MAKSİMİZASYON VE MİNİMİZASYON

PROF. DR. VEDAT CEYHAN

Bir fonksiyonun maksimum ve minimumu Neden ve Nasıl bulunur?

- Neden bulunur....

  Fayda maksimizasyonu (kısıtlayıcısı BÜTÇE)

  Masraf minimizasyonu (kısıtlayıcısı TEKNOLOJİ)

  Gelir (kar) maksimizasyonu

- Nasıl bulunur......

  Fonksiyonun TÜREVİ alınıp, sıfıra eşitlenir..

  Birinci türev ve ikinci türev testleri..

- Amaçlanan sonuçlara ulaşmak KISITLAYICI ŞARTLARA bağlı...

Maksimum/Minimum ve Optimizasyon

- Optimizasyon

  En iyiyi elde etmek

- Maksimum/Minimum ≠ OPTİMİZASYON

Ekstremum (Uç Değerler)

Maksimum/Minimum

Birinci türev (fx) → İkinci türev (fxx)

fx = 0

- fxx → $(\frac{d^2y}{dx^2} < 0)$ → Maksimum
- fxx → $(\frac{d^2y}{dx^2} > 0)$ → Minimum
- fxx → $(\frac{d^2y}{dx^2} = 0)$ → Büküm noktası (EYER noktası)

Basit maksimizasyon (1)

Birinci türev (fx)

$\boxed{y = 6x - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 6 - 2x$$

Birinci türevi sıfıra eşitleyip x değerini bulalım:

$$6\text{-}2x = 0 \Rightarrow x = 3$$

x =3 olan noktada fonksiyonun eğimi sıfırdır. Bu değer fonksiyonda $(y = 6x - x^2)$ yerine konulursa maksimum değeri bulunur:

$$y_{\max} = (6)(3) - 3^2 = 18 - 9 = 9$$

Basit maksimizasyon (2)

$$y = 6x - x^2$$

fx = 6-2x

Birinci türev (fx)

fxx = - 2

İkinci türev (fxx)

İkinci türev (fxx) < 0 (negatif) olduğundan MAKSİMUM

Birinci ve ikinci türevler ile fonksiyondaki değişmeler

Birinci türev (f_x)	İkinci türev (f_{xx})	Fonksiyondaki değişme
Pozitif	Negatif	Fonksiyon azalan bir hızla artıyor (Şekil 8.1 a)
Negatif	Negatif	Fonksiyon artan bir hızla azalıyor (Şekil 8.1 b)
Negatif	Pozitif	Fonksiyon azalan bir hızla azalıyor (Şekil 8.2 c)
Pozitif	Pozitif	Fonksiyon artan bir hızla artıyor (Şekil 8.2 d)

Basit minimizasyon (1)

$$\boxed{y = x^2 - 4x + 6} \longrightarrow \boxed{\text{Ortalama masraf eğrisi}}$$

Fonksiyonun birinci türevini alarak sıfıra eşitleyelim ve x'in değerini bulalım:

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 2x - 4 = 0 \longrightarrow \boxed{\text{Birinci türev (fx)}}$$

İkinci türev (fxx)

Bulunacak x değeri 2'dir ve bu noktada fonksiyonun (y) değeri 2'ye eşittir. İkinci türevin değeri pozitif olduğuna göre ($\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} = 2 > 0$) fonksiyon $x = 2$ noktasında minimum değer alır.

İkinci türev (fx) > 0 (pozitif) olduğundan mutlak minimum

EKSTREMUMLAR (UÇ DEĞERLER)

- Ekstremum bulmak ⟶ OPTİMİZASYON

- Fonksiyonda birden fazla maksimum veya minimum varsa bunlara ekstremum (uç değer) denir.

YEREL MAKSİMUM VE MİNİMUM

- f(x) fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir x_0 değeri için bu aralıktaki en büyük değerini alıyorsa; $(x_0, f(x_0))$ noktası, f(x)'in ***yerel maksimum noktası***dır

