Kuyruk Teorisi(Y. L.)

11. Hafta

Heterojen Kanallı Kuyruk Sistemleri

Paralel Heterojen Kanallı Kuyruk Sisteminin Analiz

Farklı hizmet sürelerine sahip kuyruk sistemlerinde hizmet dağılımını gösteren göstergenin üzerine $\rightarrow$ işareti konulur. Aynı biçimde gelişler arası süreler farklı olduğunda da bu göstergenin üzerine de → işareti konulur**.** Bu bağlamda burada verilecek model $\boldsymbol{M/M_i/2/0}$ biçiminde tanımlanıyor.

$\boldsymbol{M/M_i/2/0}$ Sisteminin Tanımı

Bu kuyruk sistemi aşağıdaki gibi analiz ediliyor:

a) Sistemin girişine λ parametreli Poisson akımı geliyor.
b) Her bir müşterinin k. kanalda hizmet süresi μ_k parametreli üstel dağılıma sahiptir.
c) Geliş anında müşteri:
   1. Kanalların her ikisi boş ise α ve $\beta = 1 - \alpha$ olasılığı ile sırayla birinci ve ikinci kanalda hizmet alır.
   2. Yalnız bir kanal boş ise bu kanalda yer alır.
   3. Her iki kanalda dolu ise hizmet almadan sistemden ayrılır.

Denklem Sistemi ve Çözümü

ξ_t ve η_t herhangi bir t- anında sırasıyla birinci ve ikinci kanalların durumlarını göstersin. Bu durumda, $\{(\xi_t, \eta_t), t \geq 0\}$ iki boyutlu sürekli parametreli bir Markov zinciridir. Bu zincirin durum uzayı da aşağıdaki gibidir.

$$E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

$$P_{ij}(t) = \text{Prob}\{\, \xi_t = i,\ \eta_t = j \,\}, \quad \forall \ (i,j) \in E$$

Burada $P_{ij}(t)$, t süresinde birinci kanalda i ikinci kanalda j tane müşteri olması olasılığıdır. Bu olasılıklar için Kolmogorov diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir. $\{(\xi_t, \eta_t),\ t \geq 0\}$ sürecinin geçiş olasılıkları, $h \longrightarrow 0$, iken $(t, t+h)$ aralığı için bulunacaktır. Şöyle ki,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)\, a_{kj}.$$

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_{10}(t) + \mu_2 P_{01}(t)$$

$$P'_{10}(t) = -(\lambda + \mu_1) P_{10}(t) + \alpha\lambda P_{00}(t) + \mu_2 P_{11}(t)$$

$$P'_{01}(t) = -(\lambda+\mu_2)P_{10}(t) + \beta\lambda P_{00}(t) + \mu_1 P_{11}(t)$$

$$P'_{11}(t) = -(\mu_1+\mu_2)P_{11}(t) + \lambda(P_{01}(t) + P_{10}(t))$$

Ayrıca $P_{ij}(t)$ limit olasılıklarının aşağıdaki gibi mevcut olduğu varsayılırsa,

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = p_{ij}$$

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} \lim_{t\to\infty} P_{ik}(t)\, a_{kj} = \sum_{k\in E} p_{ik}\, a_{kj} = 0.$$

Burada a_{ij} geçiş oranları ve $A = [a_{ij}]$ ile ifade edilir.

$$0 = -\lambda p_{00} + \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}$$

$$0 = -(\lambda+\mu_1)p_{10} + \alpha\lambda p_{00} + \mu_2 p_{11}$$

$$0 = -(\lambda+\mu_2)p_{10} + \beta\lambda p_{00} + \mu_1 p_{11}$$

$$0 = -(\mu_1+\mu_2)p_{11} + \lambda(p_{01} + p_{10})$$

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \beta\lambda & \alpha\lambda & - \\ \mu_2 & -(\lambda+\mu_2) & - & \lambda \\ \mu_1 & - & -(\lambda+\mu_1) & \lambda \\ - & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem sisteminde ki ilk üç denklemi Cramer metodu ile çözelim:

$$\lambda p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}$$

$$\alpha\lambda p_{00} = (\lambda+\mu_1)p_{10} - \mu_2 p_{11}$$

$$\beta\lambda p_{00} = (\lambda+\mu_2)p_{01} - \mu_1 p_{11}$$

Buradan

$$\Delta = \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2)$$

$$\Delta_{10} = \lambda\mu_2 p_{00}(\lambda + \alpha(\mu_1+\mu_2))$$

$$\Delta_{01} = \lambda\mu_1 p_{00}(\lambda + \beta(\mu_1+\mu_2))$$

$$p_{01} = \frac{\Delta_{01}}{\Delta}$$

$$p_{01} = \frac{(\lambda+\beta(\mu_1+\mu_2))}{\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}\lambda p_{00}$$

$$p_{10} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta}$$

$$p_{10} = \frac{(\lambda + \alpha(\mu_1 + \mu_2))}{\mu_1(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)} \lambda p_{00}$$

bulunur.

$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1, \;\; \forall\, i,j \;\in E$. Başka bir ifade ile $p_k(k = 0, 1, 2)$ sistemde k tane müşteri olması olasılığı olsun. Bu durumda $p_0 = p_{00}$, $p_1 = p_{01} + p_{10}$, $p_2 = p_{11}$, $\sum_k p_k = 1$ olur.

$$p_1 = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)} p_{00}$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} p_1$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)} p_{00}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

eşitliğinden

$$p_0 = \frac{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

$$p_1 = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + (\lambda(\mu_1 + \mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

bulunur. Burada p_0 sistemin boş olması, p_1 kanallardan birisinin boş olması ve p_2'de sisteme gelen müşterinin hizmet almadan ayrılması (kaybolması) olasılığıdır.

Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

Sistemdeki müşteri sayısı N ile gösterilirse ortalama müşteri sayısı da $E(N)$ olacaktır.

$$E(N) = \sum_{k=0}^{2} k\, p_k$$

$$= \frac{\lambda(\mu_1+\mu_2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1) + 2\lambda^2(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2) + (\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \alpha\mu_2 + \beta\mu_1)}$$

Kaybolma Olasılığının Optimizasyonu

1. $\mu_1 > \mu_2$ olsun . Bu demektir ki birinci kanal daha hızlı çalışıyor. Bu durumda doğal olarak şu problem ortaya çıkar: Sisteme gelen müşteri boş kanallardan hangisinde hizmet alırsa p_2 minimum olur.

$$\frac{1}{p_2} = (\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2) + \frac{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2)}{\lambda + \mu_1 + \alpha(\mu_2 - \mu_1)}$$

Burada açıkça görülür ki $\alpha(\mu_2 - \mu_1)$ minimum değeri aldığında $p_2(\alpha)$ minimum olur. $\mu_2 - \mu_1 < 0$ olduğu için , $p_2(\alpha)$ minimum değeri $\alpha = 1$ olduğunda alır. Dolayısıyla $\beta = 0$ olur.

$$\min_{0 \le \alpha \le 1} p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + \mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2) + (\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2)(\lambda + \mu_2)}$$

2. $\alpha = \beta = 1/2$ alındığında p_2 aşağıdaki formüle dönüşür.

$$p_2 = \frac{\lambda^2(\lambda + (\mu_2 + \mu_1)/2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1+\mu_2) + (\lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2)(\lambda + (\mu_2 + \mu_1)/2)}$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2 + \lambda(\mu_1+\mu_2) + \lambda^2}$$

3. $\mu_1+\mu_2 = c$ koşulu altında $p_2(\mu_1, \mu_2)$ kaybolma olasılığını minimum yapan (μ_1, μ_2) çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu koşul altında

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2 + \lambda c + \lambda^2}$$

olur. Buradan görülür ki p_2, $\mu_1 = \mu_2 = c/2$ olduğunda minimum değer alır.