ifadeyle λ-nın çok küçük değer alması H_0-hipotezinin ret edileceğinin bir göstergesidir. Tersine $\lambda \to 1$ olması H_0 hipotezinin doğruluğunu gösterir. Yani $L(\hat{H}_0)$ değeri $L(\hat{\Omega})$ değerine yaklaştıkça H_0-hipotezinin kabul edilme olasılığı artar.

Tanım $\theta \in H_0$ hipotezi, $\theta \in H_1$ hipotezine karşı test edilmek istensin. Bu durumda olabilirlik oran testinin kritik (veya ret) bölgesi $0<k<1$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{L(\hat{H}_0)}{L(\hat{\Omega})} \leq k$$

şartını sağlayan noktalar kümesidir. Yani kritik bölge C ile gösterilirse; $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \lambda \leq k\}$ olacaktır. Burada k sayısı, I. Tip hata olasılığı α'ya eşit olacak şekilde belirlenir. Bu ise α testin önem seviyesi olmak üzere $P(C) = \alpha$ olması demektir.

Teorem: 1 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin ve σ^2 biliniyor olsun. Dağılımın μ parametresi ile ilgili hipotezlerin olabilirlik oran testine göre kritik sınır değerleri, yani C bölgesini belirleyen değerler

	H_0	H_1	C
i)	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$L_1 = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$
ii)	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$L_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$
iii)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

olarak verilir. Burada $\mu_0 \in \mathbb{R}$ bilinen bir sabittir.

İspat: Önce (iii)'ü ispatlayalım.

(iii) $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$, $(\mu_0 \in \mathbb{R})$ bu test çift yanlı bir testtir.

Kitleden çekilen n-birimlik örnek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olmak üzere, $i=1,2,\ldots,n$ için X_i'ler bağımsız ve $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı olduğundan olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \mu)^2\right\}$$

dir. Olabilirlik fonksiyonunun Ho-hipotezi altındaki maksimum değeri;

$$L(\hat{H_0}) = \max_{\mu \in H_0}\{L(\mu)\} = L(\mu_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \mu_0)^2\right\}$$

dir. Parametre uzayı $\Omega = \{\mu : -\infty < \mu < \infty\} = \mathbb{R}$ olup, parametre uzayında olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerini, yani $L(\hat{\Omega})$ yı bulabilmek için μ parametresinin en çok olabilirlik tahmininin bulunması gerekir. Normal dağılımda μ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\mu} = \bar{x}$ örnek ortalaması olduğundan

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\mu \in \Omega}\{L(\mu)\} = L(\bar{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum (x_i - \bar{x})^2\right\}$$

olur. Böylece olabilirlik oranı;

$$\lambda = \frac{L(\hat{H_0})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\cancel{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \mu_0)^2\right\}}{\cancel{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \bar{x})^2\right\}}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\mu_0 (n\bar{x}) + n\mu_0^2 + 2\bar{x}(n\bar{x}) - n\bar{x}^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu_0 + \mu_0^2)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2\right\} \cdots (*)$$ olarak bulunur.

Bu sonuca göre eğer $\bar{x} \to \mu_0$ ise H_0 hipotezi doğru olacak demektir. $\bar{x} \to \mu_0$ olması $\bar{x}-\mu_0 \to 0$ ve böylece $\lambda \to 1$ olması demektir. Tersine eğer örnek ortalaması μ_0 dan çok farklı bir değer olursa (çok küçük veya çok büyük olabilir, H_1: çift yanlı olduğundan) $\bar{x}-\mu_0 \to \mp\infty$ iken $(\bar{x}-\mu_0)^2 \to +\infty$ olacağından $\lambda \to 0$ olması beklenir ve böylece H_1 hipotezinin doğru olması beklenir.

H_0 ve H_1 hipotezleri hakkındaki bu beklentileri dikkate alarak testin kritik (ret) bölgesini belirleyelim. Bunun için $P(\lambda \leq k) = \alpha$ olacak şekilde bir sınır değer belirlemeye çalışacağız. Burada α - testin önem seviyesi ve $0<k<1$ dir. (*) eşitliği dikkate alındığında;

$$\lambda \leq k \Rightarrow \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2\right\} \leq k \Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2 \leq \ln k \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2 \geq -2\ln k \Leftrightarrow \left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\right]^2 \geq -2\ln k \Leftrightarrow (-2\ln k > 0 \text{ old.})$$

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\right| \geq \sqrt{-2\ln k} = c \quad \text{---} \ (1)$$

yazılabilir. Burada $Z = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}$ dersek, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ olduğundan, H_0-doğru iken $Z \sim N(0,1)$ olur. α-önem seviyesinde $P(|Z| \geq c) = \alpha$ olacak şekilde veya c-kritik sınır değeri $P(|Z| \geq c) = \alpha$ ...

