Buna göre aradığımız k-sayısı; eşitliğini sağla-

$F(k)=0,05 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}} \int_0^k t^{-1/2} e^{-t/10} dt = 0,05$

yan k-sayısı olacaktır. Böylece çekilen $n=10$ birimlik örnekle

$Y=\sum_{i=1}^{10} X_i \leq k$ olursa $H_0$-hipotezi retedilir.

## 7. Bileşik Hipotezlerin Testi

$H_0$ ve $H_1$ hipotezleri basit hipotezler olduğunda en iyi test Neyman–
Pearson teoremi ile sağlanabilmektedir. Ancak; $H_0$ ve $H_1$ hipotezlerinden
birisinin veya her ikisinin bileşik hipotez olması durumunda
en iyi testi belirlemek için bu teorem geçerli değildir. Buna
rağmen $H_0$ basit hipotezken $H_1$-in bileşik hipotez olması durumun-
da en iyi testi belirleme durumuna Neyman–Pearson teoremi
genelleştirilebilir.

$H_0: \theta=\theta_0$ basit hipotezine karşı test edeceğimiz bileşik
hipotez ($H_1$) $\theta$ ya bağlı olduğu için $\theta$ nın belirli bir $\theta_i$ değe-
ri göz önüne alınır. Bu takdirde $H_0: \theta=\theta_0$ ; $H_1: \theta=\theta_i$ ba-
sit hipotezine Neyman-Pearson teoremi uygulanarak bir test
belirlenebilir. Böylece her $\theta_i \in H_1$ parametre değerine
karşılık $C_i$ gibi bir kritik bölge bulunur. Genellikle bu $C_i$
kritik bölgeleri farklıdır. Eğer bu kritik bölgeler aynı ise
o zaman bu kritik bölgeye yeni bir isim verilir.

<u>Tanım</u>: $H_0$ hipotezine karşı (basit hipotez), $H_1$'in her bir basit
hipotezini test ederken bulunan ve anlamlılık seviyesi $\alpha$
olan en iyi kritik bölge C'ye bu testin Uniformly most
powerfull (düzgün en güçlü-UMP) kritik bölgesi denir. Bu
kritik bölgenin belirlediği teste de $\alpha$ önem seviye-
sinde bir UMP testi (düzgün en güçlü test) denir.

*UMP testi her zaman bulunamaz.

*C-kritik bölgesinin tanımladığı bir UMP testi varsa, bu testin gücü diğer bütün testlerin gücünden büyüktür.

*UMP testinin güç eğrisi, diğer bütün testlerin güç eğrilerinin üstünde yer alır.

ÖRNEK $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin ve $\sigma^2$ biliniyor olsun.

a) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ b) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ c) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

hipotez grupları için bir UMP testi bulunup bulunamıyacağını gösteriniz?

ÇÖZÜM $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından rastgele çekilen n-birimlik bir örnek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Bu takdirde $i = 1, 2, \ldots, n$ için $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve bağımsızdır. Bu örneklemin olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

şeklindedir.

a) $H_0: \mu \leq \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ $\Big\} \Rightarrow$ Neyman-Pearson yöntemini uygulayalım. $k>0$, $\mu_1 > \mu_0$ ve önem seviyesi $\alpha$ olmak üzere;

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\right]\right\} \leq k$$

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i + n\mu_0^2 - \cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + 2\mu_1\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu_1^2\right]\right\} \leq k$$

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i + n(\mu_0^2-\mu_1^2)\right]\right\} \leq k$$

