Teorem:2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin ve σ^2 bilinmiyor olsun. Bu dağılımdan rastgele çekilen n birimlik bir örnek $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olmak üzere bu örnek için örnek hacminin yeterince küçük olduğunu kabul edelim. Bu durumda μ parametresi ile ilgili hipotez testi için olabilirlik oran testine göre kritik sınır değerleri, yani C bölgesini belirleyen sınırlar hipotezlerin durumuna göre aşağıda verildiği gibidir.

H_0	H_1	C
i) $\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
ii) $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$L_1 = \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}$
iii) $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$L_2 = \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}$

İspat: i) İspatı çift yanlı hipotezlerin testi için verelim. Yani; $H_0: \mu = \mu_0$ ve $H_1: \mu \neq \mu_0$ olsun. Burada;

$H_0 = \{(\mu_0, \sigma^2): \sigma^2 \in IR^+\}$ iken, $H_1 = \{(\mu, \sigma^2): \mu \neq \mu_0, \mu \in IR, \sigma^2 \in IR^+\}$ şeklinde yazılır. $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından rastgele olarak çekilen n birimlik örnek için olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (1)$$

dir. Olabilirlik fonksiyonunun H_0 hipotezi altındaki maksimum değeri;

$$L(\widehat{H}_0) = max\left\{\underset{\mu \in H_0}{L}(\mu, \sigma^2)\right\} = L(\mu_0, \hat{\sigma}_0^2) \quad (2)$$

olup, burada $\hat{\sigma}_0^2$: H_0 hipotezi altında σ^2 parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir ve $\hat{\sigma}_0^2 = S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$ şeklinde tanımlıdır. Bu değerler Eşitlik (1) de kullanılırsa;

$$L(\widehat{H}_0) = (2\pi S_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{S_0^2}\right\}, \left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 = nS_0^2 \; olduğundan\right)$$

$$L(\widehat{H}_0) = [2\pi S_0^2]^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nS_0^2}{S_0^2}\right)\right\} = [2\pi S_0^2]^{-n/2} e^{-n/2} \quad (3)$$

elde edilir.

Şimdi de parametre uzayında olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri $L(\widehat{\Omega})$'yı bulalım, Parametre uzayı $\Omega = H_0 \cup H_1$ olduğundan olabilirlik fonksiyonunu bu uzayda maksimum yapan $\mu \; ve \; \sigma^2$ değerleri, bu parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri olan örnek ortalaması $\left(\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ ile örnek varyansı $\left(S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)$ istatistikleridir. Buna göre parametre uzayında olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri;

$$L(\widehat{\Omega}) = max\left\{\underset{\mu \in \Omega}{L}(\mu, \sigma^2)\right\} = L(\overline{X}, S^2) = [2\pi S^2]^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nS^2}{S^2}\right)\right\} = [2\pi S^2]^{-n/2} e^{-n/2} \quad (4)$$

olur. Böylece olabilirlik oranı;

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{[2\pi S_0^2]^{-n/2} e^{-n/2}}{[2\pi S^2]^{-n/2} e^{-n/2}} = \left[\frac{S_0^2}{S^2}\right]^{-n/2} \quad (5)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan;

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X}\right)+\left(\overline{X}-\mu_0\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(\overline{X}-\mu_0\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2$$

$$= S^2 + \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - n\overline{X}\right)\left(\overline{X}-\mu_0\right) + \frac{1}{n}n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2$$

$= S^2 + \frac{2}{n}\left(n\overline{X}-n\overline{X}\right)\left(\overline{X}-\mu_0\right) + \left(\overline{X}-\mu_0\right)^2 \Rightarrow S_0^2 = S^2 + \left(\overline{X}-\mu_0\right)^2$ olduğu dikkate alınırsa Eşitlik (5);

$$\lambda = \left[\frac{S^2+\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2}\right]^{-n/2} = \left[1+\frac{\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2}\right]^{-n/2} \tag{6}$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre H_0 hipotezi doğru iken $\overline{X} \to \mu_0$ yaklaşacağından, $\lambda \to 1$ yaklaşması beklenir. Tersine $\overline{X}$ istatistiği μ_0 dan çok farklı olursa (ya çok büyük ya da çok küçük olabilir), $\lambda \to 0$ yaklaşacağından bu durumda H_1 hipotezi doğru olması beklenir. H_0 ve H_1 hipotezleri hakkındaki bu beklentileri dikkate alarak testin kritik (ret) bölgesini belirleyelim. Bunun için α önem seviyesi olmak üzere $P(\lambda \le k) = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir k sınır değeri belirlenmeye çalışılır.

