Kuyruk Teorisi(Y. L.)

4. Hafta

Sürekli parametreli Markov zincirleri

Tanım. $\{X_t,\ t \geq 0\}$, durum uzayı $E = \{0,1,\ldots\}$olan sürekli parametreli bir süreç olsun. Aşağıdaki özellik geçerli olduğunda bu sürece sürekli parametreli Markov zinciri denir. Her bir

ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq t$ ve $n_1, \ldots, n_k \in E$ için

$$\boldsymbol{P\left(X_t = j/X_{t_1} = n_1, \ldots, X_{t_k} = n_k\right) = P\left(X_t = j/X_{t_k} = n_k\right)}$$
(1)

$\boldsymbol{t > t'}$ **için**

$$P(X_t = j/X_u, u \leq t') = P(X_t = j/X_{t'}) \qquad \textbf{(2)}$$

Yukarıdaki her iki eşitliği de Markov özelliği denir. Bu tanıma göre Markov sürecinin herhangi bir t anında durumu belli olduğunda bunun geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

$p_{ij}(t) = P(X_{t+t'} = j/X_{t'} = i)$ ifadesinin anlamı t' anında i durumunda olan sürecin $t + t'$ anında j - durumunda olması olasılığıdır. Özel olarak $t' = 0$ alındığında

$$p_{ij}(t) = P(X_{t'} = j/X_0 = i) \qquad \textbf{(3)}$$

$\{X_t,\ t \geq 0\}$ süreci homojen süreç olarak adlandırılır. (3) olasılığına i durumundan j durumuna geçiş olasılığı denir. Bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall\, i, j \in E$ için

$$p_j(t) = P(X_t = j), \quad p_j(t) \geq 0, \quad p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$$

Kabul edelim ki ,

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Varsayalım ki ,

$$\boldsymbol{a_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}}$$

türevleri mevcuttur. a_{ii} ’ye i durumunda kalma oranı , $a_{ij}(i \neq j)$’ ye ise i durumundan j durumuna geçiş oranı denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}}$$

1) $i \neq j$ için $\quad a_{ij} \geq 0$
2) $i = j$ için $\quad a_{ii} \leq 0$
3) $\boldsymbol{\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0}$

İspat.

1) $i \neq j$ için $\quad a_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}$$

Buradan $p_{ij}(h) = a_{ij}h + o(h)$ bulunur. $p_{ij}(h)$ 0 ile 1 arasında olduğundan $a_{ij} \geq 0$ elde edilir.

2) $\boldsymbol{i = j}$ **için** $\quad \boldsymbol{a_{ii} = p'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h}}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h) - 1}{h}$$

$p_{ij}(h)$ yine 0 ile 1 arasında olduğundan $a_{ii} \leq 0$ bulunur.

3) $\boldsymbol{\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1}$

Eşitliğinin t- ye göre türevi alınıp

$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}{}'(t) = 0$ ise

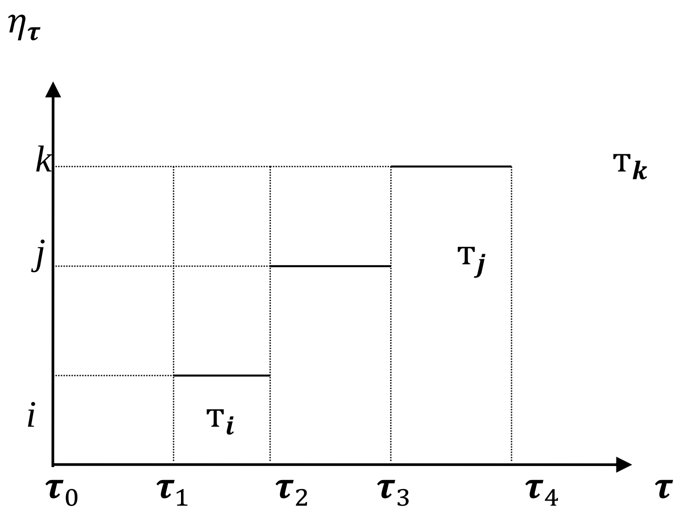
Daha sonra $t = 0$ alınırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}'(0) = a_{ij} = 0.$$

Elde edilir.

Teorem. $\boldsymbol{\tau_i}$ **Markov zincirinin** i **durumunda kalma süresi olsun. Bu takdirde** τ_i **üstel dağılıma sahiptir.**

İspat. $t_1, t_2, \ldots$ ler durum değiştirme anları olsun.



