Örnek: $X \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 100)$ dağılımı verilsin. **a)** $H_0: \mu = 230$ hipotezine karşı $H_1: \mu > 230$ hipotezini test etmek için maksimum olabilirlik oran testi kriterine göre bir kritik bölge bulunuz.

b) Bu test bir UMP testi olabilir mi? **c)** Rastgele çekilen n=16 birimlik örnek için $\overline{x} = 232{,}6$ hesaplanmıştır. %10 önem seviyesinde H_0 hipotezi kabul edilebilir mi?

Çözüm: a) $X \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 100)$ dağılımı verilsin.

$H_0: \mu = 230$

$H_1: \mu > 230$ hipotezlerini test etmek için maksimum olabilirlik oran testi kriterine göre bir kritik bölgenin belirlenmesinde izlenecek yol:

i) Verilen dağılımdan rastgele çekilen n birimlik örneğin olabilirlik fonksiyonu $L(\mu)$ belirlenir.

ii) Olabilirlik fonksiyonunun H_0 hipotezinin tanımladığı alt uzay üzerindeki maksimum değeri $L(\widehat{H}_0)$ ve parametre uzayı $\Omega = \{\mu: -\infty < \mu < \infty\} = IR$ üzerindeki maksimum değeri $L(\widehat{\Omega})$ belirlenir.

iii) Olabilirlik oranı $\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})}$ hesaplanır.

iv) $0 < k < 1$ olmak üzere $\lambda \leq k$ şartını sağlayan $C = \{(X_1, X_2, \dots, X_n): \lambda \leq k\}$ bölgesi kritik bölge olur.

Şimdi bu adımları uygulayarak kritik bölgeyi belirleyelim. Verilen dağılımdan rastgele çekilen n birimlik örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. Bu takdirde $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 100)$ ve bağımsız rastgele değişkenlerdir. Bu sebeple örneğin olabilirlik fonksiyonu;

$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = (2\pi)^{-n/2}(100)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$ dir.

Olabilirlik fonksiyonunun H_0 hipotezinin tanımladığı alt uzay üzerindeki maksimum değeri $L(\widehat{H}_0) = L(\mu = 230) = (2\pi)^{-n/2}(100)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 230)^2\right\}$ iken, parametre uzayı üzerindeki maksimum değeri için μ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\mu} = \overline{X}$ olduğundan $L(\widehat{\Omega}) = L(\overline{X}) = (2\pi)^{-n/2}(100)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2\right\}$ olur.

Böylece olabilirlik oranı;

$$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(100)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 230)^2\right\}}{(2\pi)^{-n/2}(100)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2\right\}}$$

$$= exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - 230)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2\right]\right\}$$

$$= exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\times 230\sum_{i=1}^{n} x_i + n(230)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\left(\overline{X}\right)^2\right]\right\}$$

$$= exp\left\{-\frac{1}{2\times 100}\left[-2\times 230\times n\overline{X} + n(230)^2 + 2\times n\left(\overline{X}\right)^2 - n\left(\overline{X}\right)^2\right]\right\}$$

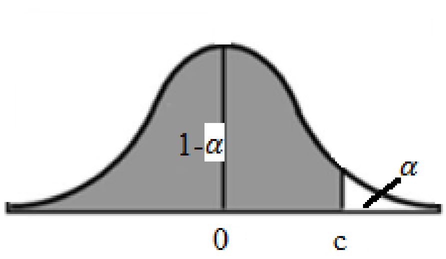
$= exp\left\{-\frac{1}{2\times100}\left[n\left(\left(\overline{X}\right)^2 - 2\times230\times\overline{X} + (230)^2\right)\right]\right\} = exp\left\{-\frac{n}{2\times100}\left[\overline{X} - 230\right]^2\right\}$ olmak üzere, $0 < k < 1$ için $\lambda \leq k$ şartını sağlayan $C = \{(X_1, X_2, \dots, X_n): \lambda \leq k\}$ kritik bölgesini bulalım.

$\lambda \leq k \Rightarrow exp\left\{-\frac{n}{2\times100}\left[\overline{X} - 230\right]^2\right\} \leq k \Rightarrow$ her iki tarafın ln'i alınır ve -2 ile çarpılırsa;

$-\frac{n}{2\times100}\left[\overline{X} - 230\right]^2 \leq lnk \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10}\right]^2 \geq -2lnk \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10}\right| \geq \sqrt{-2lnk} \Rightarrow$ $H_1: \mu > 230$ hipotezi doğru iken μ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi olan $\overline{X} > 230$ olacağından $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10} > 0$ ve böylece $\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10}\right| = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10} \geq \sqrt{-2lnk} = c$ elde edilir. Şimdi $H_0: \mu = 230$ doğru iken $\overline{X} \sim N\left(\mu = 230, \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{n}\right)$ olduğundan $Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10} \sim N(0,1)$ elde edilir. Önem seviyesi α olmak üzere c kritik sınır değeri H_1 hipotezi gereğince $P(Z \geq c) = \alpha$ denkleminden bulunabilir. Şekil:1 den;

$P(Z \geq c) = \alpha \Rightarrow P(Z < c) = 1 - \alpha \Leftrightarrow c = Z_{1-\alpha}$ bulunur. Bu değer yerine yazılırsa;