$\lambda \le k \Rightarrow \left[1+\frac{\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2}\right]^{-n/2} \le k \Rightarrow 1+\frac{\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2} \ge k^{-2/n} \Rightarrow \frac{\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2} \ge k^{-\frac{2}{n}} - 1$ bu eşitsizliğin her iki tarafı soldan örnek hacmi $n \in \mathbb{Z}^+$ ile çarpılırsa;

$$\frac{n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2} \ge n\left(k^{-\frac{2}{n}} - 1\right) = k' \tag{7}$$

elde edilir. Diğer taraftan H_0 hipotezi altında $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ olduğu, bu dağılımı standartlaştırarak $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma} \sim N(0,1)$ dağılımı ve $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ olduğu elde edilebilir. Üstelik $\overline{X}$ ile S^2 istatistikleri bağımsız olduğundan bunların birer doğrusal fonksiyonu olan $Z\ ve\ U$ istatistikleri de bağımsızdır. Böylece $T = \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}}$ dönüşümü ile elde edilecek olan;

$$T = \frac{\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma}}{\sqrt{\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{S} \tag{8}$$

istatistiği, $(n-1)$ serbestlik dereceli student-t dağılımına sahip olacaktır. Eğer (7) eşitsizliğinde

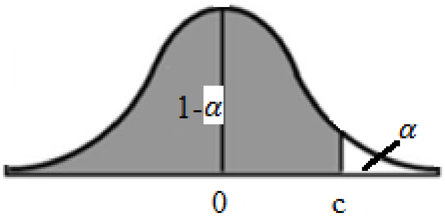
$T^2 = \frac{n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{S^2} \ge k'$ dersek

$$|T| = \left|\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{S}\right| = \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \ge \sqrt{k'} = c \tag{9}$$

bulunur. Böylece olabilirlik oran testi kriterine göre α önem seviyesinde c kritik sınır değeri,

$P(|T| \geq c) = \alpha$ veya tümleyen olayı dikkate alındığında $P(|T| \leq c) = 1 - \alpha \Longrightarrow$

$$P(-c \leq T \leq c) = 1 - \alpha \qquad (10)$$



olacak şekilde bulunur. Öyle ki student-t dağılımının ortalamaya göre simetrik olma özelliğinden dolayı $P(T < -c) = P(T > c) = \frac{\alpha}{2}$ olacaktır. Buradan;

$P(T > c) = 1 - P(T \leq c) = \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow\ P(T \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow c = t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}}$ elde edilir. Böylece; bulunan c değeri ile Eşitlik (9)'daki T değeri Eşitlik (10)'da yerlerine yazılırsa;

$$P\left(-t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S} \leq t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow$$

$P\left(\mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ elde edilir. Buradan iki yanlı testin alt ve üst sınırları $L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:\,1-\frac{\alpha}{2}}$ olarak bulunur. Buna göre n birimlik bir örnekleme ait $\overline{X}$-örnek ortalaması için, eğer $L_1 < \overline{X} < L_2$ ise H_0 hipotezi ret edilemez. Aksi takdirde, yani $\overline{X} \leq L_1$ veya $\overline{X} \geq L_2$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre kritik bölge (ret bölgesi) $C = \{(X_1, \ldots, X_n): \overline{X} \leq L_1\ V\ \overline{X} \geq L_2\}$ olur.

ii) Şimdi de $H_0: \mu \geq \mu_0$ karşı $H_1: \mu < \mu_0$ hipotezi ile ilgili tek yanlı testin kritik sınır değeri, Eşitsizlik (9)'dan dolayı $\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq c \Leftrightarrow ya\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -c\ veya\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > c$ olacağı dikkate alındığında $L_1 = -c$ olmak üzere $P(\overline{X} < L_1) = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir L_1 sayısı olacaktır. Buna göre;