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \leq k$$

Bu eşitsizlikte her iki tarafın Ln'i alınırsa

$$-\frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \le \ln k \Rightarrow$$

$$-\frac{(\mu_1-\mu_0)}{\sigma^2}\Sigma x_i \le \ln k - \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \Rightarrow$$

$$-\Sigma x_i \le \frac{\sigma^2 \ln k}{(\mu_1-\mu_0)} - \frac{n(\mu_1-\mu_0)(\mu_1+\mu_0)}{2\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{(\mu_1-\mu_0)} \Rightarrow$$

$$-n\bar{x} \le \frac{\sigma^2 \ln k}{(\mu_1-\mu_0)} - \frac{n(\mu_1+\mu_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{x} \geq \frac{\sigma^2 \ln k}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{(\mu_1+\mu_0)}{2} \Rightarrow L_2 = \frac{\sigma^2 \ln k}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{(\mu_1+\mu_0)}{2} \quad \text{...(1)}$$

dersek, $\bar{x} \geq L_2$ elde edilir. O halde $\alpha$-önem seviyesi için $P(\bar{x} \geq L_2) = \alpha$ olacak şekilde $L_2$ kritik sınır değeri bulunmalıdır. $H_0$-doğru iken $\bar{x} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ olup $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ olduğu dikkate alınırsa;

$$P(\bar{x} \geq L_2) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{L_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow$$

$$1-P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$\Phi\left[\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right] = 1-\alpha$ elde edilir. Buna göre $\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma} = Z_{1-\alpha}$

$$\Rightarrow L_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \quad \text{...(2)}$$ sınır değeri elde edilir.

Böylece testin $\alpha$-önem seviyesinde en iyi kritik bölgesi $C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \bar{x} > L_2\}$ elde edilir.

Şimdi $\mu_0$ dan büyük ve $\mu_1$ den farklı bir başka $\mu_2$ değeri için $\alpha$ önem seviyesindeki en iyi kritik bölge yine aynı $C=\{(x_1,x_2,\dots,x_n): \bar{x}\geq L_2\}$ bölgesi olacaktır. O halde bu kritik bölgeyi belirleyen test bir UMP testidir.

Eşitlik (1) de $L$ hem $\mu_1$'e hem de k'ya bağlıdır. Esas olan $L_2$ nin $\mu_1$'e bağlı olmadan bulunabilmesi ve her $\mu_1$ değeri için aynı kritik bölgenin bulunabilmesidir. Eşitlik (2)'de $L_2$, $\mu_1$ den bağımsız olarak $\bar{x}$ istatistiği yardımıyla elde edilir. Buna göre $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örneğinden elde edilen gözlemsel değerler $x_1, x_2, \dots, x_n$ olmak üzere $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i \geq L_2$ ise $H_0$-hipotezi ret, aksi halde kabul edilir. Testin güç fonksiyonu

$$\pi(\mu)=P(C/H_1)=P(\bar{x}\geq L_2/H_1)=1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu)}{\sigma}\right)$$

ile bulunur. $\mu$ nün farklı değerlerine karşılık $\pi(\mu)$ değerleri hesaplanarak güç fonksiyonunun grafiği çizilir.

b) $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu<\mu_0 \end{array}\right\}$ Neyman-Pearson teoremi uygulanır. $k>0$, $\mu_1<\mu_0$ ve $\alpha$-önem seviyesi olmak üzere;

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)}=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\right]\right\}\leq k \Rightarrow$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum x_i^2}-2\mu_0\sum x_i+n\mu_0^2-\cancel{\sum x_i^2}+2\mu_1\sum x_i-n\mu_1^2\right]\right\}\leq k$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2(\mu_0-\mu_1)\sum x_i+n(\mu_0^2-\mu_1^2)\right]\right\}\leq k$$

$$\exp\left\{\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma^2}\sum x_i-\frac{n(\mu_0^2-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right\}\leq k \Rightarrow$$ Her iki tarafın ln'i alınır.

$$\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma^2}\sum x_i-\frac{n(\mu_0^2-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\leq \ln k \Rightarrow$$

$\sum x_i \le \frac{\sigma^2 \ln k}{\mu_0-\mu_1} + \frac{n(\mu_0-\mu_1)(\mu_0+\mu_1)}{2(\mu_0-\mu_1)}$ , ($\sum x_i = n\bar{x}$ old.)