c-kritik sınır değeri $P(|Z|\geq c) = \alpha$

$1 - P(|Z| \leq c) = \alpha \Rightarrow P(|Z| \leq c) = 1-\alpha \Rightarrow P(-c \leq Z \leq c) = 1-\alpha$

olacak şekilde bulunur. Buradan $\Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ve böylece $c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olarak bulunur. Bu değer yerine yazılırsa

$$P(-c \leq Z \leq c) = P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak iki yanlı test için kritik sınır değerleri

$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olarak elde edilir. Buna göre n-birimlik

örnek için $\bar{x}$ örnek ortalaması $L_1 < \bar{x} < L_2$ eşitsizliğini sağlı-

yorsa H_0-kabul edilir, aksi halde yani $\bar{x} \le L_1$ veya $\bar{x} \ge L_2$

ise H_0-ret edilir. Böylece H_1 hipotezi iki yanlı iken kritik bölge

$$C = (\bar{x} \le L_1) \cup (\bar{x} \ge L_2) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} \le L_1 \text{ veya } \bar{x} \ge L_2\}$$

şeklinde yazılır.

i) $H_0 : \mu \ge \mu_0$ hipotezi ile ilgili tek yanlı testin kritik sınır
$H_1 : \mu < \mu_0$ değeri (1) eşitliğinden dolayı $L_1 = -c$ olmak

üzere $P(\bar{x} \le L_1) = \alpha$ şartını sağlayan L_1 değeridir. $\bar{x}$ istatis-

tiğine Z-dönüşümü uygulandığında, H_0-doğru iken

$$P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma} = z_\alpha$$

elde edilir. $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ old. $\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu_0)}{\sigma} = -z_{1-\alpha} \Rightarrow$

$L_1 = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ bulunur. Böylece kritik bölge;

$$C = (\bar{x} \le L_1) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} \le L_1\}$$ olur.

ii) H_0 ~~...~~ $: \mu \le \mu_0$ hipotezi ile ilgili tek yanlı testin kritik
$H_1 : \mu > \mu_0$ sınır değeri (1) eşitliğinden $L_2 = c$ olmak

üzere $P(\bar{x} \ge L_2) = \alpha$ şartını sağlayan L_2 değeridir. $\bar{x}$, Z ye

dönüştürülürse, H_0-doğru iken;

$$P\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = \alpha \Rightarrow$$

$$P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right) = 1-\alpha \Rightarrow \Phi\left[\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma}\right] = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu_0)}{\sigma} = z_{1-\alpha} \Rightarrow L_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$$ bulunur. Böylece

kritik bölge; $C = (\bar{x} \geq \ell_2) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \bar{x} \geq \ell_2\}$ olur.

Örnek $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 100)$ verilsin. $H_0: \mu = 80$; $H_1: \mu \neq 80$ testi için 36 birimlik bir örnekten $\bar{x} = 82$ bulunmuştur. %5 önem seviyesinde H_0 hipotezi için kararı belirtiniz?

Çözüm $H_0: \mu = 80$

$H_1: \mu \neq 80$ (çift yanlı test). Teo.1'e göre olabilirlik oran testi gereğince kritik sınırlar $\ell_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dir. Bu sınır değerlerini bulalım.

$\mu_0 = 80$ $\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975}$ olup $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi(z_{0,975}) = 0,975 \Rightarrow$

$n = 36$

$\sigma = 10$ $\quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ bulunur. Buna göre; alt kritik sınır

$\alpha = 0,05$ $\quad \ell_1 = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 80 - \frac{10}{6}(1,96) = 76,73$ iken

üst kritik sınır; $\ell_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 80 + \frac{10}{6}(1,96) = 83,26$ bulunur.

$\bar{x} = 82$ olduğundan $76,73 < 82 < 83,26$ yani $\ell_1 < \bar{x} < \ell_2$ olup H_0- hipotezi kabul edilir. Bu problem için kritik bölge;

$$C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{36}) : \bar{x} \leq \ell_1 \text{ veya } \bar{x} \geq \ell_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_{36}) : \bar{x} \leq 76,73 \text{ veya } \bar{x} \geq 83,26\}$$ şeklindedir.

$\bar{x} = 82 \notin C$ olduğundan H_0- kabul edilir.

Teorem: 2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin ve σ^2 bilinmiyor olsun. Yeterince küçük örnekler için, yani n örnek hacmi yeterince küçükken n-birimlik örnek $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. olabilirlik oran testine göre μ parametresi ile ilgili hipotezler için kritik sınır değerleri, yani C-bölgesini belirleyen sınırlar

H_0	H_1	C
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$L_1 = \mu_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\alpha}$; $(t_{n-1;\alpha} = -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}})$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$L_2 = \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$

şeklindedir.

Teorem 3 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin. σ^2 parametresi ile ilgili hipotezler için olabilirlik oran testine göre α önem seviyesinde kritik sınır değerleri;

H_0	H_1	C
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{\alpha;n-1}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{1-\alpha;n-1}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$; $L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$

şeklindedir. Burada $Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;\alpha}) = \alpha$ demektir.