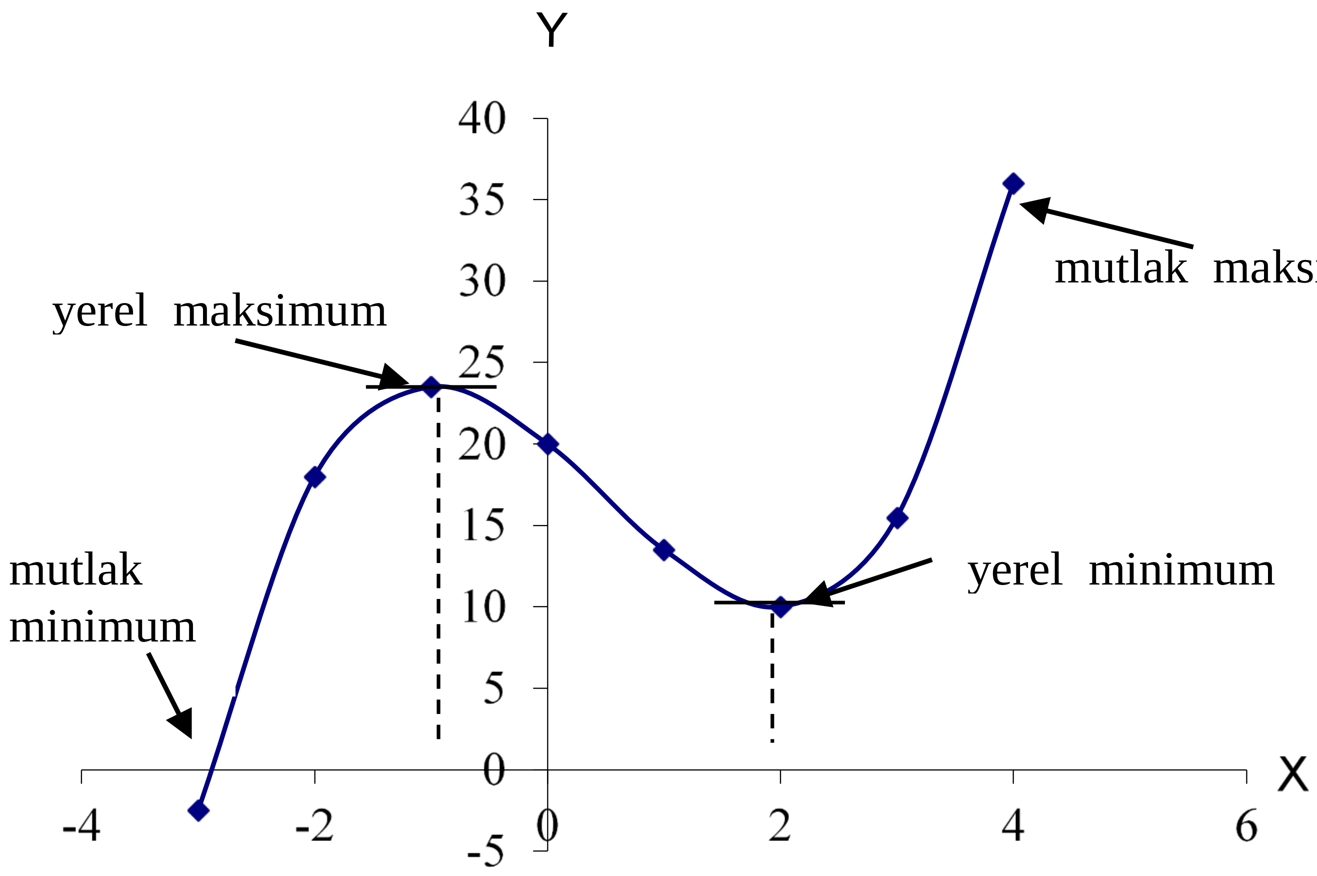
- f(x) fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir x_0 değeri için bu aralıktaki en küçük değerini alıyorsa; $(x_0, f(x_0))$ noktası, f(x)'in ***yerel minimum noktası***dır

MUTLAK MAKSİMUM VE MİNİMUM

- Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki **en büyük** değerini aldığı noktaya **mutlak maksimum noktası**, en büyük değerine ise **mutlak maksimum değeri** denir.

- Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki **en küçük** değerini aldığı noktaya **mutlak minimum noktası**, en küçük değerine ise **mutlak minimum değeri** denir.