$\bar{x} \le \frac{\sigma^2 \ln k}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{\mu_0+\mu_1}{2} \Rightarrow L_1 = \frac{\sigma^2 \ln k}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{\mu_0+\mu_1}{2}$ dersek,

$\bar{x} \le L_1$ elde edilir. Buna göre $P(\bar{x} \le L_1) = \alpha$ olacak şekilde $L_1$ kritik sınır değeri bulunmalıdır. $H_0$ doğru iken $\bar{x} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ olup, $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ olduğu dikkate alınırsa;

$P(\bar{x} \le L_1) = P(Z \le \frac{L_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma}) = \alpha \Rightarrow$

$\Phi\left[\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma}\right] = \alpha \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma} = Z_\alpha$ olmasıdır. Burada $Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$ olduğundan $L_1 = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$ elde edilir.

O halde çekilen örnek için $\bar{x} \le L_1$ ise $H_0$ ret edilir. Böylece testin $\alpha$ önem seviyesindeki en iyi kritik bölgesi;

$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \bar{x} \le L_1\}$ elde edilir.

$\mu_0$'dan küçük ve $\mu_1$'den farklı bir $\mu_2$ değeri için $\alpha$ önem seviyesindeki en iyi kritik bölge yine aynı C bölgesi olacaktır. O halde bu kritik bölgeyi belirleyen test bir UMP testidir. Testin güç fonksiyonu ise;

$\pi(\mu) = \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu)}{\sigma}\right]$ şeklindedir.

c) $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \ne \mu_0 \end{array}\right\}$ durumu için bir UMP testi bulunamaz. Burada UMP testi yerine $H_1: \mu \ne \mu_0$ hipotezi iki parçaya ayrılarak, $H_0: \mu = \mu_0$ hipotezini her bir parça ele alarak kritik bölge belirlenebilir. $H_1: \mu \ne \mu_0$ hipotezinin iki parçaya ayrılması;

$H_1: \mu < \mu_0$ veya $H_1: \mu > \mu_0$ şeklinde olur. Bu durumda;

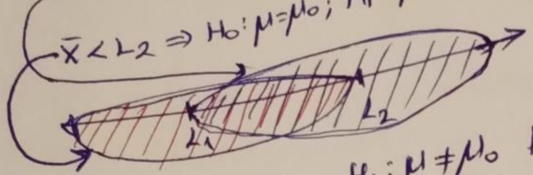
$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ } testi için kritik sınır $L_1$

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ } testi için kritik sınır $L_2$, $(L_1 < L_2)$.

olup, her iki testin kabul bölgelerinin ortak kısmı $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ hipotezinin testi için kabul bölgesi olarak alınabilir. $\mu$ parametresinin yansız bir tahmin edicisi $\bar{x}$ örnek ortalaması olmak üzere;

$\bar{x} > L_1 \Rightarrow H_0: \mu = \mu_0;\ H_1: \mu < \mu_0$ testi için $H_0$-kabul edilir.

$\bar{x} < L_2 \Rightarrow H_0: \mu = \mu_0;\ H_1: \mu > \mu_0$ testi için $H_0$-kabul edilir.



$\Rightarrow$ iki kabul bölgesinin ortak kısmı $L_1 \leq \bar{x} \leq L_2$ olup, bu durumda $H_0: \mu = \mu_0;\ H_1: \mu \neq \mu_0$ testi için $H_0$-kabul edilir. Aksi halde $H_0$-ret edilir. Eğer $H_0$-hipotezini ret etme olasılığı $\alpha$ ise, kabul etme olasılığı;

$$P(L_1 \leq \bar{x} \leq L_2) = 1 - \alpha$$

olur. Burada 1. tip hata olasılığı olan $\alpha$, her bir parçaya ait ret etme olasılıklarının toplamıdır. Bu durumda her bir parçaya ait ret etme olasılıklarının birbirine eşit ve $\frac{\alpha}{2}$ olduğu açıktır.