$P(Z \geq Z_{1-\alpha}) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-230)}{10} \geq Z_{1-\alpha}\right) = P\left(\overline{X} \geq 230 + \frac{10}{\sqrt{n}}Z_{1-\alpha}\right) = P\left(\overline{X} \geq L_2\right) = \alpha$ öyle ki, burada;



Şekil:1 Standart Normal Eğri

$L_2 = 230 + \frac{10}{\sqrt{n}}Z_{1-\alpha}$ dir. Böylece maksimum olabilirlik oran testi kriterine göre kritik bölge $C = \left(\overline{X} \geq L_2\right) = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_n): \overline{X} \geq L_2\right\}$ olarak bulunur.

b) Bu testin bir UMP testi olabilmesi için H_1 hipotezine göre $\mu_0 = 230$ dan büyük olan her μ_i değerine karşılık tanımlanacak olan $H_1: \mu = \mu_i$ basit hipotezleri için kritik bölgelerin aynı olması gerekir. Keyfi olarak $\mu_1, \mu_2 > 230$ ve $\mu_1 \neq \mu_2$ seçelim. $H_1: \mu = \mu_1$ hipotezine karşılık gelen kritik bölge C_1 ve $H_1: \mu = \mu_2$ hipotezine karşılık gelen kritik bölge ise C_2 olsun. Eğer $C_1 = C_2$ olduğu gösterilebilirse $\mu_1, \mu_2 > 230$ keyfi seçildiğinden bu durum 230'dan büyük olan her μ_i değeri için geçerli olacaktır.

Şimdi önce $H_0: \mu = 230$, $H_1: \mu > 230$ hipotezleri için $\mu_0 = 230$ olup, $H_1: \mu = \mu_1, \mu_1 > \mu_0 = 230$ için C_1 kritik bölgesini bulalım. Neyman Pearson yöntemini uygulayalım. $k > 0$ ve α önem seviyesi olmak üzere; olabilirlik fonksiyonunun H_0 ve H_1 hipotezleri altındaki değerleri birbirlerine oranlanırsa;

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} = exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right]\right\} \leq k$$

$= exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_1^2\right]\right\} \leq k$

$= exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu_1 - \mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - n(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right]\right\} = exp\left\{-\frac{n(\mu_1-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \leq k \Longrightarrow$ son eşitsizlikte her iki tarafın ln'i alınırsa;

$-\frac{n(\mu_1-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \leq lnk \quad \Longrightarrow \quad -\frac{n(\mu_1-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} \leq lnk - \frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq -\frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_1-\mu_0)} + \frac{(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2(\mu_1-\mu_0)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq \frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{(\mu_1-\mu_0)(\mu_1+\mu_0)}{2(\mu_1-\mu_0)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq \frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_0-\mu_1)} + \frac{\mu_1+\mu_0}{2} = L_2 \Longrightarrow C_1 = \left(\overline{X} \geq L_2\right)$ bulunur.

Şimdi de $H_1: \mu = \mu_2, \mu_2 > \mu_0 = 230$ ve $\mu_2 \neq \mu_1$ olmak üzere C_2 kritik bölgesini bulalım. Neyman Pearson yöntemini uygulayalım. $k > 0$ ve α önem seviyesi olmak üzere; olabilirlik fonksiyonunun H_0 ve H_1 hipotezleri altındaki değerleri birbirlerine oranlanırsa;

$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_2)} = exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_2)^2\right]\right\} \leq k$

$= exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\mu_2 \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_2^2\right]\right\} \leq k$

$= exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[2(\mu_2 - \mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - n(\mu_2^2 - \mu_0^2)\right]\right\} = exp\left\{-\frac{n(\mu_2-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{n(\mu_2^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\right\} \leq k \Longrightarrow$ son eşitsizlikte her iki tarafın ln'i alınırsa;

$-\frac{n(\mu_2-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{n(\mu_2^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \leq lnk \quad \Longrightarrow \quad -\frac{n(\mu_2-\mu_0)\overline{X}}{\sigma^2} \leq lnk - \frac{n(\mu_2^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq -\frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_2-\mu_0)} + \frac{(\mu_2^2-\mu_0^2)}{2(\mu_2-\mu_0)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq \frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_0-\mu_2)} + \frac{(\mu_2-\mu_0)(\mu_2+\mu_0)}{2(\mu_2-\mu_0)} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} \geq \frac{\sigma^2 lnk}{n(\mu_0-\mu_2)} + \frac{\mu_2+\mu_0}{2} = L_2 \Longrightarrow C_2 = \left(\overline{X} \geq L_2\right)$ bulunur.

Görüldüğü gibi $C_1 = C_2$ olup, bu test bir UMP testidir. $P\left(\overline{X} \geq L_2\right) = \alpha$ denkleminden ve H_0 doğru iken $\overline{X} \sim N\left(\mu = 230\,, \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{n}\right)$ olduğu dikkate alınarak L_2 üst sınır değeri $L_2 = 230 + \frac{10}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$ olarak bulunur.

c) Rastgele çekilen $n = 16$ birimlik örnek için $\overline{x} = 232,6$ hesaplanmıştır. $\alpha = 0,10$ önem seviyesinde, eğer $\overline{X} \geq L_2$ ise H_0 ret edilir.

