$$\Rightarrow P\left(-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \ldots \le -\bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left(-\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}} \le -\mu \le -\bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha \quad \ldots (10)$$

$$P\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}}\right)$$

bulunur.

II. KİTLE ORANI (π) İÇİN GÜVEN ARALIĞI

X rastgele değişkeni iki ayrık sonucu olan bir rastgele deneyde başarı durumunu göstersin. Deney sonuçlarından başarısızlık durumunu "0" ile başarı durumunu ise "1" ile gösterelim. Deney de başarı elde etme olasılığı (π), başarısızlık olasılığı ise (1−π) olsun. Bu durumda π; X r.d.'nin temsil ettiği iki değer alan kitle için Başarı oranı parametresidir. π-parametresi için %(1−α) güven katsayılı güven aralığını oluşturabilmek, bu kitleden n-birimlik bir örnek çekilsin.

Örnek birimleri $X_1, X_2, \dots, X_n$ ile gösterilsin.
olduğundan, $i=1,2,\dots,n$ için

$X \sim \text{Bernoulli}(1,\pi)$ olduğundan,

X_1: 1. nci denemedeki başarı durumu $\rightarrow X_1 \sim Ber(1,\pi)$
X_2: 2. " " " $\rightarrow X_2 \sim Ber(1,\pi)$
$\vdots$
X_n: n. " " " " $\rightarrow X_n \sim Ber(1,\pi)$

$\Big\}$ Bağımsız r.d. ler

π-parametresinin EÇOT'si $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ şeklinde tanımlanmış olup, π-parametresinin EÇOT'si örnek oranı istatistiğidir. Burada;

$\sum_{i=1}^{n} X_i$: Birbirinden bağımsız n-denemedeki toplam başarı sayısı olup, örnekleme dağılımı; $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n,\pi)$ dir. Böylece bir rastgele değişken dan p istatistiği için;

$$E(p) = E\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \quad \text{"} X_i \sim Ber(1,\pi) \text{ old. } E(X_i)=\pi \text{ ve } V(X_i)=\pi(1-\pi) \text{ dir"}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \pi = \frac{1}{n}.n\pi = \pi$$

$$V(p) = V\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{n^2} V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big), \quad \text{"} X_i \text{'ler bağımsız old."}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\pi(1-\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \Rightarrow \hat{V}(p) = \frac{p(1-p)}{n} \text{ olur.}$$

elde edilir. n-yeterince büyükken MLT gereğince p-istatistiği standardize edilirse; $n \rightarrow \infty$ iken

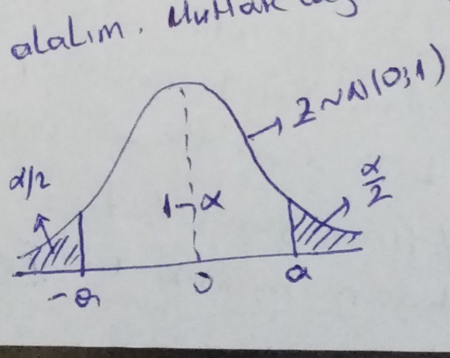
$$Z = \frac{p - E(p)}{\sqrt{\hat{V}(p)}} = \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\sqrt{n}\,(p-\pi)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0;1)$$

elde edilir. Böylece π-parametresi için güven aralığı st. normal dağılım üzerinde oluşturulabilir. $a>0$ olmak üzere olasılığını ele alalım. Mutlak değer özelliğinden

$P(|Z| \leq a) = 1-\alpha$

$P(-a \leq Z \leq a) = 1-\alpha$

$P(Z < -a) = P(Z > a) = \frac{\alpha}{2}$



$P(z \leq a) = 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow a = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ olmalıdır. Böylece

$$P(-a \leq z \leq a) = P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(p-\pi)}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p-\pi \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq -\pi \leq -p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$= P\left(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_p \leq \pi \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_p\right) = 1-\alpha \quad \cdots (11)$$

elde edilir. Burada $\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ olup, p istatistiğinin standart hatasının tahminidir.

π-parametresi için Eşitlik (11) ile verilen güven aralığı örnek çekimi yerine koyma yöntemi ile yapıldığında geçerlidir. Eğer örnek çekimi yerine koymama yöntemi ile yapılmış ise bu durumda p-istatistiğinin beklenen değeri değişmez (değişken) varyansı değişir.

Öyle ki; $E(p) = \pi$ ve $\hat{\sigma}_p^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{p(1-p)}{n}$ olacağı için, güven aralığında yani Eşitlik (11) de $\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{p(1-p)}{n}}$ almak yeterlidir.

Örnek Hacmini Belirleme

Örnek hacmi kitle ortalaması (μ) için veya kitle oranı (π) için verilen güven aralıkları yardımıyla belirlenebilir.

μ için güven aralığının kullanılması

Örnek çekimi yerine koyma ile yapılmış ise; $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ güven aralığından

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}\right) = 1-\alpha,$$

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} \leq \underbrace{\mu - \bar{x}}_{\mu\text{-nün tahminindeki hata}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \rightarrow$$ μ'nün tahminindeki hata aralığı yazılabilir.

Hata aralığı mutlak değerce; $|\mu - \bar{x}| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}$ olup, bu eşitsizlik hata için bir üst sınır verecektir. Eğer bu üst sınır için önceden bir değer seçersek örnek hacmi belirlenebilir. Önceden belirlenen üst sınır "c" olsun. O zaman

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} = c \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = c \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{c} \Rightarrow$$

$$n = \left[\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{c} \right]^2 \quad \ldots (12)$$

elde edilir.