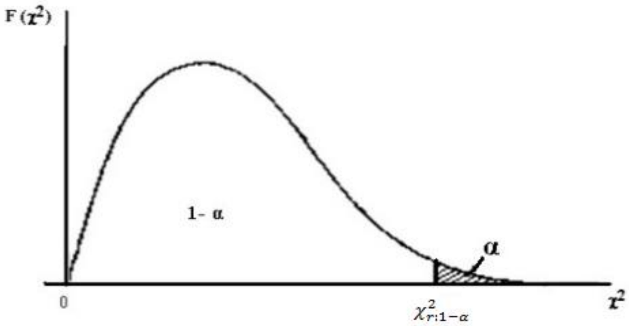
$P(\overline{X} < L_1) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < \frac{L_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) = P\left(T < \frac{L_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) = F_T\left(\frac{L_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{L_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = t_{n-1;\,\alpha}$ elde edilir. $Student - t$ dağılımı ortalamaya göre simetrik olduğundan $t_{n-1;\,\alpha} = -t_{n-1;\,1-\alpha}$ eşitliği dikkate alındığında $\frac{L_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -t_{n-1;1-\alpha}$ yazılabilir. Bu eşitlikten de tek anlı testin kritik sınır değeri $L_1 = \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1;1-\alpha}$ olarak bulunur. Buna göre $\overline{X} \leq L_1$ ise H_0 ret edilir, $\overline{X} > L_1$ ise H_0 ret edilemez. Buna göre kritik bölge (ret bölgesi) $C = \{(X_1, \ldots, X_n): \overline{X} \leq L_1\}$ olur.

iii) Son olarak $H_0: \mu \leq \mu_0$ karşı $H_1: \mu > \mu_0$ hipotezi ile ilgili tek yanlı testin kritik sınır değeri, yine Eşitsizlik (9) dan dolayı $L_2 = c$ olmak üzere $P(\overline{X} > L_2) = \alpha$ veya tümleyen olayı gereğince $P(\overline{X} \leq L_2) = 1 - \alpha$ eşitliğini sağlayan bir L_2 sayısı olacaktır. Buna göre;

$P(\overline{X} \leq L_2) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq \frac{L_2-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(T \leq \frac{L_2-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right) = F_T\left(\frac{L_2-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \frac{L_2-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} =$ $t_{n-1;1-\alpha}$ elde edilir. Bu eşitlikten de tek yanlı testin kritik sınır değeri $L_2 = \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1;1-\alpha}$ olarak bulunur. Buna göre $\overline{X} \geq L_2$ ise H_0 ret edilir, $\overline{X} < L_2$ ise H_0 ret edilemez. Buna göre kritik bölge (ret bölgesi) $C = \{(X_1, \dots, X_n): \overline{X} \geq L_2\}$ olur.

Teorem:3 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımı verilsin. Bu durumda σ^2 parametresi ile ilgili hipotez testi için olabilirlik oran testine göre α önem seviyesinde kritik sınır değerleri, yani C bölgesini belirleyen sınırlar hipotezlerin durumuna göre aşağıda verildiği gibidir.

H_0	H_1	C
i) $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1;\alpha}$; $P(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{n-1;\alpha}) = \alpha$
ii) $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1;1-\alpha}$; $P(\chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{n-1;1-\alpha}) = 1-\alpha$
iii) $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$; $L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$



İspat: **i)** Önce birinci durumda verilen hipotezleri ele alalım. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ hipotezine karşı $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ hipotezi test etmek için ilgili testin kritik bölgesini bulalım. Burada $\sigma_0^2 \in IR^+$ dır. $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından rastgele çekilen n birimlik bir örnek $(X_1, \dots, X_n)$ ve bu örneğin olabilirlik fonksiyonu:

