4. Testin (Test Kuralının) Belirlenmesi

Bir testin belirlenmesinde genel olarak olasılık dağılımı bilinen ve H_0 hipotezindeki θ parametresinin tahmin edicisi olan bir istatistikten yararlanılır. Bu istatistik aynı zamanda rastgele örnekteki örnek birimlerinin bir fonksiyonu olacağından $T = g(X_1,\ X_2, \dots, X_n\ )$ ile gösterilebilir. Birinci tip hata olasılığı ya da testin anlamlılık düzeyi olarak bilinen α önceden belirlenir. Bu durumda testin belirlenmesinde güven aralığı yöntemi ta da sezgisel yöntem kullanılabilir.

4.1 Güven Aralığı Yöntemi

Eğer testin anlamlılık düzeyi α ise bu durumda güven aralığının ve böylece testin büyüklüğünün ölçüsü $1-\alpha$ olur. Bu $1-\alpha$ değerine testin güven seviyesi adı verilir. Güven aralığı testin tipine (tek yönlü/çift yönlü olma durumu) göre değişir.

a) $H_0: \theta \le \theta_0$; $H_1: \theta > \theta_0$ (sağ yanlı, tek yönlü) test için θ parametresine ait sol yanlı güven aralığı kullanılır. Sol yanlı güven aralığı $(-\infty\ , L_2]$ olup, eğer θ parametresi $N(\theta\ , \sigma^2)$ kitlesinin kitle ortalaması ise sol yanlı güven aralığı için üst güven sınırı,

$$L_2 = \begin{cases} \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{1-\alpha}\ , & \sigma^2\ biliniyorsa \\ \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:1-\alpha}\ , & \sigma^2\ bilinmiyorsa \end{cases}$$

olacaktır. Buna göre H_0 doğru iken $T \le L_2$ dir.

b) $H_0: \theta \ge \theta_0$; $H_1: \theta < \theta_0$ (sol yanlı, tek yönlü) test için θ parametresine ait sağ yanlı güven aralığı kullanılır. Sağ yanlı güven aralığı $[L_1\ , +\infty)$ olup, eğer θ parametresi $N(\theta\ , \sigma^2)$ kitlesinin kitle ortalaması ise sağ yanlı güven aralığı için alt güven sınırı,

$$L_1 = \begin{cases} \overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{1-\alpha}\ , & \sigma^2\ biliniyorsa \\ \overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:1-\alpha}\ , & \sigma^2\ bilinmiyorsa \end{cases}$$

olacaktır. Buna göre H_0 doğru iken $T \ge L_1$ dir.

c) $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta \ne \theta_0$ (çift yönlü) test için θ parametresine ait çift yönlü güven aralığı kullanılır. Çift yönlü güven aralığı $[L_1\ , L_2]$ olup, eğer θ parametresi $N(\theta\ , \sigma^2)$ kitlesinin kitle ortalaması ise güven aralığı için alt ve üst güven sınırları,

$$L_{1,2} = \begin{cases} \overline{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ , & \sigma^2\ biliniyorsa \\ \overline{x} \mp \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1:1-\frac{\alpha}{2}}\ , & \sigma^2\ bilinmiyorsa \end{cases}$$

olacaktır. Buna göre H_0 doğru iken $L_1 \le T \le L_2$ dir.

Örnek:4 $X \sim N(\theta\ , \sigma^2 = 4)$ dağılımı verilsin. θ parametresi ile ilgili hipotezler; $H_0: \theta = 10$; $H_1: \theta \ne 10$ ve $\alpha = 0{,}05$ olsun. Verilen dağılımdan rastgele çekilen 36 birimlik bir örnekten örnek ortalaması $\overline{X} = 12$ bulunmuştur. θ parametresi ile ilgili güven aralığının güven sınırlarını bulunuz ve H_0 hipotezi hakkındaki kararınızı belirtiniz?

