değeri,
i, matrisin sıra numarası (i = 1,2....m),
j, sütun numarası (j = 1, 2,..., n)

Eşitlik sisteminin matrise dönüşümü

Birinci satır, birinci sütun elemanı

Birinci satır, ikinci sütun elemanı

$$[A] = = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad [d] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisi Değişkenler matrisi Sabit terimler matrisi

Sütun matris

Sütun ve sıra matrisi

- **Sütun matris (dikey vektör)** (mx1) tertibindeki matris

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- **Sıra matris (sıra vektör)** : (1xn) tertibindeki matris

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \end{bmatrix}$$

Eşit matris

- İki matrisin birbirine eşit olması için, boyutlarının ve bütün elemanlarının eşit olması gerekir.

$$\begin{bmatrix} 19 & 27 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 27 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 7$$
$$x_2 = 4$$

Matris işlemleri

- Toplama
- Çıkarma
- Çarpma
- Bölme (Bölme işlemi matris cebirinde yok. Bunun yerine matrisin tersinin alınıp çarpılması işlemi yapılıyor)

Matrislerde toplama ve çıkarma

- İki matrisin toplanabilmesi veya çıkarılabilmesi için boyutları aynı olmalıdır. Toplama ve çıkarma işlemleri, matrislerin karşılıklı eleman çiftleri arasında yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 13 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+12 & 17-6 \\ 7+13 & -2+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-5 & 7-12 \\ 3-1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrislerin skalar bir sayı ile çarpımı

- Sayı (scalar), matris elemanlarının her biri ile ayrı ayrı çarpılır.

$$7\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -7\\ 42 & 70\end{bmatrix}$$

Skalar sayı

İki matrisin çarpılması

Temel Kural: birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

- Ortaya çıkacak yeni matrisin boyutları, birinci matrisin sıra, ikinci matrisin sütun sayısı kadardır.

Matrislerde çarpma işleminin mekanizması

- Birinci matriste soldan sağa, ikinci matriste yukarıdan aşağıya doğru hareket edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \end{bmatrix}$$

$$[A] \qquad [B] \qquad = \qquad [AB]$$

(1x2) (2x3) (1x3)

Matrislerde çarpma örnekleri (1)

Örnek 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-1)+(4)(10) & (3)(2)+(4)(3) \\ (2)(-1)+(-1)(10) & (2)(2)+(-1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 18 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

(2x2) (2x2) (2x2)

Örnek 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5)+(3)(9) \\ (2)(5)+(8)(9) \\ (4)(5)+(0)(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(3x2) (2x1) (3x1)

Matrislerde çarpma örnekleri (2)

Örnek 3

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (5)(-1)+(2)(3)+(1)(0) & (5)(0)+(2)(1)+(1)(0) & (5)(2)+(2)(-2)+(1)(4) \\ (0)(-1)+(-1)(3)+(0)(0) & (0)(0)+(-1)(1)+(0)(0) & (0)(2)+(-1)(-2)+(0)(4) \\ (3)(-1)+(0)(3)+(-3)(0) & (3)(0)+(0)(1)+(-3)(0) & (3)(2)+(0)(-2)+(-3)(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Matrislerde çarpma örnekleri (3)

Örnek 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

(1x4) (4x1) (1x1)

Örnek 5

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 9 & 7 \\ -18 & 3 \\ -13 & 1 \end{bmatrix}$$

(4x3) (3x2) (4x2)

Örnek 6

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(2x4) (2x2) Bu iki matris çarpılamaz! (Neden?)

Matrislerde işlem kuralları

- Toplamanın değişmezlik kuralı: a + b = b + a
- Çarpmanın değişmezlik kuralı: ab = ba
- Toplamanın birleştirici kuralı: (a + b) + c = a + (b + c)
- Çarpmanın birleştirici kuralı: (ab)c = a (bc)
- Dağıtma kuralı: a (b + c) = ab + ac veya $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

Özel matrisler (1)

- **Kare matris:** Satır ve sütun sayıları eşit olan (m=n) matrisler

$$\text{Kare matrisin genel formu: } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ kare matris örneği: } \begin{bmatrix} 21 & -5 & 56 \\ -2 & 14 & 13 \\ 16 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Özel matrisler (2)

- **Devrik matris** (*transpose matrix*): Bir matrisin (A) sıra ve sütunları yer değiştirilince elde edilen matris

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \; ; \; [B] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Devrik matris A' veya A^T ile gösterilir

Özel matrisler (3)

