Kuyruk Teorisi(Y. L.)

1. Hafta

Giriş ve Temel Tanımlar

Günlük hayatta hizmet alabilmek için kuyrukta bekleyen insanlar ya da araçlarla her zaman karşılaşmak mümkündür. Örneğin hastanelerdeki hasta kuyruğu , otomatik para çekme makinelerinde maaş almak için bekleyenlerin oluşturduğu kuyruğun yanı sıra askeri alanlarda da kuyruk teorisinin bir çok uygulaması mevcuttur.[1]

Motorize araçların dar boğazlar ve geçitlerden intikalleri ile oluşturduğu kuyruklar , mayınlı sahalardan geçişte emniyetli ilerleme sağlamak için açılan gediklerden ilerleme neticesinde meydana gelen kuyruklar. Askeri birlik ve mühimmatın karargah yerlerine intikali toplanması ve depolanması halinde oluşan kuyruk , uçak ve helikopterlerin pistlerdeki beklemesi veya inmek için havada beklemesi hallerinde hava alanlarında oluşturulan kuyruklar , gemilerin tersanelerde beklemeleri halinde demir atmış gemilerin kuyruğu , bozulan makinelerin tamir atölyelerinde oluşturduğu kuyruk gibi bir çok örnek verilebilir.

Çeşitli nedenlerle bu türdeki bekleme ve yığılmalar bekleme hattı teorisin çerçevesinde ele alınmaktadır. Bekleme hattı teorisi daha çok kitlesel olaylarla ilgilenmektedir. Bu nedenle bu teori istatistiğin alanına da girmektedir. Bekleme hattı belirli bir dönemde bir veya birkaç yere gelen müşteriler siparişler makine bozulmaları işlenecek malzemeler gibi birimlerin sayılarının geçici veya sürekli aynı dönemdeki mevcut iş yapma veya hizmet kapasitesinden daha fazla olması halinde ortaya çıkmaktadır.[2]

Yöneylem Araştırması ve Sistem Analizi disiplinlerinin en önemli yöntemlerinden biri olan kuyruk teorisinin ortaya çıkış tarihi her iki displinden çok öncelere gider. Bekleme hattı probleminin incelenmesi ile ilgili ilk çalışmalar 1909 yılında A.K.Erlang tarafından telefon şebekeleri üzerinde yapılmıştır. Erlang Danimarka'da Kopenhag Telefon Şirketi mühendisi olarak çalışmaktaydı.[3] Daha sonraları C.Molina'nın 1927 'de ve C.Fry'ın 1928 de yayınlanan eserleri bu alanda ilk görülen önemli çalışmalardır. Fakat bu dönemdeki çalışmalar Erlang'ın

---

[1] Pala R E., Beloso A.C. and Hines W.W., 1966 , Waiting Line Models An Introduction to Their Theory and Application , Reinhold Publishing Corporation , New York , p.9
[2] Yılmaz , Zekai Prof.Dr., Sayısal Yöntemler , Uludağ Üniversitesi Basımevi , Bursa , 1995, S.235
[3] Gross D., Harris M.C., 1974 , Fundamentals Of Queueing Theory , John Wiley and Sons , p.12

telefon sistemlerindeki sıra bekleme sorununu inceleyen araştırmaların bir değerlendirmesi niteliğindeydi.[4]

Bekleme hattı problemlerinin daha geniş kullanımı ise II. Dünya Savaşında ve bunu takip eden yıllarda ortaya çıkmıştır.İkinci dünya savaşında cepheden sağ selamet gelen uçaklar kısmen iniş iznini beklerken vurulmuş kısmen de havaalanı üzerindeki bekleme alanın da yakıt bitmesinden düşmek zorunda kalmıştır. Bu gelişmeler dolayısıyla askeri yetkililerin kendi hava alanlarında sonucu çok kötü olan bekleme sürelerinin asgariye indirmek için çözüm aradıkları bilinmektedir. Bu amaçla bekleme hattı teorisinden büyük ölçüde yararlanılmıştır.

1930 ve 1950 arasındaki dönemde Crommelin, Pollaczek , Khintchine , Kolmogorov ve Palm gibi bilim adamları kuyruk teorisinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Crommelin telefon sistemlerinde bekletilen telefonlarla ilgili olarak olasılık formülleri geliştirdi. Pollaczek ve Khintchine Poisson gelişli , değişen ve sabit zaman servisli tek kanallı sıra bekleme sistemleri için Pollaczek-Khintchine formülünü geliştirdiler. Palm değişen trafik yoğunluklarının etkilerini ve bekleme zamanlarının momentlerini inceledi.[5]