YEREL MAKSİMUM VE MİNİMUM



Şekil 8.3 Fonksiyonun ($y = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 20$) Ekstremumları

EKSTREMUMLAR İÇİN GEREKLİ VE YETERLİ ŞARTLAR

Şartlar	Maksimum	Minimum
Birinci test (gerekli şart)	$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$	$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$
İkinci test (yeterli şart)	$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} < 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} > 0$

TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA UÇ DEĞERLERİN BULUNMASI

1.Aşama → Birinci türev alınır ve sıfıra eşitlenir

2.Aşama → İkinci türev alınır

3.Aşama → Birinci türevi sıfır yapan «x» değerleri ikinci türevde yerine konur

4.Aşama → İkinci türevin işareti (-) = Mutlak Maksimum
İkinci türevin işareti (+) = Mutlak Minimum

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA UÇ DEĞERLERİN BULUNMASI

- 1.Aşama → Birinci türev alınır ve sıfıra eşitlenir
- 2.Aşama → İkinci türev alınır
- 3.Aşama → Birinci türevi sıfır yapan «x» değerleri ikinci türevde yerine konur
- 4.Aşama → İkinci türevin işareti (-) = Mutlak Maksimum
  İkinci türevin işareti (+) = Mutlak Minimum
- 5.Aşama → Çapraz kısmi türev testi veya Hessian Matrisi

ÇAPRAZ KISMİ TÜREV TESTİ

fxy

Değişkenlerden birine (X) kısmi türev uyguladıktan sonra, elde edilen sonuca ikinci değişkene göre (Y) uygulanan türeve *ÇAPRAZ KISMİ TÜREV* denir.

(fxx)(fyy)– fxy) > 0 (+) ise EKSTREMUM VARDIR

(fxx)(fyy)– fxy) < 0 (-) ise EKSTREMUM YOK

ÖRNEK

$z = 10x - x^2 + 10y - y^2$ fonksiyonunun ekstremumlarını araştırınız.

Birinci şart ; birinci kısmî türevler testi :

Birinci türev testi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10 - 2x = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10 - 2y = 0;$$

$$x = 5 \qquad y = 5$$

(5;5) noktası maksimum veya minimum olabilir. Bunu anlamak için ikinci türevlerin ve çapraz türevin işaretlerine bakılmalıdır.

İkinci kısmî türevler testi : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

İkinci türev testi

Çapraz kısmî türev testi : $(f_{xy}) = (f_{yx}) = 0$

Çapraz kısmi türev (+) olduğundan EKSTREMUM var. İkinci türev (-) olduğundan MAKSİMUM

$$(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$$

Çapraz kısmi türev testi

$$(-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Çapraz kısmi türev testi pozitif, ikinci kısmi türev testlerinin sonuçları negatif olduğundan (5;5) noktasında fonksiyonun maksimum değerine (50) ulaştığına karar verilir

3 ve DAHA FAZLA DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA UÇ DEĞERLERİN BULUNMASI

Değişken sayısı 3 ve daha fazla olduğunda

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA kullanılır

YOUNG TEOREMİ

$$f_{xy} = f_{yx}$$

- Bu teoreme göre çapraz kısmî türevlerde, türevin önce hangi değişkene göre alındığı önemli değildir, her iki durumda da çapraz türevler eşit olacaktır.

- Çapraz kısmi türev testi başarısız ise (sonuç negatif ise), fonksiyonun ekstremumundan söz edilemez.

- Çapraz kısmi türev testi sıfır çıkarsa test, değişkenlerin yakın değerleri için tekrarlanmalıdır.

HESSIAN MATRİSİ (1)

BİRİNCİ ANA MİNÖR

$$|H_1| = |f_{xx}|$$

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Hessian matrisinin determinantı

İKİNCİ ANA MİNÖR

İKİNCİ ANA MİNÖR

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

HESSIAN MATRİSİ (2)

YEREL MİNİMUM ŞARTLARI

$$|H_1| > 0 \text{ ve } |H_2| > 0; \qquad |H_1| = f_{xx} \text{ ve } |H_2| = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

YEREL MAKSİMUM ŞARTLARI

$$|H_1| < 0 \text{ ve } |H_2| > 0$$

EYER NOKTASI

$$|H_2| = |H| = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$$

HESSIAN MATRİSİ (3)

$z = 10x - x^2 + 10y - y^2$ fonksiyonunun uç noktalarını *Hessian* matrisini kullanarak araştıralım:

Kritik noktaların bulunması için, fonksiyonun değişkenlere göre birinci mertebeden türevleri sıfıra eşitlenir:

$$z_x = 10 - 2x = 0$$

$$z_y = 10 - 2y = 0$$

Elde edilen eşitlik sistemini matris formunda yazalım:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Çözüm vardır ve tektir, çünkü matrisin determinantı tekil değildir:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Değişkenlerin değerlerini *Cramer* kuralı ile elde edelim:

HESSIAN MATRİSİ (4)

$$\bar{x}_0 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}}{4} = 5$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}}{4} = 5$$