$Z_{1-\alpha} = Z_{0,90} = 1,28$ ve $n = 16$ olduğundan $L_2 = 230 + \frac{10}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} = 230 + \frac{10}{4}(1,28) = 233,2$ dir.

$\overline{x} = 232{,}6$ ve $L_2 = 233{,}2$ olduğundan $\overline{x} < L_2$ olur ve H_0 ret edilemez. Bu durumda %90 güvenle H_0 hipotezi kabul edilir.

Örnek: $X \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 225)$ dağılımı verilsin. **a)** $H_0: \mu = 59$ hipotezine karşı $H_1: \mu \neq 59$ hipotezini maksimum olabilirlik oran testi kriteri yardımıyla test ediniz. $\alpha = 0{,}10$ önem seviyesindeki kritik bölgeyi bulunuz?

b) $n = 100$ birimlik bir örnek için $\overline{X} = 56{,}10$ bulunmuş ise H_0 hipotezi hakkındaki kararınız ne olur?

Çözüm: a) Hipotezler;

$H_0: \mu = 59$

$H_1: \mu \neq 59$

Olabilirlik oran testine göre olabilirlik oran istatistiği; $\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})}$ olup, $0 < k < 1$ olmak üzere $\lambda \leq k$ ise şartını sağlayan n birimlik örneklerin ya da $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ noktalarının oluşturduğu C kümesi kritik (ret) bölgesidir, öyle ki $P(\lambda \leq k) = \alpha$ dır.

Örneğin olabilirlik fonksiyonu;

$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = (2\pi)^{-n/2}(225)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\times 225}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$ olmak üzere;

$\lambda = \frac{L(\widehat{H}_0)}{L(\widehat{\Omega})} = exp\left\{-\frac{n}{2\times\sigma^2}\left(\overline{X} - \mu_0\right)^2\right\} \leq k$ $(\mu_0 = 59, H_0$ doğru iken$)$ Bu eşitsizlikte her iki tarafın ln'ni alınırsa $\Longrightarrow$ $-\frac{n}{2\times\sigma^2}\left(\overline{X} - \mu_0\right)^2 \leq lnk$ $\Longrightarrow$ $\left[\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}\right]^2 \geq -2lnk$ $\Longleftrightarrow$ $\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}\right| \geq \sqrt{-2lnk} = c$ yazılabilir.

$X \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 225)$ olduğundan, $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i \sim N(\mu\,,\sigma^2 = 225)$ ve böylece $\overline{X} \sim N\left(\mu\,,\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$ olduğu, buna bağlı olarak H_0 doğru iken $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} \sim N(0\,,1)$ elde edilir. Böylece $|Z| \geq c$ olmak üzere α önem seviyesinde c kritik sınır değeri;

$P(\,|Z| \geq c) = \alpha$ veya tümleyen olayı gereğince $P(\,|Z| \leq c) = 1 - \alpha \Longrightarrow P(-c \leq Z \leq c) = 1 - \alpha$ ile ya da dağılımın simetrik olma özelliği gereğince $P(Z \leq -c) = P(Z \geq c) = \frac{\alpha}{2}$ eşitliği yardımı ile bulunabilir. Gerçekten

$P(Z \geq c) = \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow P(Z \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longleftrightarrow c = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bulunur. Bu değeri ve $Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}$ değerini $P(-c \leq Z \leq c) = 1 - \alpha$ eşitliğinde yerine yazarsak, $P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow P\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ güven aralığına göre

$L_{1,2} = \mu_0 \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olup, kritik bölge $C = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_n): \overline{X} \leq L_1 \; veya \; \overline{X} \geq L_2\right\}$ şeklindedir. $\alpha = 0{,}10$ iken $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$ ve böylece $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}65$, H_0 doğru iken $\mu_0 = 59$;

$\sigma = 15$ olup kritik (ret) bölge; $L_{1,2} = 59 \mp \frac{15}{\sqrt{n}}(1{,}65)$ olmak üzere $C = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_n) : \overline{X} \leq L_1 \; veya \; \overline{X} \geq L_2\right\}$ şeklindedir.

b) $n = 100$ iken $L_{1,2} = 59 \mp \frac{15}{\sqrt{n}}(1{,}65) = 59 \mp \frac{15}{10}(1{,}65) \Rightarrow L_1 = 56{,}525$ ve $L_2 = 61{,}475$ bulunur. $\overline{X} = 56{,}10$ verildiğinden, $\overline{X} < L_1$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

Örnek: $X \sim N(\mu\,, \sigma^2)$ dağılımı verilsin. $H_0: \mu = 335$ hipotezine karşı $H_1: \mu < 335$ hipotezini maksimum olabilirlik oran testi kriteri yardımıyla test etmek için 16 birimlik bir örnek çekiliyor ve örnek ortalaması ile örnek standart sapması istatistikleri sırasıyla $\overline{x} = 324{,}8$ ve $s = 40$ olarak hesaplanıyor. %10 önem seviyesinde H_0 hipotezi hakkındaki kararınız ne olur?