Telefon sistemlerinde sıra bekleme sorununu inceleyen 1930'lardan önceki çalışmalara karşılık , yukarıda adı geçen ve genellikle teorisyen olan bilim adamları bir çok karmaşık stokastik faaliyetleri kapsayacak genel modeller geliştirmeyi amaçladılar.[6]

Paralel kanallı bekleme hattı sistemleri ile ilgili çalışmalara kısaca şu şekildedir: Singh (1968) bloklu Markov kuyruk sistemi ve heterojen iki kanalı incelemiştir. Bell(1974) $M/M/c$ sistemlerde taşınabilir ve kapatılabilir hizmet birimlerini ele almıştır. Seth (1976) servis süreleri farklı olan , müşteri gelişleri Poisson dağılımlı , bekleme hattı bulunan iki kanallı kuruk sistemini incelemiştir. Everitt (1983) $M/M/c$ sisteminde ayrılışları incelemiştir. Kumar ve Lin 1984'te iki heterojen kanallı kuyruk sistemi için optimal kontrol çalışması yapmıştır. Jain ve Temleton (1991) $M/M/2$ kuyruk sistemi için güven aralığını ele almıştır.

---

4 Saaty , Thomas L., Elements of Queueing Theory With Applications ,NewYork , McGraw-Hill Book Company, Inc.,1961,S.21

5 Saaty , Thomas L., Elements of Queueing Theory With Applications ,NewYork , McGraw-Hill Book Company, Inc.,1961,S.21

6 Sarıaslan H., 1998 , Simülasyon Tekniği ve Kuyruk Teorisi Modellerinin Analizi , Turhan Kitapevi , S.5

Stokastik kuyruk sistemlerinin analiz edilmesi için aşağıdaki tanım ve kavramlar veriliyor:

Tanım. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayı olsun. Bu uzayda tanımlanan $\{ X_t, t \geq 0 \}$ tesadüfi değişkenler ailesine stokastik süreç denir. Burada t - zamana ilişkin parametredir.

Tanım. X_t sürecinin alabileceği değerler kümesi $\mathbb{R}_x$ ile t parametresinin alabileceği değerler kümesi de T ile gösterilir. Bu bağlamda $\mathbb{R}_x$'e durum uzayı, T ye ise indis kümesi ya da parametre kümesi denir. $\mathbb{R}_x = (-\infty, \ \infty)$ ve $T = (0, \infty]$. Durum uzayı E ile de gösterilebir.

Eğer $T = (-\infty, \ \infty)$ ise X_t ye stokastik fonksiyon denir ve $\{ X_t, T \}$ ile ifade edilir. Stokastik süreçler durum uzayına ve parametre kümesine göre dört kısma ayrılır:

- *Kesikli (sürekli) parametreli kesikli (sürekli) durum uzaylı stokastik süreç.*

$X_t = k, \ k \in \mathbb{R}_x$ olduğunda stokastik süreç t anında k durumundadır. Stokastik süreç tesadüfi değişken kavramının genel hali tesadüfi değişken kavramı da stokastik süreç kavramının özel halidir.

$t = t_0$ gibi bir sabite eşit olduğunda stokastik süreç X_{t_0} gibi bir boyutlu tesadüfi değişkene dönüşür. $t \in \{t_1, t_2\}$ alabiliyorsa stokastik süreç iki boyutlu tesadüfi değişkene dönüşür, $\left(X_{t_1}, \ X_{t_2}\right)$ biçimindedir. $t \in \{t_1, t_2, \ \cdots \ , t_n\}$ için stokastik süreç n boyutlu tesadüfi değişkenler vektörüne dönüşür, yani $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ \cdots \ , X_{t_n}\right)$.

Tanım. $\{ X_t, t \geq 0 \}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer $n = 1,2, \ldots$ ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t < \infty$ için X_{t_2}-X_{t_1}, ,… , X_{t_n}-$X_{t_{n-1}}$ tesadüfi değişkenleri bağımsız iseler bu sürece bağımsız artımlı süreç (B.A.S.) denir.

Tanım. $\{ X_t, t \geq 0 \}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer $n = 1,2, \ldots \ , h > 0$ ve $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t < \infty$ için $X_{t_{1+h}}, \ X_{t_{2+h}}, \cdots \ , \ X_{t_{n+h}}$ değişkenlerinin ortak dağılımı ile $X_{t_1}, \ X_{t_2}, \cdots \ , \ X_{t_n}$ değişkenlerinin ortak dağılımı aynı ise bu sürece durağan süreç denir. Böylece durağan sürecin dağılımı, başlangıç zamanındaki değişimle etkilenmeyecek ve herhangi bir $h > 0$ için X_t ile X_{t+h} aynı dağılıma sahip olacaktı

Markov kuyruk modellerinin teşkil edilmesi ve analizinde Poisson sürecinin bilinmesi gerekir bu bağlamda Poisson süreci ve özellikleri aşağıda veriliyor.