Eğer örnek çekimi yerine koymama yöntemi ile yapılmış ise; yada kitle sonlu ise;

$$P(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 1-\alpha, \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

güven aralığından

Hata aralığı; $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \mu - \bar{x} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}$ yazılabilir.

Mutlak hata aralığı; $|\mu - \bar{x}| \leq \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}}_{\text{üst sınır}} = c \Rightarrow$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = c \Rightarrow \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{N \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n(N-1)} - \frac{\cancel{n} \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{n}(N-1)} = c^2 \Rightarrow \frac{N \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n(N-1)} = c^2 + \frac{\sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{N-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{(N-1)c^2}{N \sigma^2 z^2_{1-\alpha}} + \frac{\cancel{(N-1)} \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{(N-1)} N \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(N-1)c^2 + \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{N \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$$

$$n = \frac{N \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{(N-1)c^2 + \sigma^2 z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad \ldots (13)$$

olarak bulunur.

π-için Güven Aralığının Kullanılması

Örnek oranı p ile kitle oranı π genellikle farklı olduğundan aradaki fark $\pi - p$ hatayı verir. π için güven aralığına göre

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_p \leq \pi - p \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_p \quad , \quad \hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$ yazılabilir.

Mutlak hata ise $|\pi - p| \leq \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_p}_{\text{üst sınır}} = c \Rightarrow$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = c \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p(1-p)}}{c} \Rightarrow$$

$$n = \frac{p(1-p)\, z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{c^2} \quad \ldots\ldots (14)$$

elde edilir.

Sonlu kitlede, örnek çekimi yerine koymama yöntemi ile yapılırsa

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{p(1-p)}{n}}$$ olduğu dikkate alındığında;

$$n = \frac{p(1-p)\, N\, z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{c^2(N-1) + p(1-p)\, z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad \ldots (15)$$

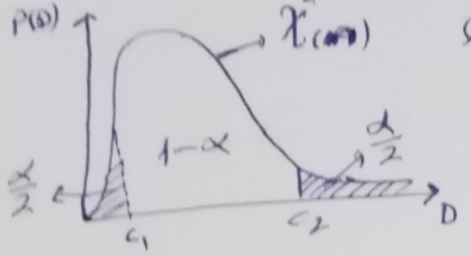
olarak bulunur.

III. Varyans İçin Güven Aralığı

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun. σ^2 parametresine ait kitlenin dağılımı için $\%(1-\alpha)$ güven katsayılı güven aralığı μ parametresinin bilinip bilinmemesine göre belirlenir.

i) μ biliniyor olsun. Verilen kitleden çekilen n-birimlik bir rastgele örnek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ve bağımsızdır. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve bağımsızdır. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$ ve bağımsızdır. Böylece $D = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$

elde edilir. Bu durumda σ^2 parametresi için güven aralığı D istatistiğinin örnekleme dağılımı olan $\chi^2_{(n)}$ dağılımı üzerinde kurulabilir. Ancak; bu dağılım simetrik olmayıp $(0,\infty)$ aralığında sağa çarpık bir dağılımdır.



$c_1<c_2$ olmak üzere öyle $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ alalım ki;

$$P(c_1 \le D \le c_2) = 1-\alpha$$

$$P(D \le c_1) = P(D \ge c_2) = \frac{\alpha}{2} \text{ olsun.}$$

Dağılım fonksiyonu tanımından; $F_D(x) = P(D \le x)$ olması sebebiyle;

$$P(D \le c_1) = F_D(c_1) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow c_1 = \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$$

$$P(D \ge c_2) = 1 - P(D \le c_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(D \le c_2) = 1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow F_D(c_2) = 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$c_2 = \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ elde edilir. Böylece σ^2-için güven aralığı;

$$P(c_1 \le D \le c_2) = P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n}\right)$$

$$= P\left(\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \le \frac{1}{\sigma^2} \le \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)$$

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1-\alpha \quad \dots (16)$$

bulunur.

ii) μ-bilinmiyor olsun

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olmak üzere μ parametresinin n birimlik örnek iken, σ^2 parametresinin yansız tahmin yansız EGOT'si $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ iken, σ^2 parametresinin yansız tahmin edicisi $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ dir. Bu durumda σ^2 parametresi için güven aralığı S^2 ya da $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ istatistiklerinin örnekleme dağılımı üzerinde kurulabilir. Biliyoruz ki;

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$$ dir. Buradan

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu)]^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} + \frac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \frac{2\left[\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\right](\bar{x}-\mu)}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \underbrace{\frac{2[n\bar{x}-n\bar{x}](\bar{x}-\mu)}{\sigma^2}}_{=0} + \left[\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]^2$$

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\left[\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]^2 \sim \chi^2_{(1)}$

$$\Rightarrow \chi^2_{(n)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \chi^2_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(n)} - \chi^2_{(1)},$$ ($\bar{x}$ ile s^2 bağımsız olduğundan)

$$\Rightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$ elde edilir. Bu sebeple σ^2 için güven aralığı $\chi^2_{(n-1)}$ dağılımı üzerinde, μ parametresinin bilindiği durumdaki benzer şekilde;

$$P\left(\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \quad \dots (17)$$

olarak bulunur. Burada $(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ dir.