Çözüm: Hipotezler:

$H_0: \mu = 335$

$H_1: \mu < 335$ burada σ^2 bilinmediğinden dolayı olabilirlik oran testi yöntemine göre bu test için kritik bölge H_1 hipotezi gereğince $C = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_n) : \overline{X} \leq L_1\right\}$ bölgesidir, öyle ki;

$L_1 = \mu_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha}$ dır. Eğer $\overline{X} \leq L_1$ ise H_0 ret edilir.

$n = 16, \mu_0 = 335,\ \overline{x} = 324{,}8;\ s = 40$ ve $\alpha = 0{,}10$ olduğundan $t_{n-1;1-\alpha} = t_{15;0{,}90} = 1{,}341$olup, buna göre;

$L_1 = 335 - \frac{40}{\sqrt{16}}(1{,}341) = 321{,}59$ bulunur. $\overline{x} = 324{,}8 > L_1$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez.

Örnek: $X \sim N(\mu\,, \sigma^2 = 9)$ dağılımından rastgele olarak n birimlik bir örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. $H_0: \mu = 80$ hipotezine karşı $H_1: \mu \neq 80$ hipotezini test etmek için aşağıdaki üç kritik bölge dikkate alınıyor. $C_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \overline{x} \leq L_1\}$, $C_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \overline{x} \geq L_2\}$ ve $C_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |\overline{x} - 80| \geq L_3\}$. Buna göre;

a) $n = 16$ ve $\alpha = 0{,}05$ iken L_1, L_2 ve L_3 sınır değerlerini bulunuz?

b) Her üç kritik bölge için güç fonksiyonlarının grafiğini çiziniz?

Çözüm: a) Hipotezler;

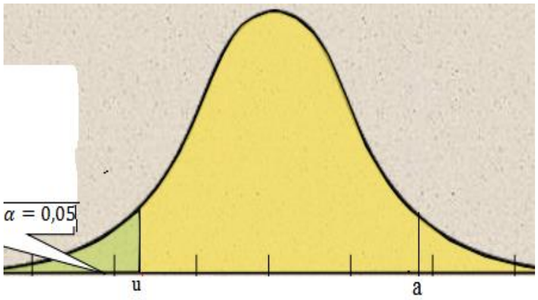
$H_0: \mu = 80$

$H_1: \mu \neq 80$ şeklide veriliyor. $X \sim N(\mu\,, \sigma^2 = 9)$ dağılımından rastgele olarak n birimlik bir örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olmak üzere, $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i \sim N(\mu\,, \sigma^2 = 9)$ ve X_i'ler bağımsızdır. Bu örneğe ait örnek ortalaması istatistiği için örnekleme dağılımı $\overline{X} \sim N\left(\mu\,, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ olup, $n = 16, \sigma^2 = 9$ ve H_0 doğru iken bu dağılım $\overline{X} \sim N\left(80\,, \frac{9}{16}\right)$ olacaktır.

Şimdi önce L_1sınır değerini bulalım. $C_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \overline{x} \leq L_1\}$ bir kritik bölge olduğundan $P\left({C_1}/{H_0}\right) = \alpha$ yazılır. Buna göre; $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0\,, 1)$ olduğu dikkate alındığında

$P\left(\bar{X} \le L_1 \big/ \mu = 80\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{L_1-80}{3/\sqrt{16}}\right) = P\left(Z \le \frac{4(L_1-80)}{3}\right) = P(Z \le u) = 0{,}05$ öyle ki $u = \frac{4(L_1-80)}{3}$ ….(*)

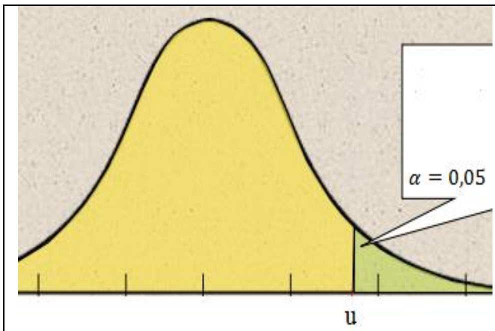
yazılabilir.

	$a > 0$ ve $u = -a$ olmak üzere normal dağılımın simetrik olma ve tümleyen olayının olasılığı özelliği gereğince; $P(Z \le u) = P(Z \ge a) = 1 - P(Z \le a) = 0{,}05$ ve böylece $P(Z \le a) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow a = 1{,}65$ olup, bu durumda $u = -1{,}65$ olacaktır. Böylece (*) eşitliğinden $\frac{4(L_1-80)}{3} = -1{,}65 \Rightarrow L_1 = 78{,}7625$ bulunur.

İkinci olarak L_2 sınır değerini bulalım. $C_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{x} \ge L_2\}$ bir kritik bölge olduğundan $P\left(C_2 \big/ H_0\right) = \alpha$ yazılır. Buna göre; $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0\,,1)$ olduğu dikkate alındığında

$P\left(\bar{X} \ge L_2 \big/ \mu = 80\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{L_2-80}{3/\sqrt{16}}\right) = P\left(Z \ge \frac{4(L_2-80)}{3}\right) = P(Z \ge u) = 0{,}05$ öyle ki $u = \frac{4(L_2-80)}{3}$ ….(**)

yazılabilir.