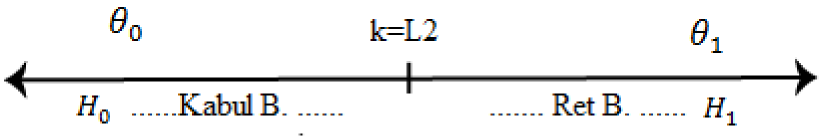
Çözüm: Hipotezler çift yönlü olduğundan güven sınırları, dağılımın varyansı bilindiğinden; $L_{1,2} = \overline{x} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ile bulunur. Burada $\alpha = 0{,}05$ olduğundan $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$ ve böylece; $L_{1,2} = 12 \mp \frac{2}{\sqrt{36}}(1{,}96) \Longrightarrow L_1 = 11{,}35$ ve $L_2 = 12{,}65$ bulunur. Buna göre güven aralığı $P(11{,}35 \leq \theta \leq 12{,}65) = 0{,}95$ bulunur. : $\theta = 10$ değeri güven aralığı dışında kaldığı için H_0 hipotezi ret edilir.

4.2 Sezgisel Yöntem

Bu yöntemde H_0 ve H_0 hipotezlerine göre farklı davranışlar gösteren bir istatistik bulunmaya çalışılır. Bu istatistik genellikle θ parametresinin en iyi tahmin edicisi olacaktır. Eğer θ kitle ortalaması ise en iyi tahmin edicisi $\overline{X}$ örnek ortalaması istatistiği, θ kitle varyansı ise en iyi tahmin edicisi $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ örnek varyansı istatistiğidir (v.s). Sezgisel yöntemi tek yanlı ve çift yanlı duruma göre inceleyelim.

a) $H_0: \theta \leq \theta_0$; $H_1: \theta > \theta_0$ (sağ yanlı test ve bileşik hipotez) durumu

θ parametresinin tahmin edicisi örnek birimlerinin bir fonksiyonu olan $T = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ istatistiği olsun. Bu durumda T istatistiğinin örnekleme (olasılık) dağılımı biliniyordur. Sezgisel olarak H_0 hipotezi doğru iken T istatistiğinin alabileceği değer, H_1 hipotezi doğru iken alabileceği değerden daha küçüktür. Yani T istatistiği H_0 ve H_1 hipotezleri için farklı davranmaktadır. Buna göre T istatistiğinin alabileceği değer büyükse, örneğin k belirlenecek olan bir kritik değer olmak üzere $T > k$ ise H_0 hipotezi ret edilecektir. Kritik değer (k), θ_0 değerine göre sağ tarafta yer aldığı için üst sınır adını alır ve $k = L_2$ ile gösterilir. α anlamlılık düzeyi olmak üzere $k = L_2$ kritik değeri $P(T > L_2/H_0) = \alpha$ denkleminden bulunur. Bu durumda kritik bölge $C = \{(X_1, X_2, \ldots X_n)/(T > L_2)\}$, yani $C = (T > L_2)$ dir.

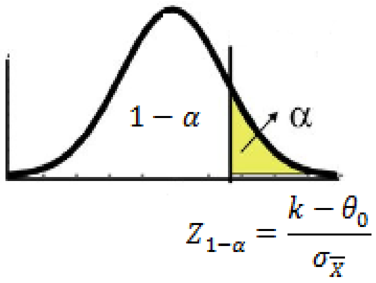


Örneğin; θ kitle ortalaması ve $T = \overline{X}$ iken $k = L_2$ nedir?

$P(T > L_2/H_0) = P(T > L_2) = P\left(\overline{X} > k\right) = 1 - P\left(\overline{X} \leq k\right) = \alpha \Longrightarrow P\left(\overline{X} \leq k\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow$

$$P\left(\frac{\overline{X} - E\left(\overline{X}\right)}{\sigma_{\overline{X}}} \leq \frac{k - E\left(\overline{X}\right)}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma_{\overline{X}}} \leq \frac{k - \theta_0}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{k - \theta_0}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 1 - \alpha \qquad \Longrightarrow$$

$\Phi\left(\frac{k - \theta_0}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 1 - \alpha$ elde edilir, burada $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dir. Bu durumda



$$\frac{k-\theta_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \begin{cases} z_{1-\alpha} \text{ , eğer } \sigma^2 \text{ biliniyorsa} \\ t_{n-1;1-\alpha} \text{ , eğer } \sigma^2 \text{ bilinmiyorsa} \end{cases}$$

olmak üzere, kritik değer;

$$\Longrightarrow k = L_2 = \begin{cases} \theta_0 + \sigma_{\overline{X}} \times z_{1-\alpha} \\ \theta_0 + S_{\overline{X}} \times t_{n-1;1-\alpha} \end{cases}$$

