5.1. Kesikli Dağılımlar

5.1.1. Bernoulli Dağılımı

Önceki bölümlerdeki olasılık problemleri göz önüne alındığında her zaman istenen bir durum veya olayın olasılığından bahsetmek mümkündür. Eğer bir deney için başarılı ve başarısız olmak üzere iki sonuç ortaya çıkıyor ve bu deney aynı şartlar altında tekrarlanabiliyor ise bu deneye James Bernoulli'den dolayı Bernoulli denemesi denir. Bernoulli denemesi kesikli dağılımların temeli niteliğindedir.

Tanım 5.1. Bir tesadüfi deneme iki ayrık sonuçtan birisine sahip ise, bu denemeye Bernoulli denemesi denir. Bernoulli denemesinin sonuçları başarılı başarısız; sağlam bozuk veya istenen istenmeyen olarak ifade edilir. Bernoulli dememesine ait tesadüfi değişken başarılı sonuçta "1", başarısız sonuçta "0" değerini alır. Bu bağlamda Bernoulli tesadüfi değişkeni,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{deneme başarılı ise} \\ 0, & \text{deneme başarısız ise} \end{cases}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 5.2. X Bernoulli tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = p_X(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & d.d. \end{cases} \qquad (5.1)$$

biçimindedir. X tesadüfi değişkenine Bernoulli dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Bernoulli(p)$ ile gösterilir. Burada p, dağılımın parametresi olup başarı olasılığını ve $q = 1 - p$ başarısızlık olasılığını ifade eder. Bernoulli denemesine ait birkaç örnek aşağıda verilmektedir.

1) Hilesiz madeni paranın bir kez havaya atılması denemesi.

2) İçinde m tane kırmızı ve n tane beyaz bilye bulunan bir kavanozdan tesadüfi bir bilye çekilmesi.

3) Bir futbol maçında kullanılan her bir penaltı atışı.

4) Özdeş ve aynı yaşam süresine sahip cihazların belli bir zamandan daha fazla yaşaması

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \sum_{D_X} xP(X = x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xp^x(1-p)^{1-x} = p$$

$$E(X^2) = \sum_{D_X} x^2 P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x (1-p)^{1-x} = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = p - p^2 = pq$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = \sum_{D_X} e^{tx} P(X = x)$$

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x q^{1-x} = q + pe^t$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = \sum_{D_X} s^x P(X = x)$$

$$g_X(s) = \sum_{x=0}^{1} s^x p^x q^{1-x} = q + ps$$

Örnek 5.1: Bir Bernoulli denemesinin ardışık olarak üç defa başarısızlıkla sonuçlanması olasılığı binde 216 olarak hesaplanmıştır. Buna göre Bernoulli denemesine ait tesadüfi değişkenin varyansını bulunuz?

Çözüm. A: "Bernoulli denemesinin ardışık üç defa başarısız olması" olayı iken

$$P(A) = (1-p)^3 = 0{,}216, \ p = 0{,}4 \ \text{ve}$$

$$Var(X) = p(1-p) = 0{,}4.0{,}6 = 0{,}24$$

olarak hesaplanır..

Örnek 5.2: X Bernoulli tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$p_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{1-x} & , \quad x = 0, 1 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

olsun. $g(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $E\big(g(X)\big) = 0$ olması için $g(0) = g(1) = 0$ olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} E\big(g(X)\big) &= \sum_{x=0}^{1} g(x) \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{1-x} = 0 \\ &= g(0)\left(1 - \frac{1}{5}\right) + g(1)\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)[g(1) - g(0)] + g(0) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanması için $g(0) = g(1) = 0$ olması gerekir.

5.1.2. Binom Dağılımı

Ardışık olarak bağımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığını göz önüne alalım. Yapılan bu denemeler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Her denemenin başarılı ve başarısız gibi iki sonucu vardır.

2) Her bir deneme için başarı olasılığı p ve başarısızlık olasılığı

$q = 1 - p$ değişmez.

3) Deneme sayısı sabit olup denemeler tekrarlanabilir.

Binom tesadüfi değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.2. X tesadüfi değişkeni n tane bağımsız Bernoulli denemesinin başarılı olanlarının toplam sayısı olsun. Yani $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i \sim Bernoulli(p)$ ve $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ olmak üzere X tesadüfi değişkenine binom tesadüfi değişkeni denir ve olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases} \tag{5.2}$$

biçimindedir. $X \sim Binom(n, p)$ ile gösterilir. Burada n ve p dağılıma ait parametrelerdir.