Yani $L_1$ ve $L_2$ yi şöyle seçmeliyiz ki;

$$P(\bar{x} \leq L_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{ve} \quad P(\bar{x} \geq L_2) = \frac{\alpha}{2}$$

olsun. $H_0$-doğru iken

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ olup, } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1) \text{ olur.}$$

Böylece; $P(\bar{x} \leq L_1) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_1 - \mu_0)}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_1 - \mu_0)}{\sigma}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{n}(L_1 - \mu_0)}{\sigma} = z_{\alpha/2}$ olmasıdır. Benzer şekilde;

$P(\bar{x} \geq L_2) = P(Z \geq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}) = 1 - P(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$P(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}) = 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}) = 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olmasıdır. Burada $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olduğu dikkate alınırsa, $\alpha$-önem seviyesindeki kritik değerler (sınırlar)

$$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$ olur.

Böylece güç fonksiyonu;

$$\pi(\mu) = P(L_1 \leq \bar{x} \leq L_2) = P(\bar{x} \leq L_2) - P(\bar{x} \leq L_1)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu)}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu)}{\sigma}\right)$$ şeklindedir.

ÖRNEK Belirli bir miktar maddenin alkol yüzdesi test edilmek isteniyor. Alkol yüzdesinin normal dağılımlı olduğu biliniyor. Ortalama değer bazısında $\mu=0,60$ iken diğerlerinde ise $\mu>0,60$ ve st. sapma bütün maddeler için aynı olup $\sigma=0,2$ kabul ediliyor. Buna göre; $n=25$ birimlik bir örneklem yardımıyla

$H_0: \mu=0,60$ basit hipotezine karşı

$H_1: \mu>0,60$ bileşik hipotezini test eden %10 önem seviyesinde bir UMP testi bulunuz?

ÇÖZÜM $H_0: \mu=0,60$
$H_1: \mu>0,60$ $\mu$-parametresinin yansız tahmin edicisi olmak üzere $n=25$ birimlik örnekten elde edilen $\bar{x}$ istatistiği en iyi kritik karar kuralı $\bar{x} \geq L_2$ ise Haret edilir. Burada $L_2$ en iyi kritik sınır değeri olup, $\alpha=0,10$ önem seviyesinde $P(\bar{x} \geq L_2) = \alpha = 0,10$ olacak şekilde bulunur. $\bar{x} \sim N(\mu_0=0,60;\ \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0,04}{25})$ iken en iyi kritik sınır değeri $L_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$ olarak bulunur.

$z_{1-\alpha} = z_{0,90} = 1,28$ olup, buna göre $L_2 = 0,60 + \frac{0,2}{5}(1,28) = 0,6512$ bulunur. Böylece $\alpha = 0,10$ önem seviyesinde en iyi kritik bölge $C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{25}) : \bar{x} \geq 0,6512\}$ dur. Bu sonuç $\mu = 0,60$'dan büyük olan her $\mu$ değeri için aynıdır. O halde C-bölgesi düzgün en güçlü kritik bölgedir. Böylece $(x_1, x_2, \ldots, x_{25})$ örneğinden elde edilen gözlemsel değerler $(x_1, x_2, \ldots, x_{25})$ ise ve $\bar{x} \geq 0,6512$ oluyorsa $H_0$ - ret, aksi halde $H_0$ - kabul edilir. Testin güç fonksiyonu;

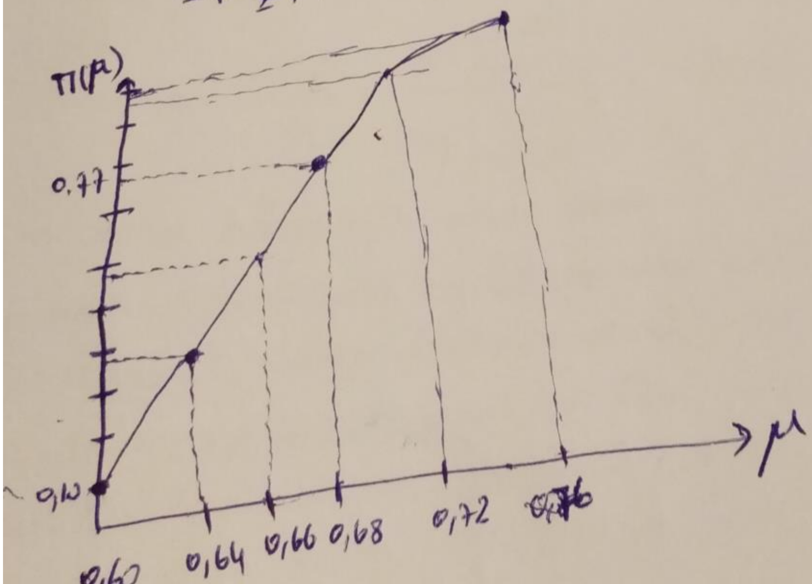
$$\pi(\mu) = 1 - \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(L_2 - \mu)}{\sigma}\right]$$ şeklinde tanımlanır.