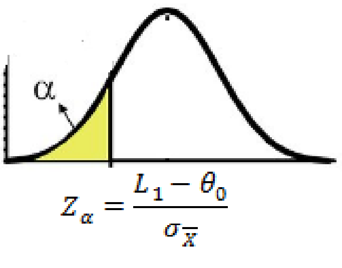
olarak bulunur.

Burada $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ örnek ortalamasının standart hata tahminidir. Bu sonuca göre sağ yanlı bir hipotez testinde $\overline{X} > L_2$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Aksi takdirde, yani testinde $\overline{X} \leq L_2$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

Eğer hipotezler basit ve $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$, $(\theta_1 > \theta_0)$ ise bu testin kritik bölgesi yukarıdaki durum ile aynı olup bu durumda 2.tip hata olasılığı da hesaplanabilir.

b) $H_0: \theta \geq \theta_0$; $H_1: \theta < \theta_0$ (sol yanlı test ve bileşik hipotez) durumu

Bu durumda H_0 hipotezi doğru iken T istatistiğinin alabileceği değer, H_1 hipotezi doğru iken alabileceği değerden daha büyüktür. Buna göre T istatistiğinin alabileceği değer küçükse, sol yanlı test için kritik değer L_1 alt sınırı olmak üzere $T < L_1$ ise H_0 hipotezi ret edilecektir. Bu L_1 değeri $P(T < L_1/H_0) = P(T < L_1)$ eşitliğinden L_1 alt sınırı bulunabilir. Buna göre testin kritik kritik bölgesi $C = (T < L_1)$, yani $(-\infty, L_1]$ aralığıdır. Bu durumda kritik değer θ_0'a göre sol tarafta olduğundan alt sınır adını almaktadır. Eğer θ parametresi kitle ortalaması ise L_1 alt sınırı;

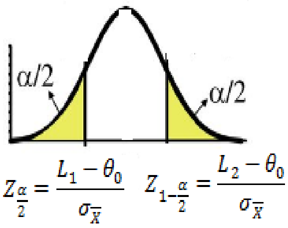


$$L_1 = \begin{cases} \theta_0 - \sigma_{\overline{X}} \times z_{1-\alpha}, \text{ eğer } \sigma^2 \text{ biliniyorsa} \\ \theta_0 - S_{\overline{X}} \times t_{n-1;1-\alpha}, \text{ eğer } \sigma^2 \text{ bilinmiyorsa} \end{cases}$$

olarak bulunur. Burada $Z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ dır. Buna göre sol yanlı bir hipotez testinde $\overline{X} < L_1$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Aksi takdirde, yani testinde $\overline{X} \geq L_1$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

c) $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta \neq \theta_0$ (iki yanlı test ve bileşik hipotez) durumu

Bu durumda H_0 hipotezi doğru iken T istatistiğinin alabileceği değer, H_1 hipotezi doğru iken alabileceği değerden ya daha küçük ya da daha büyük olacaktır. Eğer T istatistiğinin alabileceği değer büyükse $T > L_2$ olduğunda, veya T istatistiğinin alabileceği değer küçükse $T < L_1$ olduğunda H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde, yani, $L_1 \leq T \leq L_2$ olduğunda H_0 hipotezi ret edilemez. Buna göre L_2 üst kritik değeri $P(T > L_2/H_0) = \frac{\alpha}{2}$ denkleminden ve L_1 alt kritik değeri ise $P(T < L_1/H_0) = \frac{\alpha}{2}$ denkleminden bulunabilir. Böylece kritik bölge $C = (T < L_1) \cup (T > L_2)$ şeklinde iki ayrık bölgenin birleşimi olacaktır. Eğer θ parametresi kitle ortalaması ise L_1 alt sınırı ile L_2 üst sınırı;