$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right\}$ şeklindedir. Olabilirlik oranı istatistiğinde yer alan $L(\widehat{H}_0)$ yı belirlemek için $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ hipotezi altında olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\mu\ ve\ \sigma^2$ parametrelerinin bulunması gerekir. Bu parametrelerin en çok olabilirlik yöntemi ile bulunan yansız tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\mu} = \overline{X}$ ve $\hat{\sigma}^2 = S^2$istatistikleridir. Örnekten hesaplanan S^2 değeri için, eğer $S^2 \geq \sigma_0^2$ ise olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan σ^2 değeri için $\hat{\sigma}^2 = S^2$ alınırken, eğer $S^2 < \sigma_0^2$ ise olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan σ^2 değeri olarak $\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2$ alınır. Buna göre

$$L(\widehat{H}_0) = \begin{cases} L(\overline{X}, S^2) = (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2S^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right\}, & S^2 \geq \sigma_0^2 \text{ ise} \\ L(\overline{X}, \sigma_0^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right\}, & S^2 < \sigma_0^2 \text{ ise} \end{cases}$$ olacaktır.

Burada $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ olduğu dikkate alınırsa, $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = (n-1)S^2$ yazılabileceğinden, bu değer yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$L(\widehat{H}_0) = \begin{cases} (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}, & S^2 \geq \sigma_0^2 \text{ ise} \\ (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & S^2 < \sigma_0^2 \text{ ise} \end{cases} \tag{11}$$

elde edilir. Şimdi de tüm parametre uzayı olan $\Omega = H_0 \cup H_1$ uzayında olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri olan $L(\widehat{\Omega})$ yı bulalım. Bu uzayda olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri $\hat{\mu} = \overline{X}$ ve $\hat{\sigma}^2 = S^2$istatistikleri olduğundan;

$$L(\widehat{\Omega}) = L(\overline{X}, S^2) = (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\} \tag{12}$$

elde edilir. Böylece olabilirlik oranı; $S^2 \geq \sigma_0^2$ iken

$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}}{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}} = 1 > k$ olur, çünkü $0 < k < 1$ dir ve bu durumda H_0 kabul edilir. Bu sebeple $H_0\!: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ hipotezine karşı $H_1\!: \sigma^2 < \sigma_0^2$ hipotezi test etmek için olabilirlik oranının ve kritik bölgenin belirlenmesinde $S^2 \geq \sigma_0^2$ durumu genellikle dikkate alınmaz, $S^2 < \sigma_0^2$ durumu dikkate alınarak olabilirlik oranı ve böylece testin kritik bölgesi belirlenmeye çalışılır. Eğer $S^2 < \sigma_0^2$ ise

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{\left(2\pi\sigma_0^2\right)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}}{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}} = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2} + \frac{(n-1)}{2}\right\},$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{\frac{(n-1)}{2}\left(1 - \frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)\right\} \tag{13}$$

elde edilir. Olabilirlik oran testinde $0 < k < 1$ olmak üzere $\lambda < k$ şartını sağlayan noktalar kümesi testin kritik bölgesini, yani H_0 hipotezinin ret edileceği bölgeyi gösterecektir. Eşitlik (13)'de $u = \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ dersek, o zaman $\lambda = u^{n/2} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)}$ yazılabilir. Burada $S^2 < \sigma_0^2$ olduğundan $0 < u < 1$ dir. Ayrıca λ'nın u'ya göre türevi alınırsa;

$$\lambda' = \frac{n}{2} u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)} - \frac{n-1}{2} u^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)} = u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)} \left[\frac{n}{2} - \frac{n-1}{2}u\right]$$

$= u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)} \left[\frac{n}{2} - \frac{n}{2}u + \frac{1}{2}u\right] = u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\frac{n-1}{2}(1-u)} \left[\frac{n}{2}(1-u) + \frac{u}{2}\right] > 0$ olduğundan λ olabilirlik oranı u'nun ve böylece s^2 nin artan bir fonksiyonudur. Bu sebeple $\lambda < k$ olması olayı ile $S^2 < L_1$ olması olayları denk olaylardır. Dolayısıyla bu olayların olasılıkları birbirine eşit olacaktır. Bu durumda $\lambda < k$ şartını sağlayan noktalar kümesi testin kritik bölgesini, yani H_0 hipotezinin ret edileceği bölgeyi göstereceğinden

$$P(\lambda < k) = P(S^2 < L_1) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = \alpha \tag{14}$$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

yazılabilir. H_0 doğru iken $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ olduğundan, Eşitlik (14) den

$$P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = \alpha \implies F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n-1;\alpha} \implies L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1;\alpha}$$

elde edilir. Buna göre örnek varyansı $S^2 < L_1$ ise H_0 ret edilir, aksi takdirde kabul edilir.

