Kuyruk Teorisi(Y. L.)

10. Hafta

$M/M/c/0$ ya da Erlang Sistemi

Bu sistemde c tane kanaldan herhangi biri ya da daha fazlası boş ise, müşteriler hizmet alırlar. Aksi halde c kanalın bütünü de dolu ise hizmet almadan sistemi terk eder (beklemelerine müsaade edilmez). Sistem dolu olduğunda, c+1 – inci ve daha sonraki müşteriler hizmet almadan geri dönerler, yani

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & ; n = 0,1,\dots,c \\ 0 & ; n = c+1, c+2, \dots \end{cases}$$

olur. $\sum_{n=0}^{c} P_n = 1$ sınır şartı altında

$$\sum_{n=0}^{c} P_n = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} P_0 = 1$$

Buradan,

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^c}{c!}}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^c}{c!}\right)} & ; n = 0,1,\dots,c \\ 0 & ; n = c+1, c+2, \dots \end{cases}$$

Verilen bu dağılım "*kesilmiş Poisson dağılımı*" olarak adlandırılır. Çünkü Poisson dağılımında $n = 0,1,2,\dots$ olurken bu dağılımda verilen $n = 0,1,2,\dots,c$ 'dir. Bütün kanalların dolu olması ya da gelen müşterinin kaybolması olasılığı,

$$p_c = \frac{\rho^c / c!}{\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^c}{c!}\right)} = B(c,\rho)$$

olur. $B(c,\rho)$ formülü A.K.Erlang tarafından bulunduğu için "Erlang'ın B formülü" ya da "Erlang'ın kaybolma formülü" olarak adlandırılır. Bu sistemde ortalama geliş oranı λ , sistemin gerçek ortalama geliş oranı ise λ_a'dır. Çünkü bazı gelişler (müşteriler) kanalların tamamı dolu olduğundan hizmet almadan geri dönerler.

$$\lambda_a = \lambda\big(1 - B(c,\rho)\big) = \lambda(1 - p_c)$$

Ortalama kuyruk uzunluğu ve kuyruktaki ortalama müşteri sayısı sıfırdır. Yani $EL_q = 0$, $EW_q = 0$, çünkü müşterilerin beklemesine müsaade edilmez.

$$L = L_q + L_s = L_s$$

$$L = L_s = E(N) = \sum_{n=0}^{c} nP_n$$

$$= P_0 \sum_{n=0}^{c} \frac{n\rho^n}{n!}$$

$$= \rho P_0 \sum_{n=1}^{c} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \rho P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}$$

$$= \rho(1 - P_c)$$

Little formülü ile sistemdeki ya da kanaldaki bir müşterinin ortalama hizmet süresi;

$$W = W_q + W_s = W_s$$

$$W = {}^{L}\!/_{\lambda_a} = \frac{\rho(1 - P_c)}{\lambda(1 - P_c)} = \frac{1}{\mu}$$

olur (Little, 1961).

(5.30) İfadesinde s ve w aynı dağılıma sahiptir. Bununla birlikte w ya da s tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu μ arametreli üstel dağılıma sahiptir. Yani;

$$F_W(t) = P(W \le t) = P(S \le t) = 1 - e^{-\frac{t}{E(S)}} = 1 - e^{-t\mu} \quad , \quad t \ge 0$$

olur. Bu sistemde gelişler bağımsız ve gelişler arası süre üstel ise Poisson akımı meydana gelir. Müşterilerin geliş anları Poisson akımı (süreci) oluşturduğuna göre kaybolan müşteri akımı da Poisson akımı olur. $t_1, t_2, t_3, \ldots$geliş anları ve τ_1, τ_2, τ_3 , ...müşterilerin ardışık olarak kaybolma anları olsun. $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$ anlarının Poisson süreci oluşturduğunu gösterelim. $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ lerin her birisi bağımsız ve üstel dağılıma sahiptir. $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$ ler $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ dizilerinin alt dizileridir.

$$\tau_1 = t_{n_1}, \tau_2 = t_{n_2}, \tau_3 = t_{n_3}, \ldots$$

$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ ler için $t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots$bağımsızsa$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$içinde $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ler de bağımsızdır. Gelişler arasındaki farklar $(t_1,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_2, \ldots)$bağımsız olduğundan $t_{n_1}, t_{n_2} - t_{n_1}, t_{n_3} - t_{n_2}$, ...farkları da bağımsızdır. Eğer her bir geliş anı p ihtimali ile sağlanıyor ve $(1-p)$ ihtimali ile sağlanmıyorsa, sağlanan geliş anları λp ya da λ_a parametreli, atılan (sağlanmayan) geliş anları da λq ya da $\lambda_{\bar{a}}$ parametreli Poisson süreci olur.

Bu sistemde her bir müşterinin kaybolması ihtimali veya tüm kanalların dolu olması ihtimali λP_c parametreli Poisson sürecidir.

İki ardışık kaybolma anı arasındaki sürenin ortalaması (beklenen değeri) ve varyansı;

$$E(\tau_{n+1} - \tau_n) = \frac{1}{\lambda P_c}$$

$$V(\tau_{n+1} - \tau_n) = \frac{1}{(\lambda P_c)^2}$$

olur.