	$L_{1,2} = \begin{cases} \theta_0 - \sigma_{\overline{X}} \times z_{1-\frac{\alpha}{2}}, & \text{eğer } \sigma^2 \text{ biliniyorsa} \\ \theta_0 - S_{\overline{X}} \times t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, & \text{eğer } \sigma^2 \text{ bilinmiyorsa} \end{cases}$ ile bulunur. Burada $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dır. Buna göre iki yanlı bir hipotez testinde $\overline{X} < L_1$veya $\overline{X} > L_2$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Aksi takdirde, yani testinde $L_1 \leq \overline{X} \leq L_2$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

Örnek:5 $X \sim N(\theta\, , \sigma^2 = 4)$ dağılımı verilsin. Bu dağılımdan rastgele çekilen 16 birimlik örnek için örnek ortalaması 3,05 olarak hesaplanmıştır. Anlamlılık seviyesi 0,05 olmak üzere $H_0: \theta \leq 2$ hipotezini $H_1: \theta > 2$ hipotezine karşı test ediniz?

Çözüm: $H_0: \theta \leq 2$

$H_1: \theta > 2$ hipotezlerine göre, sağ yanlı test söz konusudur. Bu teste göre karar kuralı $\overline{X} > L_2$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Burada L_2 üst sınır değeri olup;

$L_2 = \theta_0 + \sigma_{\overline{X}} \times z_{1-\alpha}$ eşitliğinden hesaplanır. Burada $\theta_0 = 2, \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = 0{,}05$ için $P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 0{,}95 \implies z_{1-\alpha} = 1{,}64$ olup, bu değerler yerlerine yazılırsa;

$L_2 = 2 + \frac{1}{2}(1{,}64)$ =2,825 bulunur. $\overline{X} = 3{,}05$ ve $L_2 = 2{,}825$ iken $\overline{X} > L_2$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

5. Güç Fonksiyonu (Testin Gücü)

H_1 hipotezi bileşik hipotez iken hem ikinci tip hata olasılığı hem de testin gücü θ parametresinin bir fonksiyonu olacağından tam olarak belirlenemezler. İkinci tip hata olasılığı;

$$\beta(\theta) = P\left({}^{H_0 - kabul}/_{H_1 - doğru} \right)$$

olasılığı olup, bu olasılık her bir θ değeri için hesaplanabilir. Diğer taraftan $H_1 - doğru$ iken H_0 hipotezinin reddedilme olasılığına testin gücü veya güç fonksiyonu adı verilir. Güç fonksiyonu testin başarısı hakkında fikir veren bir kriterdir. Güç fonksiyonu;

$$\pi(\theta) = P\left({}^{H_0 - ret}/_{H_1 - doğru} \right) = 1 - P\left({}^{H_0 - kabul}/_{H_1 - doğru} \right) = 1 - \beta(\theta)$$

olarak elde edilir. $\pi(\theta)$ ikinci tip hata yapmama olasılığı olarak da adlandırılabilir. θ parametresinin belirli bir değeri için elde edilecek olan $\pi(\theta)$ değerine testin bu parametre değerindeki gücü denir.

Örnek:6 $X \sim N(\theta\,, \sigma^2 = 16)$ dağılımı verilsin. Bu dağılımın θ parametresi ile ilgili hipotezler

$H_0: \theta \leq 10$ ve $H_1: \theta > 10$ olsun. Bu hipotezleri test etmek için kitleden rastgele olarak $n = 25$ birimlik bir örnek $(X_1, X_2, \dots X_n)$ olsun. Buna göre ;
a) Testin kritik bölgesini belirleyiniz?
b) Güç fonksiyonunu oluşturunuz?
c) $\theta = 8, 9, 10, 11, 12$ ve 13 değerleri için güç fonksiyonunun değerlerini hesaplayınız ve grafiğini çiziniz?