- **Birim matris** (*identity matrix*): Ana köşegenindeki (sol yukarıdan sağ aşağı doğru inen köşegen) değerleri 1, diğer bütün değerleri sıfır olan matris.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_n ile gösterilir

Bir matrisin BİRİM matris ile çarpımı

- Bir matrisin birim matrisle çarpımı kendisini verir.

$$AI_n = I_n A = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Özel matrisler (3)

- Bütün değerleri sıfır olan matrise, **sıfır matris** (*null matrix*) denir ve 0 ile gösterilir.
- Birim matrisin aksine, sıfır matrisin kare matris olma zorunluluğu yoktur.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A0 = 0A = 0$$

Özel matrisler (4)

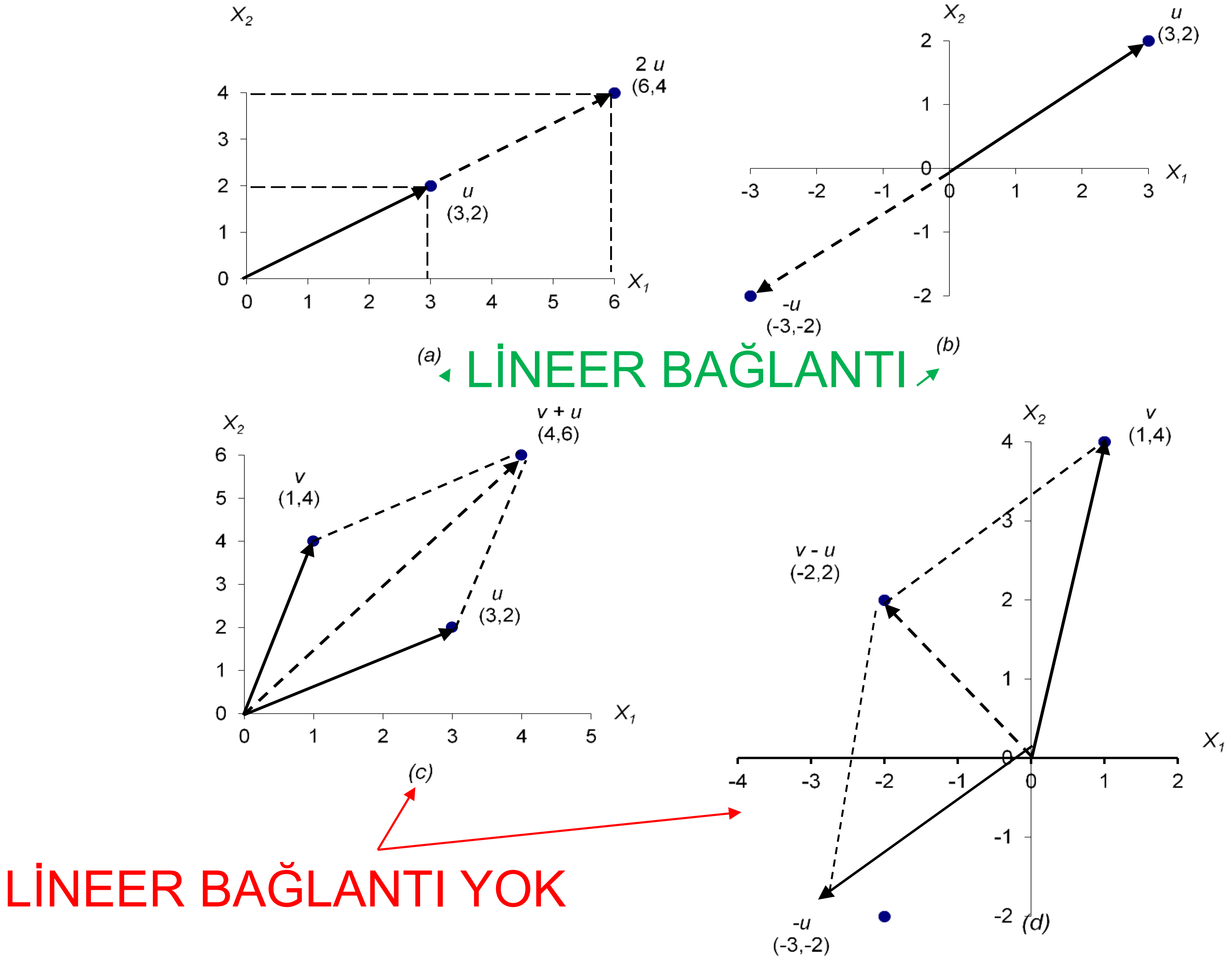
- *Simetrik matris:* Devriği ile aynı olan matris

$$(a_{ij} = a_{ji})$$

$$[A] = [A'] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Lineer bağlantı

- Bir vektör dizisi içinde herhangi bir vektörün, diğerleri ile lineer ilişki içinde olması durumuna **lineer bağlantı** denir. Böyle bir ilişki yoksa, vektörler lineer bağımsızdır (Hoy et al 1996, s: 297).