ii) Şimdi $H_0\colon \sigma^2 \le \sigma_0^2$ hipotezine karşı $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ hipotezi test etmek için ilgili testin kritik bölgesini bulalım. Olabilirlik oranı istatistiğinde yer alan $L(\widehat{H}_0)$ yı belirlemek için $H_0\colon \sigma^2 \le \sigma_0^2$ hipotezi altında olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\mu\ ve\ \sigma^2$ parametrelerinin bulunması gerekir. Bu parametrelerin en çok olabilirlik yöntemi ile bulunan yansız tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\mu} = \overline{X}$ ve $\hat{\sigma}^2 = S^2$istatistikleridir. Örnekten hesaplanan S^2 değeri için, eğer $S^2 \le \sigma_0^2$ ise olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan σ^2 değeri için $\hat{\sigma}^2 = S^2$ alınırken, eğer $S^2 > \sigma_0^2$ ise olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan σ^2 değeri olarak $\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2$ alınır. Buna göre

$$L(\widehat{H}_0) = \begin{cases} L(\overline{X}, S^2) = (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2S^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right\}, & S^2 \le \sigma_0^2 \text{ ise} \\ L(\overline{X}, \sigma_0^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right\}, & S^2 > \sigma_0^2 \text{ ise} \end{cases} \text{ olacaktır.}$$

Burada $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = (n-1)S^2$ yazılabileceğinden, bu değer yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$L(\widehat{H}_0) = \begin{cases} (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}, & S^2 \le \sigma_0^2 \text{ ise} \\ (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & S^2 > \sigma_0^2 \text{ ise} \end{cases} \tag{15}$$

elde edilir. Şimdide tüm parametre uzayı olan $\Omega = H_0 \cup H_1$ uzayında olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri olan $L(\widehat{\Omega})$ yı bulalım. Bu uzayda olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri $\hat{\mu} = \overline{X}$ ve $\hat{\sigma}^2 = S^2$istatistikleri olduğundan;

$$L(\widehat{\Omega}) = L(\overline{X}, S^2) = (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\} \tag{16}$$

elde edilir. Böylece olabilirlik oranı; $S^2 \le \sigma_0^2$ iken

$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}}{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}} = 1 > k$ olur, çünkü $0 < k < 1$ dir ve bu durumda H_0 kabul edilir. Bu sebeple $H_0\colon \sigma^2 \le \sigma_0^2$ hipotezine karşı $H_1\colon \sigma^2 > \sigma_0^2$ hipotezi test etmek için olabilirlik oranının ve kritik bölgenin belirlenmesinde $S^2 \le \sigma_0^2$ durumu genellikle dikkate alınmaz, $S^2 > \sigma_0^2$ durumu dikkate alınarak olabilirlik oranı ve böylece testin kritik bölgesi belirlenmeye çalışılır. Eğer $S^2 > \sigma_0^2$ ise

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}}{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}} = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2} + \frac{(n-1)}{2}\right\},$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{\frac{(n-1)}{2}\left(1-\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)\right\} \tag{17}$$

elde edilir. Eşitlik (17)'de $u = \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ dersek, o zaman $\lambda = u^{n/2}e^{\frac{n-1}{2}(1-u)}$ yazılabilir. Burada $S^2 > \sigma_0^2$ olduğundan $u > 1$ dir. Ayrıca λ'nın u'ya göre türevi alınırsa;