	$P(Z \ge u) = 0{,}05$ tümleyen olayının olasılığı özelliği gereğince $1 - P(Z \le u) = 0{,}05 \Rightarrow$ $P(Z \le u) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow u = 1{,}65$ ve bu sonuç (**) eşitliğinde kullanılırsa; $\frac{4(L_2-80)}{3} = 1{,}65 \Rightarrow L_2 = 81{,}2375$ bulunur.

Son olarak L_3 sınır değerini bulalım. $C_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |\bar{x} - 80| \ge L_3\}$ bir kritik bölge olduğundan $P\left(C_3 \big/ H_0\right) = \alpha$ yazılır. Buna göre; $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0\,,1)$ olduğu dikkate alındığında

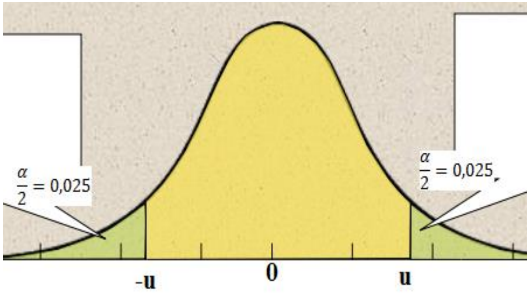
$P\left(|\bar{X} - 80| \ge L_3 \big/ \mu = 80\right) = P\left(\bar{X} - 80 \le -L_3\right) + P\left(\bar{X} - 80 \ge L_3\right)$ yazılabilir, çünkü $L_3 > 0$ olup

$|\bar{X} - 80| \ge L_3 \Leftrightarrow ya\ \bar{X} - 80 \le -L_3\ veya\ \bar{X} - 80 \ge L_3$ ve böylece

$\left(|\bar{X} - 80| \ge L_3\right) \cong \left(\bar{X} - 80 \le -L_3\right) \cup \left(\bar{X} - 80 \ge L_3\right)$, ayrıca $\left(\bar{X} - 80 \le -L_3\right) \cap \left(\bar{X} - 80 \ge L_3\right) = \emptyset$ dir. Denk olayların olasılıkları da birbirine eşittir. Böylece son eşitlikten;

$P\left(|\overline{X}-80| \geq L_3 \big/ \mu = 80\right) = P(\overline{X} \leq -L_3 + 80) + P(\overline{X} \geq L_3 + 80) = P\left(Z \leq \frac{-L_3+80-80}{3/4}\right) +$
$P\left(Z \geq \frac{L_3+80-80}{3/4}\right) = P\left(Z \leq \frac{-4L_3}{3}\right) + P\left(Z \geq \frac{4L_3}{3}\right) = P(Z \leq -u) + P(Z \geq u) = 0{,}05$ öyle ki

$u = \frac{4L_3}{3}$ ……(***) yazılabilir.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Normal dağılımın simetriklik özelliği gereğince $P(Z \leq -u) = P(Z \geq u)$ olduğundan,
$P\left(|\overline{X}-80| \geq L_3 \big/ \mu = 80\right) = 2P(Z \geq u) = 0{,}05$
$\Longrightarrow P(Z \geq u) = 0{,}025 \Longrightarrow P(Z \leq u) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \;\Longrightarrow\; u = 1{,}96$ olup, bu sonuç (***) eşitliğinde kullanılırsa; $\frac{4L_3}{3} = 1{,}96 \;\Longrightarrow L_3 = 1{,}47$ bulunur.</td>
</tr>
</table>

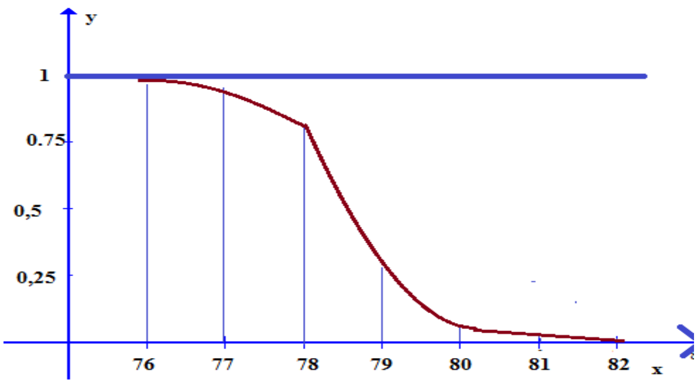
b) Önce $C_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \overline{x} \leq L_1\}$ bölgesi ile ilgili güç fonksiyonunu bulalım ve grafiğini çizelim.

Güç fonksiyonu; $\pi(\theta) = P(C/H_1) = P(H_0\, ret/H_1 -$ doğru$) = 1 - P(H_0\, kabul/H_1 -$ doğru$)$ şeklinde tanımlı. Buna göre;

$\pi(\mu) = P(C_1/H_1) = P(\overline{X} \leq L_1/H_1) = P\left(Z \leq \frac{L_1-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_1-\mu)}{\sigma}\right)$ dır. Burada $n = 16, L_1 = 78{,}7625\; ve\; \sigma = 3$ olduğu dikkate alınırsa; güç fonksiyonu;

$\pi(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{16}(78{,}7625-\mu)}{3}\right) = \Phi\left(\frac{4(78{,}7625-\mu)}{3}\right)$ olarak bulunur. H_1 hipotezine göre seçilen aşağıdaki μ değerlerine karşılık gelen güç değerlerini kullanarak grafiğini çizebiliriz.