Şekil 4.1 Lineer (a ve b) ve Lineer Olmayan (c ve d) Bağlantılar (Chiang 1994, s. 69)

Örnek 1 Aşağıdaki 3 vektör lineer bağımlıdır, çünkü v_3, v_1 ve v_2'nin lineer bir kombinasyonudur.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \; ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \; ; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki 3 vektör arasındaki lineer ilişki aşağıdaki gibidir:

$$3v_1 - 2v_2 = v_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = v_3$$

Örnek 2 $v_1 = \begin{bmatrix} 5 & 12 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 10 & 24 \end{bmatrix}$ vektörlerinin lineer ilişki içinde oldukları açıktır.

İkinci vektör birincinin iki katıdır : $2v_1 = 2\begin{bmatrix} 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 24 \end{bmatrix} = v_2$

Matrislerde bölme

- Matrislerin bölünebilmeleri için kare matris olmaları ve **tekil** olmamamaları (*nonsingularity*) gerekir (Jacques 1999, s. 418).

- Bölme işlemi çarpma işlemine dönüştürülür.

$$a/b = ab^{-1}$$

Determinant

- Kare matris dışındaki matrislerin rakam değerleri yoktur.
- Kare matrisin bir rakam değerine determinant denir.

- Matris $\longrightarrow$ $[A]$
- Determinant $\longrightarrow$ $|A|$

- Bir matrisin sıra ve sütunları arasında doğrusal bir bağlantı varsa determinantı sıfır olur.

Determinantın bulunması

- İkinci derece determinantın bulunması
  (Köşegenlerin çarpımları arasındaki fark)

- Üçüncü dereceli determinantların hesaplanması
  (Laplace açılımı veya Sarrus Kuralı)

- Dört ve daha yukarı dereceli determinantların hesaplanması
  (Laplace açılımı)

İkinci derece determinantın bulunması

- Köşegenlerin çarpımları arasındaki fark alınır.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Örnek

$[A] = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $[B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantları:

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-10)(3) - (2)(5) = -40 \qquad \text{ve} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (-5)(4) = 22$$

Üçüncü derece determinantın bulunması

- *Laplace açılımıdır* (*Laplace expansion*) veya Sarrus kuralı kullanılır.

LAPLACE AÇILIMININ AŞAMALARI

- Herhangi bir satır veya sütun seçilir. (sıfırı fazla olan satır veya sütunlar tercih edilmelidir)
- Seçilen satır veya sütunun minör ve kofaktörleri bulunur.
- Kofaktörler seçilen satır veya sütunun katsayıları ile çarpılıp, toplanarak Determinant hesaplanır.

Minör ve Kofaktör (1)

Bir matris elemanının minörü, matristen bu elemanın bulunduğu sıra ve sütundaki diğer elemanların çıkarılması sonucunda geri kalan elemanlardır.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11} elemanının minörü

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Üçüncü dereceden determinant hesabı (Laplace Açılımı)

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$[A]$ matrisinin determinantı, birinci sıradaki elemanlar dikkate alınarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Üçüncü dereceden determinant hesabı
(Sarrus Yöntemi)

- Sadece ikinci ve üçüncü derece determinantların hesabında kullanılabilir, daha üst dereceli determinantların hesabında kullanılamaz.

SARRUS KURALININ AŞAMALARI

- Matrisin yanına 2 sütun veya altına iki satır eklenir.
- Diyagonal çarpma işlemleri yapılır.
- Diyagonal çarpımlarının toplamları arasındaki fark Determinantı verir.

Üçüncü dereceden determinant hesabı

(Sarrus Yöntemi)

$$|D| = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

- - - + + +

İki sütunun eklendiğine dikkat ediniz.

$$|D| = \left. \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array} \right\} = \left[(2)(5)(9) + (1)(6)(7) + (3)(4)(8)\right] -$$

$$\left[(3)(5)(7) + (2)(6)(8) + (1)(4)(9)\right]$$

$$|D| = (90 + 42 + 96) - (105 + 96 + 36) = 228 - 237 = -9$$

Üçüncü dereceden determinant hesabı

(Sarrus Yöntemi)

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (2)(5)(9) + (4)(8)(3) + (7)(1)(6) - (3)(5)(7) - (6)(8)(2) - (9)(1)(4) = -9$$

İki satırın eklendiğine dikkat ediniz.