$\mu$-nün farklı değerleri için $\pi(\mu)$ nün değerleri bulunarak güç eğrisi çizilebilir.

| $\mu$ | 0,60 | 0,64 | 0,66 | 0,68 | 0,72 | 0,76 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi(\mu)$ | 0,10 | 0,39 | 0,59 | 0,77 | 0,96 | 0,99 |

$$\pi(0,60) = 1 - \Phi\left[\frac{\sqrt{25}(0,6512 - 0,60)}{0,2}\right] = 1 - \Phi(1,28) = 1 - 0,8997 = 0,1003$$

$$= 1 - \Phi(0,28) = 1 - 0,6103 = 0,3897 \quad (\text{v.s.})$$



## 8. Olabilirlik Oran Testi

$H_0$ hipotezinin ya da hem $H_0$ hem de $H_1$ hipotezinin bileşik hipotezler olması durumunda kritik (ret) bölgelerini belirlemek için kullanılır. Kitleye ait dağılım $f(x;\theta)$ o.y.f.nu ile verilsin. Burada $\theta$ parametresinin aldığı değerler kümesi parametre uzayı olarak bilinir ve $\Omega$ ile gösterilir. Bu parametre uzayı $H_0$ ve $H_1$ hipotezleri altında birbirinden ayrık olan iki alt uzaya ayrılır. $H_0$-hipotezi altındaki alt uzayı $H_0$ ile $H_1$-hipotezi altındaki alt uzayı da $H_1$ ile gösterirsek, o zaman $\Omega = H_0 \cup H_1$ ve $H_0 \cap H_1 = \emptyset$ olacaktır. Testi belirlemek için örneğe ait olabilirlik fonksiyonunun $H_0$ ve $\Omega$ üzerinde maksimumlarının oranı oluşturulur.

**Tanım** Olasılık y.f.nu $f(x;\theta)$ olan bir kitleden rastgele çekilen n-birimlik bir örneğin olabilirlik fonksiyonu $L(\theta)$ olsun. $H_0$ hipotezi altında $L(\theta)$'nın maksimum değeri $L(\hat{H}_0)$, $\theta \in H_0$ için bulunan değer, $\Omega$ parametre uzayında $L(\theta)$'nın maksimum değeri $L(\hat{\Omega})$, $\theta \in \Omega$ için bulunan değer olsun. Bu takdirde

$$\lambda = \frac{L(\hat{H}_0)}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\max\left\{\begin{matrix} L(\theta) \\ \theta \in H_0 \end{matrix}\right\}}{\max\left\{\begin{matrix} L(\theta) \\ \theta \in \Omega \end{matrix}\right\}}, \quad (\lambda \geq 0)$$

oranına olabilirlik oranı denir.

Olabilirlik fonksiyonu pozitif değerler olan bir fonksiyon olduğundan ve $H_0 \subseteq \Omega$ olduğu dikkate alındığında $L(\hat{H}_0) \leq L(\hat{\Omega})$ ve böylece $0 \leq \lambda \leq 1$ olacaktır. Eğer $L(\hat{H}_0)$ değeri $L(\hat{\Omega})$ değerinden çok küçük olursa o zaman $\lambda$ çok küçük yani sıfıra yakın değer alacak demektir. Bu durum $\theta \in H_0$ hipotezinin doğru olma olasılığının çok küçük olacağı anlamına gelir. Diğer bir