

Kuyruk Teorisi(Y. L.)

5. Hafta

Sürekli parametrelili Markov zincirleri

Tanım. $\{X_t, t \geq 0\}$, durum uzayı $E = \{0,1, \dots\}$ olan sürekli parametrelili bir süreç olsun. Aşağıdaki özellik geçerli olduğunda bu süreç sürekli parametrelili Markov zinciri denir. Her bir

ve $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t$ ve $n_1, \dots, n_k \in E$ için

$$P(X_t = j / X_{t_1} = n_1, \dots, X_{t_k} = n_k) = P(X_t = j / X_{t_k} = n_k) \quad (1)$$

$t > t'$ için

$$P(X_t = j / X_u, u \leq t') = P(X_t = j / X_{t'}) \quad (2)$$

Yukarıdaki her iki eşitliği de Markov özelliği denir. Bu tanıma göre Markov sürecinin herhangi bir t anında durumu belli olduğunda bunun geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

$p_{ij}(t) = P(X_{t+t'} = j / X_t = i)$ ifadesinin anlamı t' anında i durumunda olan sürecin $t + t'$ anında j - durumunda olması olasılığıdır. Özel olarak $t' = 0$ alındığında

$$p_{ij}(t) = P(X_{t'} = j / X_0 = i) \quad (3)$$

$\{X_t, t \geq 0\}$ süreci homojen süreç olarak adlandırılır. (3) olasılığına i durumundan j durumuna geçiş olasılığı denir. Bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall i, j \in E$ için

$$p_j(t) = P(X_t = j), \quad p_j(t) \geq 0, \quad p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$$

Kabul edelim ki ,

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (4)$$

Varsayalım ki ,

$$a_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

türevleri mevcuttur. a_{ii} 'ye i durumunda kalma oranı , $a_{ij}(i \neq j)$ ' ye ise i durumundan j durumuna geçiş oranı denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- 1) $i \neq j$ için $a_{ij} \geq 0$
- 2) $i = j$ için $a_{ii} \leq 0$
- 3) $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$

İspat.

$$\begin{aligned} 1) \quad i \neq j \text{ için} \quad a_{ij} &= p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \end{aligned}$$

Buradan $p_{ij}(h) = a_{ij}h + o(h)$ bulunur. $p_{ij}(h)$ 0 ile 1 arasında olduğundan $a_{ij} \geq 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} 2) \quad i = j \text{ için} \quad a_{ii} &= p'_{ii}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

$p_{ii}(h)$ yine 0 ile 1 arasında olduğundan $a_{ii} \leq 0$ bulunur.

$$3) \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1$$

Eşitliğin t -ye göre türevi alınıp

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}'(t) = 0 \quad \text{ise}$$

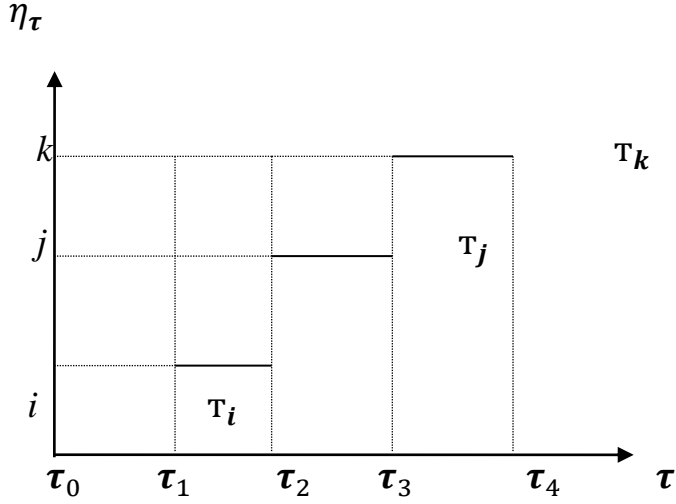
Daha sonra $t = 0$ alınırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}'(0) = a_{ij} = 0.$$

Elde edilir.

Teorem. τ_i Markov zincirinin i durumunda kalma süresi olsun. Bu takdirde τ_i üstel dağılıma sahiptir.

İspat. t_1, t_2, \dots ler durum değiştirme anları olsun.



Şekil 1

$P(\tau_i > t + s / \tau_i > s)$ olasılığını göz önüne alalım. Markov zincirlerinin belleksizlik özelliğinden dolayı

$$P(\tau_i > t + s / \tau_i > s) = P(\tau_i > t) \quad (6)$$

ve koşullu olasılıktan dolayı

$$\begin{aligned} P(\tau_i > t + s / \tau_i > s) &= \frac{P((\tau_i > t + s) \cap (\tau_i > s))}{P(\tau_i > s)} \\ &= \frac{P(\tau_i > t + s)}{P(\tau_i > s)} \end{aligned}$$

