4.1.3. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım 4.3. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X sürekli tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun, $\forall\, x \in D_X$ olmak üzere,

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{4.7}$$

$f_X(x)$ fonksiyonuna, X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) denir. X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ her yerde türevlenebilir ise,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{4.8}$$

$f_X(x)$'e olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri birbirine denktir.

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Özellikleri

1) $f_X(x) \ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3) $P(x_1 < X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

4) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds$

özelliklerini sağlar.

Örnek 4.2: X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda veriliyor.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0\,, & d.d. \end{cases}$$

a) X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) Dağılım fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki olasılıkları bulunuz.
$P(0{,}20 < X \le 0{,}80)$, $P(X \le 0{,}75)$, $P(X > 0{,}35)$

Çözüm. a)

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\, ds$$

$$F_X(x) = \int_0^x 2s\, ds = x^2$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a)

$$P(0{,}20 < X \leq 0{,}80) = F_X(0{,}80) - F_X(0{,}20) = 0{,}60$$

$$P(X \leq 0{,}75) = F_X(0{,}75) = 0{,}5625$$

$$P(X > 0{,}35) = 1 - P(X \leq 0{,}35) = 0{,}8775$$

Örnek 4.3: Sürekli X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{k} & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{d. d.} \end{cases}$$

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X > 1/2)$, $P(X \leq 3/2)$ ve $P(1/2 < X < 3/2)$ olasılıklarını,

i) Olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre bulunuz.

ii) Dağılım fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.

a) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun 2. özelliğinden,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx}_{0} + \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx + \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{0} = 1$$

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{k}\right) dx + \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{k}\right) dx = 1 \Rightarrow k = 3$$

b) Olasılık yoğunluk fonksiyonunun 4. özelliğinden

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x/3 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ (2x-1)/3 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

c) **i)** Olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla,

$$P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{3} dx = \frac{5}{6}$$

$$P(X \leq 3/2) = \int_{0}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_{1}^{3/2} \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}$$

$$P(1/2 < X < 3/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3} dx + \int_{1}^{3/2} \frac{2}{3} dx = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

ii) Dağılım fonksiyonu yardımıyla

$$P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = \frac{5}{6}$$

$$P(X \leq 3/2) = F_X(3/2) = \frac{2}{3}$$

$$P(1/2 < X < 3/2) = F_X(3/2) - F_X(1/2) = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.4: X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a) $F_X(x)$'i bulunuz.

b) $F_X(x)$ yardımıyla $P(X \leq 50)$, $P(50 < X < 100)$ ve $P(X < 100)$ olasılıklarını bulunuz.

***Çözüm*.**

a)

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

o.y.f.'nun son özelliğinden,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x se^{-\frac{s^2}{2}} ds = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x \to \infty \end{cases}$$

b)

$$P(X \leq 50) = F_X(50) = 1 - e^{-1250}$$

$$P(50 < X < 100) = F_X(100) - F_X(50) = e^{-1250} - e^{-5000}$$

$$P(100 < X) = 1 - P(X \leq 100) = e^{-5000}$$

olarak elde edilir.

4.1.4. Olasılık Fonksiyonu

Tanım 4.4. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve X kesikli tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun, $\forall\, x \in D_X$ olmak üzere, X tesadüfi değişkeninin D_X'deki değerleri alma olasılıklarını gösteren fonksiyona olasılık fonksiyonu denir ve $p_X(x)$ ile gösterilir. Yani,

$$p_X(x) = P(X = x)$$

olur.

Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

1) Eğer $x \notin D_X$ ise $p_X(x) = 0$,

2) $\forall\, x \in D_X$ ise $0 \leq p_X(x) \leq 1$,

3) $\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$,

4) $F_X(x) = \sum_{n \leq x} p_X(n)$

biçimindedir.

Örnek 4.5: X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda veriliyor.

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{17220}, & 1 \leq x \leq 20;\ x \in \mathbb{Z}^+ \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

a) Dağılım fonksiyonunu bulunuz?

b) Dağılım fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

$$P(10 < X \leq 19), \quad P(X \leq 11), \quad P(X \geq 13)$$

Çözüm. **a)** $F_X(x) = \sum_{n=0}^{x} p(n)$

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{n^2}{17220} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{17220}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{17220} & , 1 \leq x \leq 20 \,;\ x \in \mathbb{Z}^+ \\ 1 & , \quad x \geq 13 \end{cases}$$

b) $$P(10 < X \leq 19) = F_X(19) - F_X(10) = 0{,}72$$

$$P(X \leq 11) = F_X(11) = 0{,}13414$$

$$P(X \geq 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - P(X \leq 12) = 0{,}22648$$

Örnek 4.6: X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$p_X(x) = \begin{cases} k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} & , \quad x = 1, 2, \ldots \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(5 < X)$, $P(10 \leq X \leq 100)$ ve $P(X \leq 23)$ olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

a)

$$\sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1$$

ve geometrik seri olduğundan,

$$\sum_{x=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = k\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

bulunur.

b) Olasılık fonksiyonunun özelliklerinden

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n=1}^{x} \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right]}{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)\right]} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x} & , \quad x = 1,2,3,\ldots \\ 1 & , \quad x \to \infty \end{cases}$$

c) $$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

$$P(10 \leq X \leq 100) = F_X(100) - F_X(10) = \left(\frac{2}{3}\right)^{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

$$P(X \leq 23) = F_X(23) = \left(\frac{2}{3}\right)^{23}$$

Örnek 4.7: Bir torbada 5 beyaz, 10 kırmızı bilye vardır.

a) İadeli olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde X tesadüfi değişkeni beyaz bilyelerin sayısını göstermek üzere X'in olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

b) İadesiz olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde Y tesadüfi değişkeni kırmızı bilyelerin sayısını göstersin. Bu durumda Y'nin olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.

a) İadeli çekim yapıldığında X tesadüfi değişkeni beyaz bilyelerin sayısını göstermek üzere X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & , x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

veya

$X = x$	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdadır:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{8}{27}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{20}{27}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{26}{27}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

b) İadesiz olarak ardı ardına üç bilye çekildiğinde Y tesadüfi değişkeni kırmızı bilyelerin sayısını göstersin ve bunun olasılık fonksiyonu $p_Y(y) = P(Y = y)$ aşağıdadır:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{y}\binom{5}{3-y}}{\binom{15}{3}}, & y = 0,1,2,3 \text{ için} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

veya,

$Y = y$	0	1	2	3
$p_Y(y)$	$\frac{10}{455}$	$\frac{100}{455}$	$\frac{225}{455}$	$\frac{120}{455}$

Y tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdadır:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 10/455, & 0 \leq y < 1 \\ 110/455, & 1 \leq y < 2 \\ 335/455, & 2 \leq y < 3 \\ 1, & y \geq 3 \end{cases}$$