$\boldsymbol{\mu}$	76	77	78	79	80	81	82
$\boldsymbol{\pi(\mu)}$	$\Phi(3{,}68)$	$\Phi(2{,}35)$	$\Phi(1{,}02)$	$\Phi(-0{,}52)$	$\Phi(-1{,}65)$	$\Phi(-2{,}98)$	$\Phi(-4{,}32)$
	0,9999	0,9906	0,8461	0,3015	0,0495	0,0014	0,0001

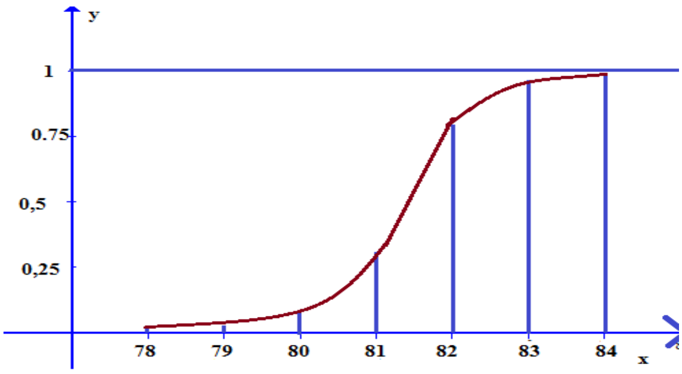


İkinci olarak $C_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \overline{x} \geq L_2\}$ bölgesi ile ilgili güç fonksiyonunu bulalım ve grafiğini çizelim.

$\pi(\mu) = P(C_2/H_1) = P(\overline{X} \geq L_2/H_1) = P\left(Z \geq \frac{L_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{L_2-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-\mu)}{\sigma}\right)$ dır. Burada $n = 16, L_2 = 81{,}2375\ ve\ \sigma = 3$ olduğu dikkate alınırsa; güç fonksiyonu;

$\pi(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{16}(81{,}2375-\mu)}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4(81{,}2375-\mu)}{3}\right)$ olarak bulunur. H_1 hipotezine göre seçilen aşağıdaki μ değerlerine karşılık gelen güç değerlerini kullanarak grafiğini çizebiliriz.

$\boldsymbol{\mu}$	78	79	80	81	82	83	84
$\boldsymbol{\pi(\mu)}$	0,0001	0,0014	0,0495	0,3707	0,8485	0,9906	0,9999



Son olarak $C_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): |\overline{x} - 80| \geq L_3\}$ bölgesi ile ilgili güç fonksiyonunu bulalım ve grafiğini çizelim.

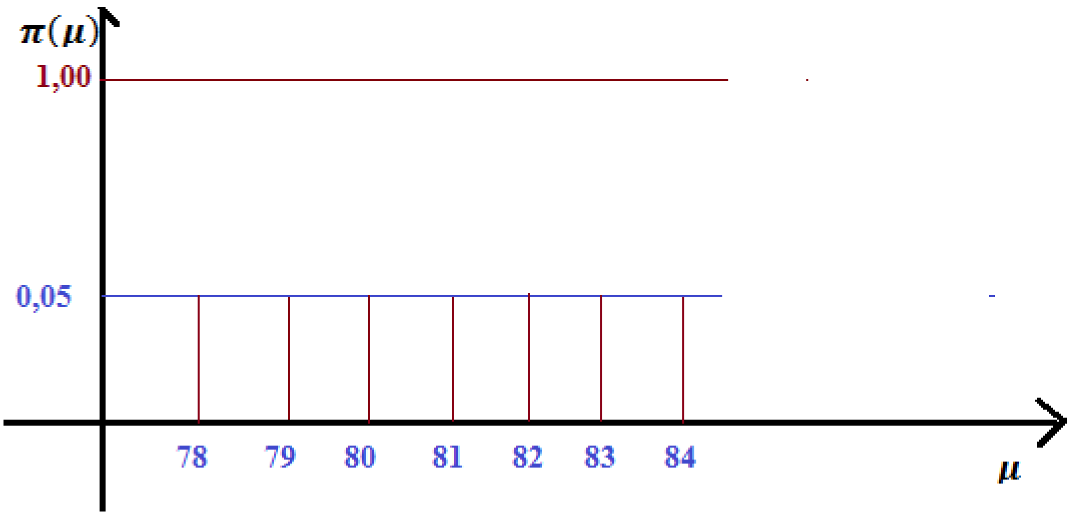
$$\pi(\mu) = P(C_3/H_1) = P\left(\left|\overline{X} - 80\right| \geq L_3 \big/ H_1\right) = 1 - P\left(\left|\overline{X} - 80\right| \leq L_3 \big/ H_1\right) =$$

$$1 - P(-L_3 \leq \overline{X} - 80 \leq L_3) = 1 - P\left(-\frac{L_3}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{L_3}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right)\right]$$

$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right) = 2 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}L_3}{\sigma}\right)\right)$ olup, burada $n = 16, L_3 = 1{,}47\ ve\ \sigma = 3$ olduğu dikkate alınırsa; güç fonksiyonu;

$\pi(\mu) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{16}(1{,}47)}{3}\right)\right) = 2(1 - \Phi(1{,}96)) = 2(1 - 0{,}975) = 0{,}05$ bulunur. H_1 hipotezine göre seçilen aşağıdaki μ değerlerine karşılık gelen güç değerlerini kullanarak grafiğini çizebiliriz.