Şekil 1

$P(\tau_i > t + s \,/\, \tau_i > s)$ olasılığını göz önüne alalım. Markov zincirlerinin belleksizlik özelliğinden dolayı

$$P(\tau_i > t + s \,/\, \tau_i > s) = P(\tau_i > t) \qquad \textbf{(6)}$$

ve koşullu olasılıktan dolayı

$$\begin{aligned} &P(\tau_i > t + s / \tau_i > s) \\ &\quad = \frac{P\big((\tau_i > t + s) \cap (\tau_i > s)\big)}{P(\tau_i > s)} \\ &\quad = \frac{P(\tau_i > t + s)}{P(\tau_i > s)} \end{aligned}$$

Yukarıda verilen bu iki denklemi birbirine eşitlersek

$$P\ (\tau_i > t + s) = P(\tau_i > t)\, P(\tau_i > s)$$

denklemi elde edilir. $F_i(t) = P(\tau_i \leq t)$ ve $\Phi_i(t) = P(\tau_i > t)$ alalım. Yukarıdaki denklem

$$\Phi_i(t)\Phi_i(s) = \Phi_i(t+s).$$

$\Phi_i(t+s)$ fonksiyonu türevlenebilir olsun.

$$\Phi_i(t+s) - \Phi_i(t) = \Phi_i(t)\Phi_i(s) - \Phi_i(t)$$

$$= \Phi_i(t)(\Phi_i(s) - 1).$$

Bu eşitlik s ye bölüp limite geçilirse

$$= \Phi_i(t) \lim_{s\to 0} \frac{(\Phi_i(s)-1)}{s}$$

$$\Phi_i(0) = 1 - P(\tau_i < 0) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1$$

$$\Phi'_i(t) = \Phi_i(t)\Phi'_i(0)$$

Buradan

$$\Phi'_i(0) = \frac{\Phi'_i(t)}{\Phi_i(t)} = [\ln(\Phi_i(t))]'$$

Bu ifade $[\,0, t]$ aralığında integrallenirse,

$$\ln \Phi_i(t) - \ln \Phi_i(0) = \Phi'_i(0)t \text{-} \Phi'_i(0)t$$

$$\ln \Phi_i(t) = \Phi'_i(0)t \qquad \text{veya} \qquad \Phi_i(t) = e^{\Phi'_i(0)t}.$$

$$F_i(t) = 1 - e^{\Phi'_i(0)t} \qquad \text{ve}$$

$$\theta_i = -\Phi'_i(0)$$

alındığında

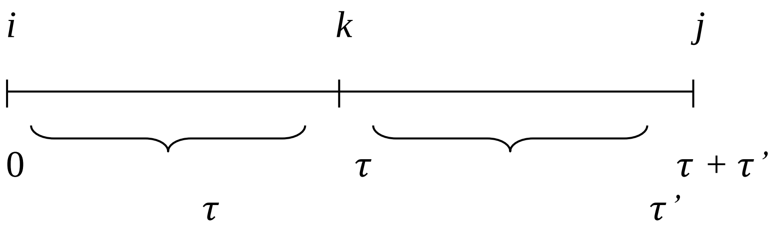
$$F_i(t) = 1 - e^{-t\theta_i}, \qquad t > 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Markov sürecinin $i.$ durumda kalma süresinin üstel dağılıma uyduğu görülür. Ayrıca beklenen değer ve varyans şöyledir.

$$E(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i} \qquad \text{ve} \qquad V(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i^2}$$

Kolmogorov Denklemleri

$t' \geq 0$ ve $t \geq 0$ birbirini izleyen iki zaman aralığı olsun. Ayrıca $\forall\, i, k, j \in E$ olsun



$t + t'$ zaman aralığında i durumundan j durumuna geçiş olasılığı toplam olasılık formülüne göre

$$p_{ij}(t+t') = \sum_{k \in E} P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i) = \frac{P(X_{t+t'} = j, X_t = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$
$$= P(X_{t+t'} = j / X_0 = i\,, X_t = k) P(X_t = k / X_0 = i)$$

Belleksizlik özelliğinden,

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$
$$= P(X_{t+t'} = j / X_t = k) P(X_t = k / X_0 = i)$$
$$= p_{ik}(t) p_{kj}(t')$$

$$p_{ij}(t+t') = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p_{kj}(t') \qquad (\,*\,)$$

Bu denklemin t' - e göre türevi alınıp t'=0 yazılırsa,

$$p_{ij}{}'(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p'_{kj}(0) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) a_{kj} \qquad (1)$$

Benzer olarak (*) denkleminin t ye e göre türevi alınıp t=0 yazılırsa,

$$p'_{ij}(t') = \sum_{k \in E} a_{ik} p_{kj}(t') \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerine sırasıyla Kolmogorov'un *ileriye* ve *geriye doğru diferansiyel denklemleri* denilir. (1) denkleminde başlangıç durumu dikkate alınmadığında

$$\boldsymbol{p_j{}'(t) = \sum_{k\in E} p_k(t) a_{kj}}\,, \qquad \textbf{(3)}$$

elde edilir.

Limit Dağılımı.

Sürekli parametreli Markov zinciri indirgenemez ise $t \to \infty$ için geçiş olasılıkları sabit bir değere yaklaşır. Bu sabit olasılık başlangıç durumuna bağlı değildir. $\forall_i$ için

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$$

Bu limit durumuna denge durumu (steady-state) denir. Elemanları

p_j , $j = 0, 1, 2, \ldots$ olan vektörü P ile gösterelim. Buna göre

$P = [p_0, p_1, \ldots]$ olur. P ye limit dağılımı ya da limit olasılık dağılımı denir. (3) ifadesinin her iki yanının t ye göre limitini alıp

$$\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) a_{kj} \quad ,$$

$$\sum_k p_k a_{kj} = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik kuyruk modellerinin kurulmasında temel bir ifadedir.