

Toplam Olasılık Formülü

Tanım 3.16. (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayı olsun. Ω örnek uzayının sonlu sayıda karşılıklı ayık olayların birleşimi şeklinde gösterilmesine Ω 'nın parçalanışı denir.

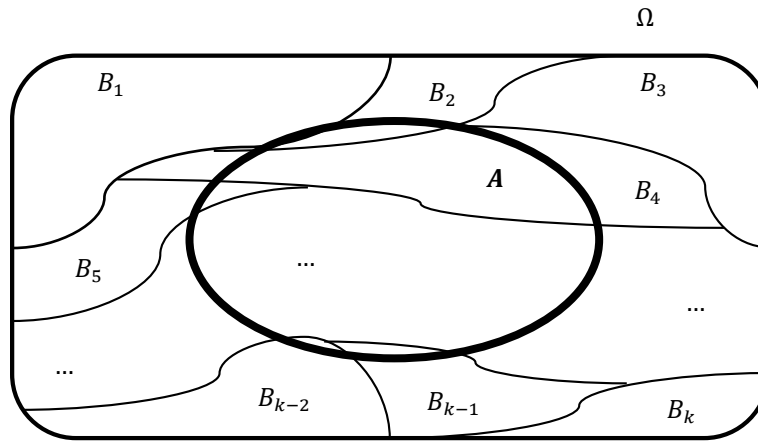
$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k; \quad i \neq j \text{ ve } B_i \cap B_j = \emptyset$$

Teorem 3.14. B_1, B_2, \dots, B_k 'lar Ω örnek uzayının parçalanması ise Ω 'daki herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) P(A|B_i) \quad (3.29)$$

dır.

İspat.



Şekil 3.1 Ω 'nın bir parçalanışı

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k) \end{aligned}$$

yazılır, buradan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_k)P(A|B_k) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i) P(A|B_i) \end{aligned}$$

olur. Bu olasılık formülü tam veya toplam olasılık formülü olarak adlandırılır.

Örnek 3.21: Bir üniversitede İstatistik Bölümü 4. sınıfta 80 öğrenci bulunmaktadır. Bu 80 öğrencinin dışında 10 öğrenci ise uzatmalıdır. Daha önceki senelerden biliniyor ki uzatan öğrencilerin yarısı ve 4. sınıf öğrencilerinin %60'ı mezun olabilmektedir. Bu bilgilere göre yıl sonunda herhangi bir öğrencinin mezun olma olasılığı kaçtır?

Çözüm. A : “Öğrencinin mezun olması”

B_1 : “Seçilen öğrencinin 4. sınıf öğrencisi olması”

B_2 : “Seçilen öğrencinin uzatmalı öğrenci olması”

olaylarını tanımlayalım. Bu takdirde

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{80}{90} \cdot \frac{60}{100} + \frac{10}{90} \cdot \frac{50}{100} = \frac{53}{90} = 0,5888$$

bulunur.

3.6. Bayes Teoremi

Bayes Teoreminin temeli koşullu olasılığa dayanmaktadır. Bu bağlamda aşağıdaki teorem veriliyor.

Teorem 3.15. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayındaki $\forall B_j \in \mathfrak{F}$ olayları, Ω örnek uzayının bir parçalanışı olsun. A , Ω içinde $P(A) \neq 0$ olacak şekilde bir olay ise:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_k)P(A|B_k)} \quad (3.30)$$

olarak verilir, bu teoreme Bayes teoremi denir.

Örnek 3.22: Kumaş üreten bir işletmede toplam üretimin %35'ini M_1 , %25'ni M_2 ve %40'nı M_3 makinesi üretmektedir. Bu makinelerin ürettiği bir top kumaşın kusurlu olma olasılıkları sırası ile %1, %3 ve %2'dir. Bir günlük üretimin sonunda bir top kumaş seçiliyor ve kusurlu olup olmadığına bakılıyor. Kumaş kusurlu ise, M_1 makinesinde üretilmiş olma olasılığı nedir?

Çözüm. Aşağıdaki olaylar şöyle tanımlanıyor.