$\lambda' = u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}e^{\frac{n-1}{2}(1-u)}\left[\frac{n}{2}(1-u)+\frac{u}{2}\right] < 0$ olacağından λ olabilirlik oranı u'nun ve böylece s^2 nin azalan bir fonksiyonudur. Bu sebeple $\lambda > k$ olması olayı ile $S^2 > L_2$ olması olayları denk olaylardır. Dolayısıyla bu olayların olasılıkları birbirine eşit olacaktır. Bu durumda $\lambda > k$ şartını sağlayan noktalar kümesi testin kritik bölgesini, yani H_0 hipotezinin ret edileceği bölgeyi göstereceğinden

$$P(\lambda > k) = P(S^2 > L_2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = \alpha \tag{18}$$

yazılabilir. H_0 doğru iken $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$ olduğundan, Eşitlik (18) den

$P\left(\chi_{n-1}^2 > \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = \alpha \Rightarrow$ Tümleyen olayı dikkate alındığında $1 - P\left(\chi_{n-1}^2 \le \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = \alpha$ $\Rightarrow P\left(\chi_{n-1}^2 \le \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2} = \chi_{n-1;1-\alpha}^2 \Rightarrow$ $L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_{n-1;1-\alpha}^2$ elde edilir. Buna göre örnek varyansı $S^2 > L_2$ ise H_0 ret edilir, aksi takdirde kabul edilir.

iii) Şimdi $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ hipotezine karşı $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$ hipotezi test etmek için ilgili testin kritik bölgesini bulalım. Bu durumda;

$$L(\widehat{H}_0) = \begin{cases} (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}, & S^2 = \sigma_0^2 \text{ ise} \\ (2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & S^2 \ne \sigma_0^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $L(\widehat{\Omega}) = L(\overline{X}, S^2) = (2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}$ dır. Eğer $S^2 \ne \sigma_0^2$ ise

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}\right\}}{(2\pi S^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)}{2}\right\}} = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2} + \frac{(n-1)}{2}\right\},$$

$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} exp\left\{\frac{(n-1)}{2}\left(1-\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}$ elde edilir. Burada $u = \frac{S^2}{\sigma_0^2}$ dersek, o zaman $\lambda = u^{n/2}e^{\frac{n-1}{2}(1-u)}$ yazılabilir. Ayrıca λ'nın u'ya göre türevi alınırsa;

$\lambda' = u^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}e^{\frac{n-1}{2}(1-u)}\left[\frac{n}{2}(1-u)+\frac{u}{2}\right]$ olur. Burada türevin işareti $(1-u)$'nun işaretine bağlıdır. Eğer $u = 1$, yani $S^2 = \sigma_0^2$ ise $\lambda = 1$ olur ve böylece λ en büyük değerine ulaşır. Eğer $u < 1$, yani $S^2 < \sigma_0^2$ ise λ, u'ya göre ve böylece S^2'ye göre artandır. Bu durumda $(\lambda < k) \approx (S^2 < L_1)$ olayları denk olaylar olur. Eğer $u > 1$, yani $S^2 > \sigma_0^2$ ise λ, u'ya göre ve böylece

S^2'ye göre azalandır. Bu duruma göre $(\lambda > k) \approx (S^2 > L_2)$olayları denk olaylar olacaktır. Denk olayların olasılıkları da birbirine eşit olacağından, testin kritik bölgesi, yani H_0 hipotezinin ret edileceği bölge ayrık iki bölge olup;

$$P(\lambda < k) = P(S^2 < L_1) = \frac{\alpha}{2} \text{ veya } P(\lambda > k) = P(S^2 > L_2) = \frac{\alpha}{2} \tag{19}$$

yazılabilir. Bu durumda testin kabul bölgesi; $P(L_1 \leq S^2 \leq L_2) = 1 - \alpha$ olur. Burada H_0 doğru iken $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$ olduğundan, Eşitlik (19)'da yer alan birinci ifadeden:

$P(S^2 < L_1) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\chi_{n-1}^2 < \frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $\frac{(n-1)L_1}{\sigma_0^2} = \chi_{n-1;\frac{\alpha}{2}}^2 \Rightarrow L_1 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_{n-1;\frac{\alpha}{2}}^2$ şeklinde alt sınır değeri, ikinci ifaden de;