Dördüncü dereceden determinant hesabı

(Laplace Açılımı)

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|C_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -[-2\,(5+4] = 18$$

$$|C_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = [-4\,(5+4)] = -36$$

Seçilen sıradaki sıfırdan farklı elemanlarla (2 ve 1) kofaktörleri (18 ve -36) çarpılarak sonuç toplanır:

$$|D| = 2(18) + 1(-36) = 0$$

Sıfır çıkması ne anlama geliyor???

Determinantın özellikleri (1)

1.özellik. Sıra ve sütunların yer değiştirmesi, determinantın değerini etkilemez.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

2.özellik. İki sıranın (veya iki sütunun) yer değiştirmesi, determinantın sadece işaretini değiştirir, sayı değerini değiştirmez.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3(15-0) - 1(21-2) = 26$$

Birinci ve üçüncü sütunların yerleri değişirse determinantın sadece işareti değişir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(2-21) + 3(0-15) = -26$$

Determinantın özellikleri (2)

3.özellik. Bir sıranın veya bir sütunun sabit bir sayı ile çarpılması, determinantın değerini bu sayının katı kadar artırır.

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=24-15=9$$

Yukarıdaki determinantın birinci sırası herhangi bir sayı (örneğin 3) ile çarpılırsa, determinantın değeri bu sayının katı kadar artar:

$$D=\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=(72-45)=27$$

Determinantın özellikleri (3)

4.özellik. Herhangi bir sıranın (veya sütunun) belli bir katı, diğer bir sıra (veya sütundan) çıkarılır veya toplanırsa determinantın değeri değişmez. Yukarıdaki determinantın birinci sırasının iki katını, ikinci sıradan çıkaralım, determinantın değerinin (27) değişmediği görülür:

D= $\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (72-45) = 27$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5-24 & 6-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ -19 & -12 \end{vmatrix} = (-144+171) = 27$$

5.özellik. Bir sırası (veya sütunu), diğer bir sırasının (veya sütununun) katı olan determinantın (lineer bağlantı) değeri sıfırdır. Aşağıdaki determinantın birinci sırası, ikinci sırasının -5 sayısı ile çarpılması sonucunda elde edildiğinden değeri sıfırdır:

$$D = \begin{vmatrix} 20 & -5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (20-20) = 0$$

Bir matrisin tersinin alınması

1. Determinantın hesaplanması $(|A|)$
2. Kofaktörler matrisinin bulunması
3. Kofaktörler matrisinin devriğinin alınması (*adjoint A*)
4. Kare matrisin tersinin bulunması: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\,A)$

Matrisin tersinin alınması uygulaması

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Sistem matris formuna dönüştürülürse;

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Matrisin tersinin alınması uygulaması

Eşitlikler sistemimizin katsayılar matrisi $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Determinantı: $(5)(2)-(1)(-1)=11$ dir. Determinant sıfır olmadığına göre $(|D| \neq 0)$ sistemin çözümü vardır.

Kofaktörler matrisi: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Kofaktörler matrisininin sıra ve sütunları yer değiştirirse $adj\ A$ elde edilir:

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dördüncü ve son aşamada matrisin tersine ulaşılır: $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ -1/11 & 5/11 \end{bmatrix}$

Cramer kuralı

- Eşitlikler sistemlerinin çözümlenmesini kolaylaştıran bir kuraldır.

Bir eşitlikler sisteminde herhangi bir değişkenin $(\bar{x}_j)$ değerini bulmak için, determinant

A nın $(|A|)$ j' inci sütununu, sırasıyla sabit sayılar sütunu (d) ile değiştirip determinant

A_j elde edilir$(|A_j|)$. Det A_j, det A ya bölünerek aranan değişkenin değerine ulaşılır:

Cramer kuralı (uygulama)

Örnek 1. Aşağıdaki eşitlikler sistemini çözünüz.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 6x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Önce katsayılar matrisinin determinantı hesaplanır:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (5)(-2) - (6)(3) = -28$$

Daha sonra aranan değişkenlerin bulunduğu sütunlar, sırayla sabit sayılar sütunu ile değiştirilir:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 30 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -84$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -140$$

Son aşamada değişkenlerin değerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-84}{-28} = 3 \quad \text{ve} \quad \bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-140}{-28} = 5$$

TEŞEKKÜRLER