Bulunan değişken değerleri z fonksiyonunda yerine konursa $z(5;5)$ noktasında fonksiyonun değeri elde edilir:

$$\bar{z}_0 = 10\,(5) - (5)^2 + 10\,(5) - (5)^2 = 50$$

z (5;5) noktasında fonksiyonun aldığı değerin maksimum mu, minimum mu olduğunu anlamak için *Hessian* determinantına bakalım:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

HESSIAN MATRİSİ

(H_2) > 0 olduğundan MAKSİMUM

Buradan $|H_1| = -2 < 0$ ve $|H_2| = |H| = (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$

Buna göre z (5;5) noktasında fonksiyonun bir maksimumu vardır.

KISITLAYICI FAKTÖRLER EŞLİĞİNDE EKSTREMUM

- LAGRANGE ÇARPANI

- ÇİTLENMİŞ HESSIAN MATRİSİ

LAGRANGE ÇARPANI (1)

LAGRANGE ÇARPANI

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\left[c - g(x, y)\right]$$

LAGRANGE FONKSİYONU

KISIT

LAGRANGE ÇARPANI (2)

$z = x^2 + 4y^2 - xy$ fonksiyonunun, $x + 2y = 100$ kısıtı altında ekstremumunu bulunuz.

Öncelikle Lagrange fonksiyonunu oluşturalım:

$$L\,(x, y) = x^2 + 4y^2 - xy + \lambda\,(100 - x - 2y)$$

KISIT (EŞİTLİĞİN SAĞINA TAŞINIP SIFIRA EŞİTLENDİĞİNE DİKKAT EDİNİZ!!!

Birinci test; birinci kısmî türevler:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = 2x - y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = 8y - x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = 100 - x - 2y = 0$$

BİRİNCİ KISMİ TÜREVLER

LAGRANGE ÇARPANI (3)

CRAMER KURALI VEYA LAPLACE AÇILIMI İLE BULUNUR

Bu üç eşitlikten $y = 25;\ x = 50$ ve $\lambda = 75$ bulunur.

İkinci test (ikinci kısmî türevler ve çapraz kısmî türev):

İKİNCİ KISMİ TÜREVLER

$$L_{xx} = 2 > 0 \ ; \quad L_{yy} = 8 > 0 \ ; \quad L_{xy} = -1 = L_{yx}$$

Çapraz kısmi türev testi

$$(L_{xx})(L_{yy}) - (L_{xy})^2 = (2)(8) - (-1)^2 > 0$$

Çapraz kısmi türev testi ve ikinci türevler pozitif olduğundan, koordinatları (50;25) olan noktanın, fonksiyonun minimum noktası olduğuna karar verilir. Bu noktada z = 3750 dir.

İkinci türev (+) olduğundan MİNİMUM

Çapraz kısmi türev testi (+) olduğundan ekstremum var

ÇİTLENMİŞ HESSIAN MATRİSİ (1)

ÇİTLER (KISIT DEĞİŞKENLERİ BURAYA YAZILIR

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = |\bar{H}|$$

HESSIAN MATRİSİ

ÇİTLENMİŞ HESSIAN DETERMİNANTI

ÇİTLENMİŞ HESSIAN MATRİSİ (2)

$z = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ fonksiyonunun, $x = y/2$ kısıtı altında uç değerlerini araştıralım.

Kısıtı, $2x - y = 0$ şeklinde yazarak Lagrange fonksiyonunu oluşturalım.

LAGRANGE FONKSİYONU

$$L(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + \lambda\,(2x - y)$$

KISIT

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f_x = 80 - 4x - y + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f_y = -x - 6y + 100 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_\lambda = 2x - y = 0$$

Bu 3 eşitlikten fonksiyonun kritik noktası (8.75;17.50) bulunur. Bu noktada fonksiyonun aldığı değer (1225) maksimum mudur, minimum mudur?

ÇİTLENMİŞ HESSIAN MATRİSİ (3)

ikinci mertebe kısmî türevleri alalım:

$$f_{xx} = -4$$
$$f_{yy} = -6$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -1$$

Çitlenmiş *Hessian* aşağıdaki gibidir:

Kısıt katsayıları
(x=2, y=1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

ÇİTLENMİŞ HESSIAN DETERMİNANTI (+) olduğu için ekstremum var.

HESSIAN MATRİSİ

Buradan, kritik noktada fonksiyonun maksimuma ulaştığı (z = 1225) anlaşılmaktadır.

TEŞEKKÜRLER