$\boldsymbol{\mu}$	78	79	80	81	82	83	84
$\boldsymbol{\pi(\mu)}$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05



Örnek: Bir alaşımın sertliği $\sigma = 5$ olan bir normal dağılım göstermektedir. Alaşımın ortalaması 72 birim bulunuyor. Yeni bir alaşım öneriliyor ve ortalama sertliği test edilmek isteniyor. Bunun için 16 birimlik örnek çekiliyor. Buna göre;

a) $\alpha = 0{,}05$ için $H_0: \mu = 72,\ H_1: \mu = 75$ hipotezlerini test ediniz?

b) β (İkinci tip hata)yı bulunuz?

c) $H_0: \mu = 72,\ H_1: \mu > 72$ hipotezleri ile $H_0: \mu = 72,\ H_1: \mu \neq 72$ hipotezlerini test ediniz ve güç eğrilerini çiziniz?

Çözüm: a) X: Alaşımın sertliği olmak üzere $X \sim N(\mu, \sigma = 5)$ olduğu biliniyor. Hipotezler;

$H_0: \mu = 72$, $(\mu_0 = 72)$
$H_1: \mu = 75$, $(\mu_1 = 75, \mu_1 > \mu_0)$ olup,

hipotezler basit hipotezlerdir. Bu sebeple test için en iyi kritik bölge Neyman Pearson teoremi ile belirlenir. Bu teoreme göre i) $P(C/H_0) = \alpha$, ii) $\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \leq k;\ \forall(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C,\ k > 0$ ve

iii) $\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \geq k;\ \forall(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C'$ şartlarını sağlayan C bölgesi en iyi kritik bölgedir.

$X \sim N(\mu, \sigma = 3)$ dağılımından rastgele çekilen $n = 16$ birimlik örnek için olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right\} = (2\pi \times 25)^{-\frac{16}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu)^2\right\}$$

dir. Olabilirlik fonksiyonunun H_0 ve H_1 hipotezleri altında aldığı değerleri birbirine oranlayalım. $k > 0$ olmak üzere α önem seviyesindeki en iyi kritik bölge için

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} = \frac{(2\pi\times 25)^{-\frac{16}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu_0)^2\right\}}{(2\pi\times 25)^{-\frac{16}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \mu_1)^2\right\}} = \frac{exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\sum_{i=1}^{16}(X_i - 72)^2\right\}}{exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\sum_{i=1}^{16}(X_i - 75)^2\right\}} =$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2\times 25}\left[\sum_{i=1}^{16}(X_i - 72)^2 - \sum_{i=1}^{16}(X_i - 75)^2\right]\right\} =$$

$exp\left\{-\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{16} X_i^2 - 144\sum_{i=1}^{16} X_i + 5184 - \sum_{i=1}^{16} X_i^2 + 150\sum_{i=1}^{16} X_i - 5625\right]\right\} =$

$exp\left\{-\frac{1}{50}\left(6\sum_{i=1}^{16} X_i - 441\right)\right\} \leq k$ olmalıdır. Buradan her iki tarafın ln'i alınırsa

$-\frac{1}{50}\left(6\sum_{i=1}^{16} X_i - 441\right) \leq lnk \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} X_i \geq 441 - \frac{50lnk}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} X_i \geq 441 - \frac{25lnk}{3}$ diyelim. Buradan $16 \times \overline{X} \geq 441 - \frac{25lnk}{3} \Rightarrow \overline{X} \geq \frac{1323-25lnk}{48} = L_2$ ise H_0 ret edilir ve böylece en iyi kritik bölge, $C = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_{16}): \overline{X} \geq L_2\right\}$ bölgesidir. Bu kritik bölge için; $P\left(\overline{X} \geq L_2 / H_0\right) = \alpha = 0{,}05$ denkleminden L_2 bulunur. $X \sim N(\mu, \sigma = 5)$ olduğundan $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{25}{16}\right)$ ve böylece $Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ dir. Bu durumda;

$P\left(\overline{X} \geq L_2 / H_0\right) = 1 - P(\overline{X} \leq L_2) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu)}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{4(L_2-72)}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4(L_2-72)}{5}\right) = 0{,}05$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{4(L_2-72)}{5}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow \frac{4(L_2-72)}{5} = 1{,}65 \Rightarrow L_2 = \frac{5\times(1{,}65)}{4} + 72 = 74{,}0625$ bulunur. Eğer $n = 16$ birimlik örnek için $\overline{X} \geq 74.0625$ ise H_0 ret edilir.

b) İkinci tip hata $\beta = P(H_0\ kabul / H_1\ doğru) = 1 - P(H_0\ ret / H_1\ doğru) = 1 - P(C/H_1)$ $\Rightarrow \beta = 1 - P(\overline{X} \geq L_2/H_1) = 1 - P\left(Z \geq \frac{L_2-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z \geq \frac{\sqrt{16}(74{,}0625-75)}{5}\right)$

$\Rightarrow \beta = 1 - P(Z \geq -0{,}75) = 1 - P(Z \leq 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$ bulunur.

c) $H_0: \mu = 72$

$H_1: \mu > 72$ hipotezlerinin testi ve güç eğrisi.