Yukarıda verilen bu iki denklemi birbirine eşitlersek

$$P(\tau_i > t + s) = P(\tau_i > t) P(\tau_i > s)$$

denklemini elde edilir. $F_i(t) = P(\tau_i \leq t)$ ve $\Phi_i(t) = P(\tau_i > t)$ alalım. Yukarıdaki denklem

$$\Phi_i(t)\Phi_i(s) = \Phi_i(t+s).$$

$\Phi_i(t+s)$ fonksiyonu türevlenebilir olsun.

$$\begin{aligned}\Phi_i(t+s) - \Phi_i(t) &= \Phi_i(t)\Phi_i(s) - \Phi_i(t) \\ &= \Phi_i(t)(\Phi_i(s) - 1).\end{aligned}$$

Bu eşitlik s ye bölüp limite geçilirse

$$= \Phi_i(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\Phi_i(s)-1)}{s}$$

$$\Phi_i(0) = 1 - P(\tau_i < 0) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1$$

$$\Phi'_i(t) = \Phi_i(t)\Phi'_i(0)$$

Buradan

$$\Phi'_i(0) = \frac{\Phi'_i(t)}{\Phi_i(t)} = [\ln(\Phi_i(t))]'$$

Bu ifade $[0, t]$ aralığında integrallenirse,

$$\ln \Phi_i(t) - \ln \Phi_i(0) = \Phi'_i(0)t - \Phi'_i(0)t$$

$$\ln \Phi_i(t) = \Phi'_i(0)t \quad \text{veya} \quad \Phi_i(t) = e^{\Phi'_i(0)t}.$$

$$F_i(t) = 1 - e^{\Phi'_i(0)t} \quad \text{ve}$$

$$\theta_i = -\Phi'_i(0)$$

alındığında

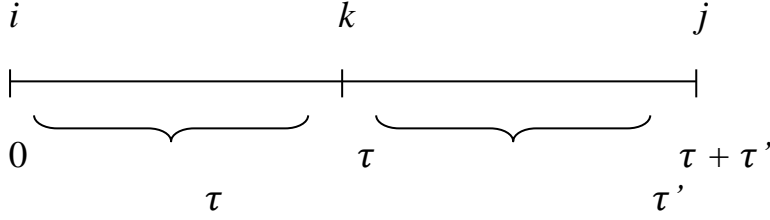
$$F_i(t) = 1 - e^{-t\theta_i}, \quad t > 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Markov sürecinin i . durumda kalma süresinin üstel dağılıma uyduğu görülür. Ayrıca beklenen değer ve varyans şöyledir.

$$E(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i} \quad \text{ve} \quad V(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i^2}$$

Kolmogorov Denklemleri

$t' \geq 0$ ve $t \geq 0$ birbirini izleyen iki zaman aralığı olsun. Ayrıca $\forall i, k, j \in E$ olsun



$t + t'$ zaman aralığında i durumundan j durumuna geçiş olasılığı toplam olasılık formülüne göre

$$p_{ij}(t + t') = \sum_{k \in E} P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i) = \frac{P(X_{t+t'} = j, X_t = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$

$$= P(X_{t+t'} = j / X_0 = i, X_t = k) P(X_t = k / X_0 = i)$$

Belleksizlik özelliğinden,

$$P(X_{t+t'} = j, X_t = k / X_0 = i)$$

$$= P(X_{t+t'} = j / X_t = k) P(X_t = k / X_0 = i)$$

$$= p_{ik}(t) p_{kj}(t')$$

$$p_{ij}(t + t') = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p_{kj}(t') \quad (*)$$

Bu denklemin t' - e göre türevi alınıp $t'=0$ yazılırsa,

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p'_{kj}(0) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) a_{kj} \quad (1)$$

Benzer olarak $(*)$ denkleminin t ye e göre türevi alınıp $t=0$ yazılırsa,

$$p'_{ij}(t') = \sum_{k \in E} a_{ik} p_{kj}(t') \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerine sırasıyla Kolmogorov'un *ileriye* ve *geriye doğru diferansiyel denklemleri* denilir. (1) denkleminde başlangıç durumu dikkate alınmadığında

$$p_j'(t) = \sum_{k \in E} p_k(t) a_{kj}, \quad (3)$$

elde edilir.

Limit Dağılımı.

Sürekli parametrelili Markov zinciri indirgenemez ise $t \rightarrow \infty$ için geçiş olasılıkları sabit bir değere yaklaşır. Bu sabit olasılık başlangıç durumuna bağlı değildir. \forall_i için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j$$

Bu limit durumuna denge durumu (steady-state) denir. Elemanları

p_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ olan vektörü P ile gösterelim. Buna göre

$P = [p_0, p_1, \dots]$ olur. P ye limit dağılımı ya da limit olasılık dağılımı denir. (3) ifadesinin her iki yanının t ye göre limitini alıp

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p'_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ik}(t) a_{kj},$$
$$\sum_k p_k a_{kj} = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik kuyruk modellerinin kurulmasında temel bir ifadedir.