Poisson Süreci

Tanım. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\{X_t \, , t \geq 0\}$ sayma süreci bir Poisson süreci olarak adlandırılır. Poisson süreci sürekli parametreli kesikli durum uzaylı stokastik süreçtir.

1. $X_0 = 0$
2. X_t bağımsız artımlı süreçtir.
3. Herhangi bir t aralık uzunluğundaki olayların sayısı λt ortalama ile Poisson dağılmıştır. Yani tüm $t > 0$ için

$$P(X_{t+s} - X_s = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Bu 3. özellik Poisson sürecinin durağan artımlı ve $E(X_t) = \lambda t$ olduğunu gösterir.

Poisson sürecinin varyansı ve kovaryansı

a) $E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_t = k) = \lambda t$

$V(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t)^2 = E(X_t^2) - (\lambda t)^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t$

EBu ifade varyans formülünde yerine yazılırsa;

$V(X_t) = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t.$

b) $\forall\, s,t > 0$ $için$ $Cov(X_t, X_s) = \lambda min(t,s)$

Poisson sürecinin özellikleri

1. $h \to 0$ iken, $X_h \sim Pois(\lambda h)$, $f(x_h) = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}$, $k = 0,1,\ldots$

a) $P(X_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

b) $P(X_h = 1) = \lambda h + o(h)$

c) $P(X_h \geq 2) = o(h)$

2. Poisson sürecinin geliş anları $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ olsun. Bunlara sıçrayış anları denir. Bu dizi bağımsız artımlı bir dizidir.

$$T_1 = t_1 - t_0 \ , \ T_2 = t_2 - t_1 \ , \ \ldots \ , \ T_n = t_n - t_{n-1}$$

- **a)** T_i' ler λ parametreli üstel dağılıma sahiptirler .
- **b)** T_i' ler bağımsızdır veya t_i ler B.A.

3. $\{X_t, t \geq 0\}$ ve $\{Y_t, t \geq 0\}$ ortalama oranları λ_1 ve λ_2 olan bağımsız Poisson süreçleridir.

$Z_t = X_t + Y_T$ şeklinde tanımlandığına göre $\{Z_t, t \in T\}$ olmak üzere $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ Parametresi ile Poisson sürecidir. Yani Poisson süreci toplama işlemine göre kapalıdır.

Ödev. $\left\{X_t^{(1)}\ ,\ t \geq 0\right\}, \left\{X_t^{(2)}\ ,\ t \geq 0\right\}, \ldots, \left\{X_t^{(n)}\ ,\ t \geq 0\right\}$, n-tane bağımsız stokastik süreç veriliyor ve ortalama oranları sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ve $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ olarak alındığında $Y_t = \sum_{i=1}^{n} X_t^{(i)}$ nin de bir Poisson süreci olduğunu gösteriniz.

4. $\{X_t, t \geq 0\}$, λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ geliş anlarıdır.

$X_t = 1$ koşulu altında t_1 geliş anı $(0,t)$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

5. $\{X_t, t \geq 0\}$ poisson süreci ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t < \infty$ bu sürecin geliş anlarıdır. Her bir geliş anı p olasılığı ile sağlanıyor veya $1 - p = q$ olasılığı ile sağlanıyor. N_t ile $(0,t)$ aralığında yerleşen ve sağlanan gelişlerin sayısını gösterelim. Bu durumda N_t , λpt parametreli Poisson dağılımına sahiptir. Yani N_t' nin Poisson süreci olabilmesi için,

a. $N_t = 0$

b. N_t B.A.S.

c. N_t'nin geliş anları X_t'nin geliş anlarıdır.

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots$$

6. $\{ X_t,\ t \geq 0 \}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ 'ler geliş anlarıdır. $X_t = n$ koşulu altında $(0,t)$ aralığında $t_1, t_2, \dots, t_n$ geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$$f(x_1,\ x_2\ , \dots, x_n \ / \ X_t{=}n) = \frac{n!}{t^n} \qquad ; \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

Not. Bu aynı zamanda n tane sıra istatistiği olan $t_1, t_2, \dots, t_n$' lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

7. λ parametreli Poisson sürecinde n. geliş anı $n\ ve\ \lambda$ parametreli gamma dağılımına sahiptir. Yani t_n'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\boldsymbol{f_{t_n}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}, \quad ; \quad \lambda > 0\,,\ x > 0}$$

8. $\{ X_t,\ t \geq 0 \}$ λ parametreli Poisson süreci olsun. $t_1 < t_2 < \cdots$ 'ler geliş anlarıdır. $t_1, t_2, \dots, t_n$ geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$$f_n(x_1,\ x_2\ , \dots, x_n\ ) = \lambda^n e^{-\lambda x_n} \qquad ; \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$