$P(S^2 > L_2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\chi_{n-1}^2 > \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ tümleyen olayı dikkate alındığında $1 - P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P\left(\chi_{n-1}^2 \leq \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $F_{\chi_{n-1}^2}\left(\frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)L_2}{\sigma_0^2} = \chi_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}^2 \Rightarrow L_2 = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}^2$ şeklinde üst sınır değeri bulunur. Buna göre örnek varyansı $S^2 < L_1$ veya $S^2 > L_2$ ise H_0 ret edilir, aksi takdirde yani $L_1 \leq S^2 \leq L_2$ ise H_0 kabul edilir.

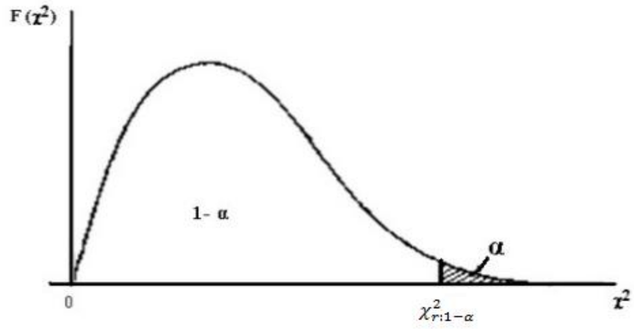
Bazı durumlarda H_0 hipotezi altında λ olabilirlik oran istatistiğinin dağılımını belirlemek çok zor olabilir. Böyle durumlarda kritik bölgelerin belirlenmesinde Teorem:4 kullanılabilir.

Teorem:4 X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)$ olsun. Bu fonksiyonun belirli bir takım düzgünlük koşullarını sağladığı kabul edilsin. Bu dağılımdan çekilen n birimlik bir örnek $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olsun. Hipotezler; H_0: $\theta_i = \theta$ ve H_1: H_0'ın zıddı $(<, >, \neq)$ şeklinde oluşturulsun. Buna göre;

$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = g(x_1, x_2, , , , , x_n)$ alalım. Ayrıca $T = g(X_1, X_2, , , , , X_n)$ ve $Y = -2lnT$ olsun. H_0 doğru ise $n \geq 30$ için $Y \sim \chi_r^2$ dir.

λ ve böylece T'nin alabileceği küçük değerlere karşılık, $Y = -2lnT$ büyük değerler alacaktır. Buna göre bu yaklaşık olabilirlik oran testinin L_2 üst sınırı;

$P(T < k) = P(-2lnT > -2lnk) = P(\chi_r^2 > L_2) = \alpha \Rightarrow P(\chi_r^2 \leq L_2) = F_{\chi_r^2}(L_2) = 1 - \alpha$ bulunur. Buna göre $L_2 = \chi_{r;1-\alpha}^2$ olur. Burada r parametre sayısıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Sonuç olarak çekilen n birimlik örnek üzerinden $-2lnT$ hesaplanır. Eğer $-2lnT > L_2$ ise H_0 ret edilir, aksi takdirde H_0 kabul edilir.

Örnek: Madeni bir paranın hileli olmasından kuşkulanılmakta ve yazı gelme olasılığının $P = P(Y) = 0{,}6$ olduğu düşünülmektedir. Bunun doğruluğunu kontrol etmek için n deneme yapıldığını kabul edelim. Buna göre:

a) Test edilebilecek hipotezleri oluşturunuz ve olabilirlik oran testine göre en iyi testi belirleyiniz?

b) Eğer $n = 100$ denemede 40 yazı gelmişse %5 önem seviyesinde H_0 hipotezi hakkındaki kararınızı belirtiniz?

Çözüm: a) Test edilecek hipotezler:

$H_0: P = 0{,}6$
$H_1: P \neq 0{,}6$ şeklinde oluşturulur.