A : “Seçilen kumaşın kusurlu olması”

B_1 : “Kumaşın M_1 makinesinde üretilmesi”

B_2 : “Kumaşın M_2 makinesinde üretilmesi”

B_3 : “Kumaşın M_3 makinesinde üretilmesi”

Bu takdirde aranan olasılık Bayes Teoremi gereğince

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$= \frac{0,35 \cdot 0,01}{0,35 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,02} = 0,18$$

Örnek 3.23: Bir sınıfta 90 öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrencilerin Matematik, Fizik ve Kimya derslerindeki başarı ve başarısızlık durumları aşağıdaki tabloda veriliyor.

	Matematik			
	Başarılı		Başarısız	
	Kimya		Kimya	
Fizik	Başarılı	Başarısız	Başarılı	Başarısız
Başarılı	10	12	14	12
Başarısız	15	9	11	7

Bu sınıftan tesadüfi seçilen bir öğrencinin;

- a) Matematikten başarılı olduğu bilindiğine göre Fizikten de başarılı olma olasılığı nedir?
- b) En az bir dersten başarılı olma olasılığı nedir?
- c) Fizik veya Kimyadan başarısız olma olasılığı nedir?
- d) Hiçbir dersten başarılı olamama olasılığı nedir?

Çözüm. Tesadüfi seçilen öğrencinin Matematik, Fizik ve Kimya derslerinden başarılı / başarısız olma olaylarını sırasıyla $M/\bar{M}, F/\bar{F}, K/\bar{K}$ ile gösterelim. Buna göre,

- a) Matematikten başarılı olduğu bilindiğinde Fizikten başarılı olma olasılığı

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}, P(M) \neq 0$$

olup,

$$P(M) = \frac{46}{90}, P(F \cap M) = \frac{22}{90}$$

olduğundan

$$P(F|M) = \frac{22}{46} = \frac{11}{23}$$

bulunur.

- b) En az bir dersten başarılı olma olasılığı

$$P(M \cup F \cup K) = P(M) + P(F) + P(K) - P(F \cap M) - P(M \cap K) - P(F \cap K) + P(M \cap F \cap K)$$

$$P(M \cup F \cup K) = \frac{46}{90} + \frac{48}{90} + \frac{50}{90} - \frac{22}{90} - \frac{25}{90} - \frac{24}{90} + \frac{10}{90} = \frac{83}{90}$$

elde edilir.

- a) Fizik veya Kimyadan başarısız olma olasılığı

$$P(\bar{F} \cup \bar{K}) = P(\bar{F}) + P(\bar{K}) - P(\bar{F} \cap \bar{K}) = \frac{42 + 40 - 16}{90} = \frac{11}{15}$$

- d) Hiçbir dersten başarılı olmama olasılığı ise

$$P(\bar{M} \cap \bar{F} \cap \bar{K}) = \frac{7}{90}$$

ile bulunur.

Örnek 3.24: 3 adet benzer torba vardır. I. torbada b_1 tane beyaz k_1 tane kırmızı; II. torbada b_2 tane beyaz k_2 tane kırmızı; III. torbada ise yalnızca kırmızı top vardır. Tesadüfi olarak seçilen bir torbadan, tesadüfi olarak bir top çekildiğinde bu topun kırmızı olduğu biliniyor iken III. torbadan çekilmiş olma olasılığı nedir?

Çözüm. Aşağıdaki olayları tanımlayalım:

K : “kırmızı top çekilmesi olayı”

T_1 : “I. torbanın seçilmesi”

T_2 : “II. torbanın seçilmesi”

T_3 : “III. torbanın seçilmesi”

$$P(T_1) = P(T_2) = P(T_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(K|T_1) = \frac{k_1}{k_1 + b_1}, \quad P(K|T_2) = \frac{k_2}{k_2 + b_2}, \quad P(K|T_3) = 1$$

Toplam olasılık formülüne göre,

$$\begin{aligned} P(K) &= P(T_1)P(K|T_1) + P(T_2)P(K|T_2) + P(T_3)P(K|T_3) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{k_1}{k_1 + b_1} + \frac{k_2}{k_2 + b_2} + 1 \right) \end{aligned}$$