Çözüm: a) $H_0: \theta \leq 10$

$H_1: \theta > 10$ hipotezlerinin testi için kritik bölge, L_2 belirlenecek olan bir sabit sayı olmak üzere; $C = \{(X_1, X_2, \dots X_n)/(T > L_2)\}$ dir. Burada θ parametresi dağılımın ortalaması olduğundan, T istatistiği, bu parametrenin en iyi tahmin edicisi olan örnek ortalama istatistiği olacaktır. Bu dağılımdan rastgele çekilen $n = 25$ birimlik örneklem için örnek ortalaması istatistiği $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ olup, bu istatistiğin örnekleme dağılımı; $X \sim N(\theta\,, \sigma^2 = 16)$ olması sebebiyle $\overline{X} \sim N\left(\theta\,, \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$ şeklindedir. Öyle ki; $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{16}{25}$ dir. Böylece kritik bölge;

$C = \{(X_1, X_2, \dots X_n)/(\overline{X} > L_2)\} = (\overline{X} > L_2)$ olup, $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyine karşılık L_2 üst sınır değeri bulunabilir.

$P(\overline{X} > L_2/H_0 - doğru) = \alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N\left(\theta\,, \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$ olduğundan $Z = \frac{\overline{X}-\theta}{\sigma_{\overline{X}}} \sim N(0\,,1)$ olduğu dikkate alınırsa $P(\overline{X} > L_2) = P\left(Z > \frac{L_2-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(L_2-\theta)}{\sigma}\right)$=1- $P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\theta)}{\sigma}\right) = 0{,}05 \;\Rightarrow\; P\left(Z \leq \frac{5(L_2-\theta)}{4}\right) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ $\Phi\left(\frac{5(L_2-\theta)}{4}\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{5(L_2-\theta)}{4} = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}64$ olur. Buna göre H_0 doğru iken $\theta = 10$ olduğundan $\frac{5(L_2-10)}{4} = 1{,}64 \Rightarrow L_2 = 10 + \frac{1{,}64\times 4}{5} = 11{,}31$ bulunur. Buna göre testin kritik bölgesi $n = 25$ için, $C = \{(X_1, X_2, \dots X_n)/(\overline{X} > 11{,}31)\}$ olacaktır.

b) Testin güç fonksiyonu;

$\pi(\theta) = P(H_0 - ret/H_1 - doğru) = 1 - P(H_0 - kabul/H_1) = 1 - P(\overline{X} \leq L_2/H_1) \quad \Rightarrow$ $\overline{X} \sim N\left(\theta\,, \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$ olduğundan $Z = \frac{\overline{X}-\theta}{\sigma_{\overline{X}}} \sim N(0\,,1)$ olduğu dikkate alınırsa $\overline{X} = \theta + \sigma_{\overline{X}} \times Z$ yazılabilir. Böylece; $L_2 = 11{,}31$ olduğundan

$$\pi(\theta) = 1 - P(\theta + \sigma_{\overline{X}} \times Z \leq L_2) = 1 - P\left(Z \leq \frac{L_2-\theta}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(L_2-\theta)}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{5(11{,}31-\theta)}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-\theta)}{4}\right)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere güç fonksiyonu θ parametresinin bir fonksiyonudur.

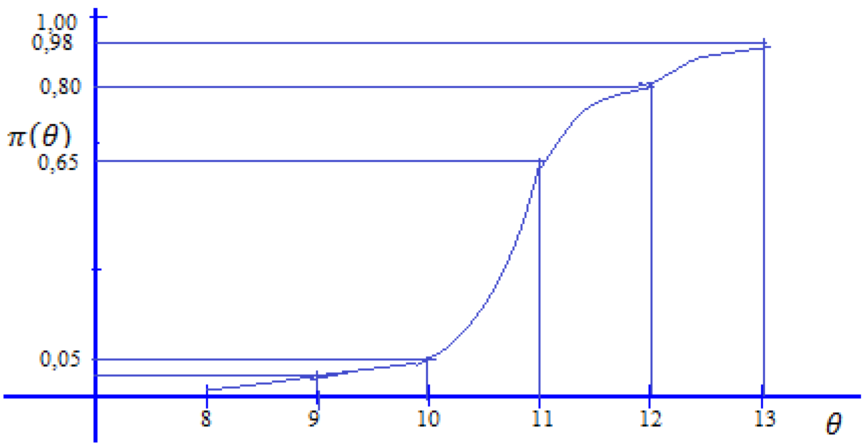
c) θ parametresinin farklı değerleri için $\pi(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-\theta)}{4}\right)$ güç değerleri hesaplanabilir.