X: Madeni paranın yazı gelme durumu, şeklinde tanımlı bir rastgele değişken olsun. Bu durumda X r.d.ninin alabileceği değerler; eğer yazı gelme durumu başarı olarak tanımlanırsa "1" ve tura gelmesi başarısızlık olarak tanımlanırsa "0" ile gösterildiğinde, $x = 0{,}1$ olacaktır. Başarı olasılığı P olmak üzere X rastgele değişkeninin dağılımı bir Bernoulli dağılımı olup olasılık fonksiyonu; $f(x, P) = P^x(1 - P)^{1-x}, x = 0{,}1$ şeklinde tanımlanır. Şimdi H_0 hipotezini olabilirlik oran testi ile test etmek için n deneme yapıldığını, yani dağılımdan n birimlik bir örnek çekildiğini kabul edelim. Örnek birimleri $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. Bu takdirde $i = 1,2, \dots, n$ için her bir X_i birbirinden bağımsız ve $X_i \sim Ber(P)$ dağılımlıdır. Buna göre örneğin olabilirlik fonksiyonu;

$$L(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; P) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, P) = P^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1 - P)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

olur. Olabilirlik fonksiyonunun H_0 hipotezi altındaki en büyük değeri;

$$L(\widehat{H}_0) = (0{,}6)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(0{,}4)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \text{ dir.}$$

Parametre uzayı $\Omega = [0\,,1]$ kapalı aralığı olup, olabilirlik fonksiyonunun parametre uzayında en büyük değeri, P parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi kullanılarak elde edilir. P parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ dır. Gerçekten;

$lnL(P) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, lnP + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) ln(1-P)$

$\frac{\partial lnL(P)}{\partial P} \downarrow_{P=\hat{P}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{\hat{P}}\right) + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\left(\frac{-1}{1-\hat{P}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{P}} - \frac{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}{1-\hat{P}} = 0 \quad \Rightarrow$
$\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{P}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{P} + \hat{P}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow n\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$ olur.

Bu durumda olabilirlik fonksiyonunun parametre uzayında en büyük değeri;

$L(\widehat{\Omega}) = L(\overline{X}) = (\overline{X})^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\overline{X})^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$ olarak bulunur. Böylece olabilirlik oranı;

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(0,6)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(0,4)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{(\overline{X})^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\overline{X})^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}} = \left(\frac{0,6}{\overline{X}}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{0,4}{1-\overline{X}}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

olup, Teorem 4 gereğince $n \geq 30$ iken en iyi test, parametre sayısı $r = 1$ olmak üzere; $-2ln\lambda \sim \chi_1^2$ dir. Burada λ istatistiği için $0 \leq \lambda \leq 1$ olup, λ'nın küçük değerlerine karşılık $-2ln\lambda$ büyük değerler alacaktır. Bu sebeple $(\lambda < k) \approx (-2ln\lambda > -2lnk)$ olduğundan;

$P(\lambda < k) = P(-2ln\lambda > -2lnk) = P(\chi_1^2 > L_2) = \alpha \quad \Rightarrow \quad P(\chi_1^2 \leq L_2) = 1-\alpha \quad \Rightarrow$
$L_2 = \chi_{1;1-\alpha}^2$ bulunur. Buna göre $-2ln\lambda > L_2$ olursa H_0 ret edilir.

b) $n = 100$ denemede 40 yazı gelmişse, o zaman $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40$ ve $\overline{X} = \frac{40}{100} = 0,40$ olup

$$\lambda = \left(\frac{0,6}{\overline{X}}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{0,4}{1-\overline{X}}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = \left(\frac{0,6}{0,4}\right)^{40}\left(\frac{0,4}{0,6}\right)^{100-40} = \left(\frac{0,6}{0,4}\right)^{40}\left(\frac{0,4}{0,6}\right)^{60}$$

$= \frac{(0,6)^{40}}{(0,4)^{40}} \times \frac{(0,4)^{40}}{(0,6)^{40}} \times \frac{(0,4)^{20}}{(0,6)^{20}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = 0,0003007 \quad \Rightarrow \quad -2ln\lambda = -2ln(0,0003007) = 16,22$
bulunur. $\alpha = 0,05$ için $L_2 = \chi_{1;1-\alpha}^2 = \chi_{1;0,95}^2 = 3,841$dir. Buna göre $16,22 > 3,841$ yani $-2ln\lambda > L_2$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.