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \sum_{D_X} xP(X = x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} q^{n-1-(x-1)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

$$E(X^2) = \sum_{D_X} x^2 P(X = x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} (x(x-1) + x) \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)n!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} p^2 q^{(n-2)-(x-2)} + np$$

$$= p^2 n(n-1) \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{(x-2)} q^{(n-2)-(x-2)} + np$$

$$= p^2 n(n-1)(p+q)^{n-2} + np$$

$$= p^2 n(n-1) + np$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$Var(X) = p^2 n(n-1) + (np)^2 = npq$$

olarak bulunur.

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{D_X} e^{tx} P(X=x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x q^{n-x} \\ &= (e^t p + q)^n \end{aligned}$$

Beklenen değer ve varyans momentler cinsinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} M'_X(0) &= E(X) &&= np \\ M''_X(0) &= E(X^2) &&= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}$$

$$Var(X) = npq$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$\begin{aligned} g_X(s) &= \sum_{D_X} s^x P(X=x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} s^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (sp)^x q^{n-x} = (q+sp)^n \end{aligned}$$

Örnek 5.3: Her biri 10 puan olan 10 soruluk bir test sınavında 4 seçenek mevcuttur. Yanlış cevap doğru cevabı götürmüyor. Buna göre sınava giren bir öğrenci cevapları rastgele işaretlediğinde öğrencinin,

a) 50 puan almaolasılığı nedir?

b) En az 30 puan alma olasılığı nedir?

c) En çok 90 puan alma olasılığı nedir?

d) Tam not alma olasılığı nedir?

e) 70 ile 80 arasında puan alma olasılığı nedir?

f) Hiçbir soruya doğru cevap verememe olasılığı nedir?

Çözüm.

$$p = \frac{1}{4}, \qquad q = \frac{3}{4}$$

a) 50 puan alması için 5 soruya doğru cevap vermesi gerekmektedir. Yani,

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}0584$$

b) En az 30 puan alması için en az 3 soruya doğru cevap vermesi gerekir.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \\ &= 0{,}4744 \end{aligned}$$

a) En çok 90 puan alması için en fazla 9 soruya doğru cevap vermiş olması gerekir.

$$\begin{aligned} P(X \leq 9) &= 1 - P(X > 9) \\ &= 1 - P(X = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 0{,}9999 \end{aligned}$$

d) Tam puan alması için tüm sorulara doğru cevap vermiş olması gerekir.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0{,}0001$$

e) 70 ile 80 arasında not alması için istenen olasılık:

$$\begin{aligned} P(7 \leq X \leq 8) &= P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= \binom{10}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^{7} \left(\frac{3}{4}\right)^{3} + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{2} \\ &= 0{,}0034 \end{aligned}$$

f) Hiç doğru işaretleme yapmama olasılığı ise,

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}0563$$

Örnek 5.4: Bir torbada 15 kırmızı, 5 beyaz bilye vardır. İadeli olarak 3 bilye çekiliyor. X tesadüfi değişkeni çekilen kırmızı bilye sayısını, Y tesadüfi değişkeni ise beyaz bilye sayısını göstersin. Buna göre:

a) 1 kırmızı 2 beyaz bilye çekilme olasılığı nedir?

b) En az bir tane kırmızı bilye çekilme olasılığı nedir?

c) $P(|X| \leq 1 | X < 3)$ olasılığını hesaplayınız.

d) DK_X (değişim katsayısı) nedir?.

e) X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

f) Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. $X \sim Binom(3, 3/4)$, $Y \sim Binom(3, 1/4)$ olmak üzere,

a)

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^{1} \left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{9}{64}$$

veya,

$$P(Y = 2) = P(X = 1) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{1} = \frac{9}{64}$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\
&= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(|X| \leq 1 | X < 3) &= \frac{P((-1 \leq X \leq 1) \cap (X < 3))}{P(X < 3)} \\
&= \frac{P(0 \leq X \leq 1)}{1 - P(X = 3)} \\
&= \frac{(P(X = 0) + P(X = 1))}{1 - \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{64} + \frac{9}{64}\right)}{1 - \frac{27}{64}} = \frac{10}{37}
\end{aligned}
$$

d)

$$
DK_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}100 \tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= npq \\
&= 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \\
E(X) &= np \\
&= 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \\
DK_X &= 0.3333
\end{aligned}
$$

oranında bir değişim söz konusudur.

e) X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= (q + pe^t)^n \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^t\right)^3
\end{aligned}
$$

f) Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
g_Y(s) &= (q + ps)^n \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)^3, \quad |s| \leq 1
\end{aligned}
$$