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\pi(\theta)}$
8	$\pi(8) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-8)}{4}\right) = 1 - \Phi(4{,}14) = 1 - 0{,}9999 \cong 0$
9	$\pi(9) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-9)}{4}\right) = 1 - \Phi(2{,}89) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019$
10	$\pi(10) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-10)}{4}\right) = 1 - \Phi(1{,}64) = 1 - 0{,}9495 \cong 0{,}0505$
11	$\pi(11) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-11)}{4}\right) = 1 - \Phi(0{,}39) = 1 - 0{,}6517 \cong 0{,}6516$
12	$\pi(12) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-12)}{4}\right) = 1 - \Phi(-0{,}86) = \Phi(0{,}86) = 0{,}8051$
13	$\pi(13) = 1 - \Phi\left(\frac{5(11{,}31-13)}{4}\right) = 1 - \Phi(-2{,}11) = \Phi(2{,}11) = 0{,}9821$

Burada $\theta = 10$ almakla H_0 doğru kabul ediliyor. Bu durumda $\pi(\theta) = \pi(10) = 0{,}05$ değeri, H_0 doğru iken H_0 ‘ı reddetme olasılığıdır. Bu olasılığın daima küçük çıkması beklenir, nitekim burada da düşük çıkmıştır.

$\theta = 13$ almakla H_1 doğru kabul ediliyor. Bu durumda $\pi(\theta) = \pi(13) = 0{,}9821$ değeri, H_1 doğru iken H_0 ‘ı reddetme olasılığıdır, yani H_1’in kabul edilme olasılığıdır. Bu olasılığın daima yüksek çıkması beklenir, burada da 0,98 gibi oldukça yüksek bir değer çıkmıştır.

Güç fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Güç fonksiyonu θ parametresinin artan bir fonksiyonudur. Gerçekten fonksiyonun θ parametresine görevi alınırsa;

$$\pi(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(11{,}31-\theta)}{\sigma}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,\Phi'\left(\frac{\sqrt{n}(11{,}31-\theta)}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{\sqrt{n}(11{,}31-\theta)}{\sigma}\right) > 0$$

olduğu görülür. Burada $\Phi(.)$:standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu iken, $\varphi(.)$: standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve daima $\varphi(.) > 0$ dır.

Güç fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan bu fonksiyon yardımıyla L_2 sınır değeri ve n örnek hacmi belirlenebilir. Bunun için θ parametresinin düşük değerleri için küçük güç değeri, yüksek değerleri için de büyük güç değeri verecek olan bir test belirlenmelidir.

Örneğin; $\pi(10) = 0{,}01$ ve $\pi(13) = 0{,}98$ iken L_2 sınır değeri ve n örnek hacmi ne olmalıdır?

$\pi(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-\theta)}{\sigma}\right) \Rightarrow \pi(10) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-10)}{\sigma}\right) = 0{,}01 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-10)}{\sigma}\right) = 0{,}99$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(L_2-10)}{\sigma} = 4$ …..(1)

$\pi(13) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-13)}{\sigma}\right) = 0{,}98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(L_2-13)}{\sigma}\right) = 0{,}02 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(L_2-13)}{\sigma} = -4$ …..(2)
(1) ve (2) denklemleri taraf tarafa bölünürse;

$\frac{\frac{\sqrt{n}(L_2-10)}{\sigma}}{\frac{\sqrt{n}(L_2-13)}{\sigma}} = \frac{4}{-4} \Rightarrow \frac{(L_2-10)}{(L_2-13)} = -1 \Rightarrow L_2 - 10 = -L_2 + 13 \Rightarrow 2L_2 = 23 \Rightarrow L_2 = 11{,}5$ bulunur.
Bu değer denklemlerden birisinde yerine konursa;

$\frac{\sqrt{n}(L_2-10)}{\sigma} = 4 \Rightarrow \sqrt{n}(11{,}5 - 10) = 4\sigma$, $(\sigma = 4$ olduğundan$) \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{16}{1{,}5} = 10{,}67 \Rightarrow$
$n \cong 114$ bulunur.