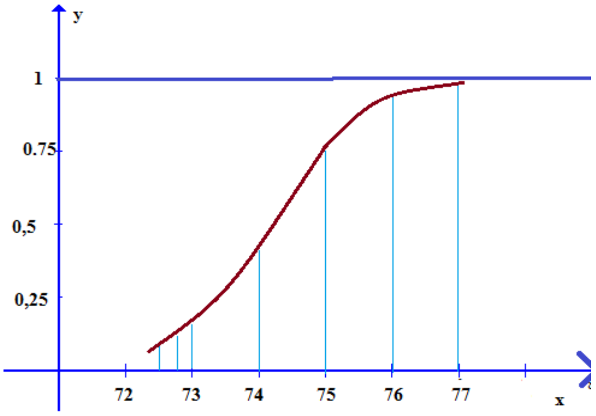
Burada H_1 bileşik hipotezdir. Buna göre bu hipotezlerin testi için olabilirlik oran testi uygulanır. Olabilirlik oran testi Teorem:1'e göre kritik bölge (C) için sınır değeri $H_1: \mu > 72$ olduğundan $L_2 = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} = 72 + \frac{5}{4} Z_{0{,}95} = 72 + \frac{5}{4}(1{,}65) = 74{,}0625$ bulunur. Bu sonuca göre kritik bölge $C = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_{16}): \overline{X} \geq L_2\right\} = \left\{(X_1, X_2, \dots, X_{16}): \overline{X} \geq 74{,}0625\right\}$ olup, eğer $\left(\overline{X} \geq 74{,}0625\right)$ ise H_0 ret edilir.

Testin gücü (güç fonksiyonu):

$\pi(\mu) = P(C/H_1) = P(\overline{X} \geq L_2/H_1) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}(74{,}0625-\mu)}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{4(74{,}0625-\mu)}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4(74{,}0625-\mu)}{5}\right)$ dır.

H_1 hipotezine göre seçilen aşağıdaki μ değerlerine karşılık gelen güç değerlerini kullanarak grafiğini çizebiliriz.

$\boldsymbol{\mu}$	72,5	72,8	73	74	75	76	77
$\boldsymbol{\pi(\mu)}$	0,1056	0,1562	0,1977	0,4801	0,7734	0,9394	0,9906



$H_0: \mu = 72$

$H_1: \mu \neq 72$ hipotezlerinin testi ve güç eğrisi.

Olabilirlik oran testi Teorem:1'e göre kritik bölge (C) için sınır değeri $H_1: \mu \neq 72$ olduğundan $L_{1,2} = \mu_0 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 72 \pm \frac{5}{4} Z_{0,975} = 72 \pm \frac{5}{4}(1,96)$ olup, $L_1 = 69,55$ ve $L_2 = 74,45$ bulunur. Bu sonuca göre kritik bölge;

$C = \{(X_1, X_2, \dots, X_{16}): \overline{X} \leq L_1 \; veya \; \overline{X} \geq L_2\} = \{(X_1, X_2, \dots, X_{16}): \overline{X} \leq 69,55 \; veya \overline{X} \geq 74,45\}$ olup, eğer $\overline{X} \leq 69,55$ veya $\overline{X} \geq 74,45$ ise H_0 ret edilir.

Testin gücü (güç fonksiyonu):

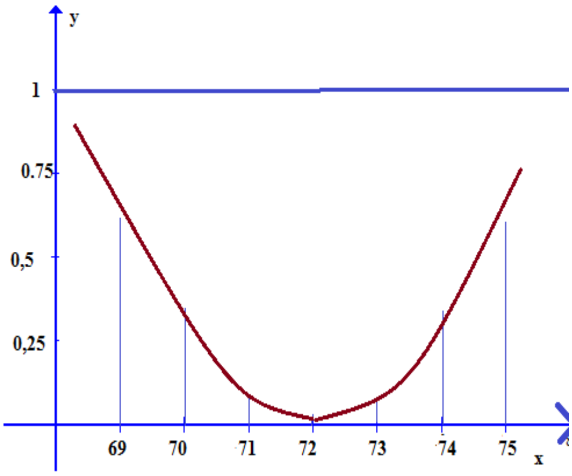
$\pi(\mu) = P(C/H_1) = P[(\overline{X} \leq L_1) \cup (\overline{X} \geq L_2)/H_1] = 1 - P(L_1 \leq \overline{X} \leq L_2/H_1)$

$= 1 - [P(\overline{X} \leq L_2) - P(\overline{X} \leq L_1)] = 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\mu)}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_1-\mu)}{\sigma}\right)\right]$

$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{4(74,45-\mu)}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4(69,55-\mu)}{5}\right)\right]$ bulunur.

H_1 hipotezine göre seçilen aşağıdaki μ değerlerine karşılık gelen güç değerlerini kullanarak grafiğini çizebiliriz.

$\boldsymbol{\mu}$	69	70	71	72	73	74	75
$\boldsymbol{\pi(\mu)}$	0,67	0,3595	0,1259	0,05	0,1259	0,3595	0,67


y
1
0.75
0,5
0,25
69
70
71
72
73
74
75
x